Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

fortgeführt von

C. W. Borchardt, K. Weierstrass, L. Kronecker,
L. Fuchs, K. Hensel, L. Schlesinger

gegenwärtig herausgegeben von

Helmut Hasse

unter Mitwirkung von

W. Brödel, M. Deuring, O. Haupt,
G. Köthe, H. Rohrbach, W. Schmeidler

Band 187

In 4 Heften

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin 1950

Archiv-Nr. 180350
Druck von Paul Dünnhaupt, Köthen
Printed in Germany

Inhaltsverzeichnis des Bandes 187

Seite

Armsen, Paul, Über die Strahlenbrechung an einer einfachen Sammellinse. I 193

Baer, Reinhold, Klassifikation der Gruppenerweiterungen 75

Brödel, Walter, Über die Nullstellen der Weierstraßschen $\wp$-Funktion 189

Denk, Franz u. **Otto Haupt,** Über die Windungsmonotonie der Elementarbogen im $R^{(n)}$ 95

Epheser, Helmut, Konforme Abbildung einfach zusammenhängender Gebiete, die von Bögen konzentrischer logarithmischer Spiralen berandet sind 131

Hasse, Helmut, Kurt Hensel zum Gedächtnis 1

— —, Invariante Kennzeichnung galoisscher Körper mit vorgegebener Galoisgruppe 14

Hlawka, Edmund, Über Gitterpunkte in Parallelepipeden 246

Kanold, Hans-Joachim, Sätze über Kreisteilungspolynome und ihre Anwendungen auf einige zahlentheoretische Probleme. I 169

Klobe, W., Über eine untere Abschätzung der n-ten Kreisteilungspolynome $g_n(z) = \prod_{d|n} (z^d - 1)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)}$ 68

Kneschke, A., Theorie der genäherten Quadratur 115

Kneser, Hellmuth, Reelle analytische Lösungen der Gleichung $\varphi(\varphi(x)) = e^x$ und verwandter Funktionalgleichungen 56

Knopp, K., Beweis eines von I. Schur in der Theorie der C-Summierbarkeit aufgestellten Satzes 70

Ostmann, Hans-Heinrich, Verfeinerte Lösung der asymptotischen Dichtenaufgabe . 183

— —, Über die Anzahl der Elemente von Summenmengen 222

Pickert, Günter, Komposita transzendenter Körpererweiterungen 234

Schmeidler, Werner, Über unbeschränkt iterierbare Operatoren 109

Voderberg, G. †, Neue Beiträge zur ersten Hauptaufgabe der Geodäsie für eine Drehfläche, insbesondere das Erdsphäroid 153

Wendelin, H., Zwei Verästelungssätze 231

Wever, Franz, Operatoren in Lieschen Ringen 44

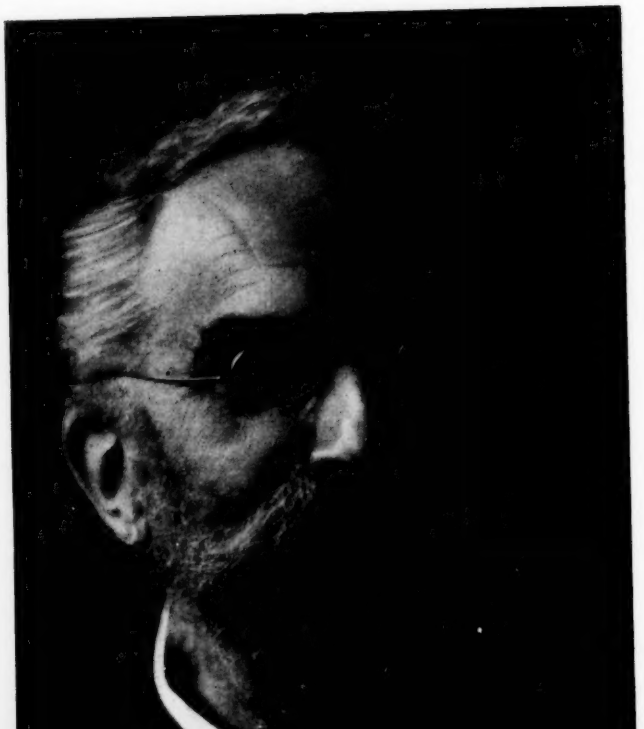
Zacharias, Max, Bemerkungen zu der Arbeit v. O. Nehring „Über ein Dreiecksproblem“ 129

Ausgabedaten der Hefte von Bd. 187

Heft 1/2 ausgegeben am 10. Februar 1950

Heft 3 ausgegeben am 23. März 1950

Heft 4 ausgegeben am 15. Mai 1950



Kurt Hensel

Kurt Hensel zum Gedächtnis.

Von *Helmut Hasse* in Berlin.

I. Der äußere Lebensgang[1]).

Am 1. Juni 1941 schloß der Geheime Regierungsrat Professor Dr. Kurt Hensel in Marburg a. d. Lahn, wo er seit 1901 als ordentlicher Professor der Mathematik gewirkt und seit 1930 im Ruhestand gelebt hatte, für immer die Augen.

Kurt Hensel wurde am 29. Dezember 1861 in Königsberg als der jüngere Sohn und viertes Kind des ostpreußischen Gutsbesitzers Sebastian Hensel geboren. Sein älterer Bruder Paul Hensel hat sich als Professor der Philosophie, zuletzt in Erlangen, einen Namen gemacht. Sein Vater war der Sohn des Berliner Malers Wilhelm Hensel und seiner Frau Fanny geb. Mendelssohn, der älteren Schwester des Komponisten Felix Mendelssohn-Bartholdy, die selbst Pianistin war und auch komponierte. Von dieser seiner Großmutter hatte Kurt Hensel eine tiefgehende musikalische Veranlagung geerbt; er spielte gut Violine und sang mit schöner Baritonstimme. Trat man in den Salon des Henselschen Hauses auf dem Marburger Schloßberg, mit seinem herrlichen Blick auf die alte Stadt und auf das von waldigen Höhen umrahmte Lahntal, so fiel der erste Blick auf die stilvollen Ölbilder von Felix und Cécile Mendelssohn über dem großen Konzertflügel, und man wurde sofort von dem Geist des historischen Berliner Salons am Leipziger Platz umweht, den Sebastian Hensel in seiner „Familie Mendelssohn" so lebendig geschildert hat, und der hier in Marburg im Henselschen Hause fortlebte. Felix Mendelssohns jüngere Schwester war übrigens mit Dirichlet verheiratet, der so Kurt Hensels angeheirateter Großonkel war.

Der Vater, Sebastian Hensel, hatte die Landwirtschaft gründlich studiert und dann ein größeres Gut Großbarthen in der Pregelniederung nahe dem Städtchen Löwenhagen erworben, das er erfolgreich bewirtschaftete. Die Mutter Julie war die Tochter des erst seit kürzerer Zeit in Königsberg lebenden russischen Staatsrats von Adelson, dessen Familie durch Eisenbahnunternehmungen zu Wohlstand und Ansehen gekommen war, und dessen Frau zusammen mit ihm und den vielen Töchtern ein großes Haus machte, in dem viele Künstler und Gelehrte, darunter auch Jacobi, verkehrten.

Kurt Hensel wuchs bis zu seinem neunten Lebensjahre zusammen mit seinen Geschwistern auf Großbarthen heran; die Eltern unterrichteten die sehr begabten Kinder selbst, wobei sie ein befreundeter erfahrener Schulmann, Karl Witt, beriet. Dann siedelte zunächst die Mutter mit den Kindern nach Berlin über, etwas später nach Ver-

[1]) Diese Schilderung stützt sich neben einigen eigenen Erinnerungen des Verf. hauptsächlich auf Aufzeichnungen von Frau Gertrud Hensel, die von ihr dem Verf. freundlichst zur Verfügung gestellt wurden.

kauf des Gutes auch der Vater, der dort eine Stellung als Direktor der Deutschen Baugesellschaft antrat. In dieser Eigenschaft wirkte er u. a. bei der Erbauung des Hotels „Kaiserhof" mit. Der Brand dieses großen Gebäudes, des ersten eigentlichen Berliner Hotels, genau acht Tage nach der feierlichen Eröffnung, machte nachhaltigen Eindruck auf den jungen Kurt.

Hensel besuchte in Berlin zunächst die damals als sehr gut bekannte Döbbelinsche Privatschule, später dann das Friedrich-Wilhelms-Gymnasium. Dort übte auf ihn besonders der alte Schellbach durch seinen ausgezeichneten und hochanregenden Unterricht in Mathematik und Physik großen Einfluß aus. Durch ihn wurde er für das Studium der Mathematik begeistert; noch bis in sein Alter hinein lobte und rühmte er oft diesen begnadeten Mathematikpädagogen. Sein erstes und drittes Studiensemester absolvierte er in Bonn, wo er vor allem bei Lipschitz hörte und für eine Seminararbeit einen Preis erhielt. Er wurde bald Mitglied des sogenannten Bonner Kreises, dem viele später angesehene Gelehrte, hauptsächlich Historiker und Philologen angehörten, und wo auch der Sinn für Humor, den Hensel wie seine Angehörigen in hohem Grade besaß, auf seine Rechnung kam. Das dazwischenliegende Wintersemester und die späteren Semester studierte er in Berlin und hörte hier u. a. bei Weierstraß, Kronecker, Borchardt, Kirchhoff und Helmholtz; mit des letzteren frühverstorbenem Sohn war er eng befreundet. In dieser Zeit hatte er außer in seiner eigenen, ihm sehr lieben Familie viel angenehmen Verkehr in befreundeten Häusern, aus dem er mannigfache Anregungen zog. so bei Kronecker, du Bois Reymond, Helmholtz, dem Maler Graef und dem aus der Industrie kommenden Physiker Hansemann. Auch nahm er seine Mahlzeiten ziemlich regelmäßig an der Potsdamer Brücke in einem Kreise von jungen Mathematikern ein, dem u. a. Carl Runge, Sonja Kawalewska und Seliwanoff angehörten. Von letzterem erzählte er den netten Ausspruch über Kroneckers Vorlesungen: „*Und wenn die Vorlesung aus ist, wirr rrufen alle ‚wunderrvoll' und habben nicht verrstanden*". In der Tat sollen die Kroneckerschen Vorlesungen sehr schwer gewesen sein, so daß nur wenige vollständig folgen konnten, unter ihnen vielleicht als der am meisten Begeisterte Hensel, der ganz in Kroneckers Fußstapfen trat und von Kronecker mit großem Wohlwollen gefördert wurde. So promovierte er dann 1884 bei Kronecker mit seiner bekannten Arbeit über die außerwesentlichen Diskriminantenteiler, nicht ohne sich überarbeitet zu haben und einige Zeit aussetzen zu müssen; Reitstunden und die von Kronecker empfohlene Lektüre u. a. der damals gerade erscheinenden Karl-May-Romane stellten seine Arbeitskraft wieder her.

Nach vollzogener Promotion diente er als Einjährig-Freiwilliger in Freiburg; der Dienst ließ ihm in diesem Jahr wenig Zeit zur Fortsetzung seiner mathematischen Studien. Sein Plan, sich nach Abschluß der Dienstzeit in Göttingen zu habilitieren, zerschlug sich. So wandte er sich nach Berlin zurück, wo Kronecker ihm 1886 die Habilitation ermöglichte. Seine Antrittsvorlesung handelte von unendlich dünnen Strahlenbündeln.

Schon gleich nach der Promotion hatte er sich heimlich mit der Tochter einer seiner eigenen befreundeten Familie, Gertrud Hahn, verlobt. Nach der Habilitation wurde die Verlobung veröffentlicht, und ein halbes Jahr darauf fand die Hochzeit statt. Frau Gertrud ist Kurt Hensel eine bis an sein Ende mit zartfühlender Liebe verehrte Lebensgefährtin gewesen. Sie hat ihm einen Sohn und vier Töchter geschenkt. Obschon sie von zartester Gesundheit war, hat sie sein Haus, der Familientradition entsprechend, allezeit zu einem Treffpunkt von Gelehrten, Künstlern, Schriftstellern und interessanten Menschen aller Art gemacht, aus dem jeder, dem der Eintritt vergönnt war, immer wieder angeregt und innerlich bereichert schied.

Es folgten arbeitsreiche Jahre in Berlin, in denen die menschlichen und wissenschaftlichen Beziehungen zu Kronecker immer enger wurden, bis dieser, nachdem er seine Frau und mit ihr auch die Lust weiterzuleben verloren hatte, dahinschied und so das enge Band zwischen Lehrer und Schüler zerrissen wurde. Ihrer geistigen Gemeinschaft setzte Hensel ein Denkmal, indem er in jahrelanger eigener Arbeit die Werke und einen Teil der Vorlesungen Kroneckers herausgab. Bald wurde er in Berlin zum Extraordinarius ernannt. Einen Ruf nach Ithaka in den Vereinigten Staaten lehnte er ab. Monate intensiver wissenschaftlicher Arbeit, die den Grund zu seiner späteren großen Schöpfung legten, wechselten mit militärischen Übungen, Musik und Erholungsreisen ab. Auf diesen begleitete ihn öfters Fuchs, der seit einigen Jahren aus Heidelberg an die Universität Berlin berufen war, und mit dem ihn eine herzliche Freundschaft verband. Viel Anregung aller Art brachten auch die jahrelang in den Sommerferien regelmäßig stattfindenden Mittagsmahlzeiten im Restaurant „Kurfürst", bei denen sich jüngere Gelehrte, wie der Historiker Lenz, der Physiker Planck, der Musikwissenschaftler Friedländer trafen. Allwöchentlich stattete er, wie jeder jüngere Berliner Dozent der Mathematik, dem damals bereits hochbetagten Weierstraß einen Besuch ab. Ihm verdankte er neben Kronecker wohl die hauptsächlichste Anregung für die Konzeption des Grundgedankens seiner zahlentheoretischen Neuschöpfung. Mit Landsberg, der in Heidelberg lehrte, aber viel im Hause Hensel zu Besuch weilte, arbeitete er eng zusammen. Daraus entsprang das gemeinsame umfangreiche Werk „Theorie der algebraischen Funktionen", in dem Hensel die neuartigen arithmetischen Methoden entwickelte, während Landsberg die algebraisch-geometrischen Anwendungen bearbeitete. Von Mathematikern der kommenden Generation verkehrte und musizierte der damals junge Steinitz viel im Hause Hensel. Seine für die moderne Algebra grundlegende große Arbeit über die algebraische Theorie der Körper geht auf diese Berührung mit dem Kronecker-Henselschen Ideenkreis zurück, nämlich auf das Bestreben, den in dieser Zeit im Entstehen begriffenen Henselschen Methoden das solide algebraische Fundament zu geben. Wie die meisten Berliner Mathematiker, so war auch Hensel Mitglied des damals auf großer Höhe stehenden Berliner Mathematischen Vereins, für den damals u. a. Bernstein humorvolle Stücke dichtete.

Im Jahre 1901 wurde Hensel aus dem Sommeraufenthalt in Misdroy durch ein Telegramm des ihm befreundeten Berliner Ordinarius Frobenius nach Berlin gerufen. Schottky hatte eine Berufung nach Berlin als Nachfolger von Fuchs angenommen, und Hensel sollte seine Nachfolge als Ordinarius in Marburg übernehmen. Es folgten schwierige Verhandlungen mit dem allgewaltigen und gefürchteten Althoff im Preußischen Kultusministerium über die Frage, ob er dieser Berufung folgen oder in Berlin bleiben und später eine Professur an der Preußischen Akademie der Wissenschaften erhalten sollte. Die Entscheidung fiel schließlich für Marburg. So trat er im Herbst des Jahres die dortige Professur an; seine Familie folgte ihm ein halbes Jahr später. Hier schloß Hensel, durch die Musik zusammengeführt, bald Freundschaft mit dem Philosophen Natorp, dem Juristen Leonhard, dem Germanisten Elster und dem Mediziner v. Behring. Die Familie Hensel wohnte zunächst in Elsters Nachbarhaus in der Universitätsstraße. Dieses erwies sich jedoch nach ein paar Jahren als zu klein und unbequem, und auch als für die wissenschaftliche Arbeit zu unruhig. So wurde mit Hilfe eines Frankfurter Architekten das prächtige, in einem wundervollen Garten gelegene Haus auf dem Schloßberg errichtet, das durch seine schöne Lage und Einrichtung, vor allem aber durch den in ihm gepflegten Geist, bei jedem, der Hensel in seiner zweiten Lebenshälfte besuchte, bleibenden Eindruck hinterließ. Groß ist die Anzahl dieser Besucher gewesen. Die meisten Mathematiker Deutschlands aus dem ersten Drittel unseres

Jahrhunderts, aber auch zahlreiche Fachgenossen aus anderen Ländern haben es kennengelernt, und alle sind dort von dem Hausherrn und seiner Gattin mit der in der Familientradition wurzelnden Herzlichkeit, Gastlichkeit und Anteilnahme an ihrem Lebensgeschick empfangen worden. Nach dem Weltkriege, als die Wohnungsnot sehr groß war, nahm Hensel den damaligen Extraordinarius A. Fraenkel mit seiner Familie im zweiten Stock dieses Hauses auf, und heute wohnt dort Reidemeister, der gegenwärtig den Henselschen Lehrstuhl innehat. In dem von prächtigen Bäumen aller Arten beschatteten, etwas hügeligen Garten befand sich noch ein älteres kleines Häuschen, wie geschaffen, um sich zu völlig ungestörter Arbeit zurückziehen zu können. Seinen Besuchern machte er den Zweck dieses Häuschens mit dem Schüttelreim klar:

In diesem kleinen Gartenhaus
Bezwing' ich selbst den harten Gauß,

wie er überhaupt in anregender Gesellschaft oft humorvolle Schüttelreime aus dem Stegreif produzierte.

Kaum war das Marburger Haus bezogen — es sollte gerade die erste Mittagsgesellschaft stattfinden —, da kam eine Berufung nach Leipzig. Nun hatte Hensel sich in fünfjähriger Tätigkeit bereits einen schönen Wirkungskreis in Marburg geschaffen, die Zahl der Studenten, vor allem auch der Mathematik war in stetem Anwachsen begriffen, und anregender Umgang mit jüngeren Mathematikern fehlte nicht. Auch das Haus fesselte an Marburg. So lehnte er den Leipziger Ruf ab, nachdem das Berliner Ministerium ihm ein ehrenvolles Entgegenkommen gezeigt hatte, ebenso später auch einen auf inoffiziellem Wege gemachten zweiten Versuch, ihn nach Leipzig zu ziehen.

Diese ersten Jahre seines Marburger Wirkens bis zum Weltkrieg waren die fruchtbarsten in Hensels Leben. In ihnen reifte seine Theorie der p-adischen Zahlen nebst ihrer Anwendung auf die algebraischen Zahlkörper heran und wurde in einer Reihe von Arbeiten veröffentlicht. In ihnen entstanden auch seine beiden weiteren Hauptwerke, die „Theorie der algebraischen Zahlen" und die „Zahlentheorie", in denen er seine geniale Neuschöpfung im einzelnen ausgearbeitet und als reife Frucht der wissenschaftlichen Welt vorgelegt hat.

Viel Arbeit aber auch Freude bereitete Hensel seine Tätigkeit als Herausgeber des Crelleschen Journals, dieser ältesten deutschen mathematischen Fachzeitschrift, in der so viele der großen Entdeckungen des vergangenen Jahrhunderts veröffentlicht waren, an der Spitze die Arbeiten von Abel. Hensel übernahm die Herausgabe 1901 von Fuchs als der sechste der mit Crelle, Borchardt, Kronecker-Weierstraß beginnenden Reihe der Herausgeber. Schon kurz nach der Übernahme dieser Aufgabe, mitten zwischen den Verhandlungen wegen des Marburger Rufes, folgte er als der Herausgeber des Journals einer Einladung aus Kristiania zur Feier des 100. Geburtstages von Abel. Hensel hat das Journal bis zum Jahre 1936 herausgegeben, ab 1922 durch mich unterstützt, ab 1930 gemeinsam mit Schlesinger und mir, und ab 1934 mit mir allein; er hat es stets als ein ihm besonders ans Herz gewachsenes Kind angesehen.

In den Jahren 1908 und 1912 nahm Hensel an den Internationalen Mathematikerkongressen in Rom und Cambridge teil.

Im Weltkrieg stellte sich Hensel als Hauptmann der Landwehr zur Verfügung und wurde Bahnhofskommandant, zunächst in dem kleinen Städtchen Gerstungen bei Eisenach, später in Marburg, wo er nebenher in beschränktem Umfange seine Vorlesungstätigkeit fortsetzen konnte. Sein sich allmählich verschlimmerndes Gichtleiden zwang ihn, sich noch während des Krieges aus dem Militärdienst verabschieden zu lassen.

Nach dem Weltkrieg füllten sich die Hörsäle erneut mit einer gereiften, von ungewöhnlichem Arbeitseifer beseelten und größtenteils hochbefähigten akademischen Jugend.

Hensel nahm als ihr akademischer Lehrer lebhaften Anteil an diesem Aufschwung und freute sich über die schönen Leistungen, die in seinen Übungen und Seminaren erzielt wurden. Er hatte ein warmes Herz für diese Jugend und half, wo er konnte, die Härten der Nachkriegszeit zu mildern und ihrem Leben durch Begeisterung für die wissenschaftliche Arbeit einen neuen Inhalt zu geben. Als es wieder möglich war, reiste er zur Erholung nach dem ihm von früher her so lieben Italien und auch nach Paris, ohne allerdings Berührung mit den dortigen Mathematikern zu suchen. Erst eine weitere Reise nach Italien und Sizilien brachte ihn in sehr angenehmen persönlichen Verkehr mit den italienischen Mathematikern, die ihn mit großer Liebenswürdigkeit empfingen. Ein längerer wissenschaftlicher Briefwechsel entspann sich mit dem Grazer Mathematiker Rella, der sich für die Henselschen zahlentheoretischen Arbeiten lebhaft interessierte. Später besuchte er Rella auch persönlich in dessen ständigem Ferienaufenthalt in Küb am Semmering. Auf kürzere Zeit kamen u. a. Fueter, Hellinger und Ostrowski nach Marburg, um die Theorie der p-adischen Zahlen bei ihrem Schöpfer kennen zu lernen.

Einen Höhepunkt in Hensels wissenschaftlichem Leben bildete ein Aufenthalt in Berlin, wo er auf Einladung der dortigen Mathematiker vor einem lebhaft interessierten Zuhörerkreis Vorträge über seine arithmetischen Forschungsergebnisse hielt. An weiteren Ehrungen und Anerkennungen hat es ihm nicht gefehlt. Die Universität Oslo ernannte ihn zu ihrem Ehrendoktor; die Absicht, aus diesem Anlaß noch einmal dorthin zu reisen, mußte er wegen zunehmender Altersbeschwerden aufgeben. Zu seinem 70. Geburtstag fand ein großer Empfang im Salon des Marburger Hauses statt. Nach einer Reihe ehrender Ansprachen von offizieller Seite überreichte ich ihm damals den zu seiner Überraschung heimlich fertiggestellten Festband des Crelleschen Journals, in dem zahlreiche Mathematiker aus aller Welt ihm wertvolle Arbeiten gewidmet hatten. Dies war der letzte größere Festtag, den Hensel in ungetrübter Freude begehen konnte. Noch waren um ihn alle seine Kinder und zahlreiche Enkel versammelt, in deren Reihen das Schicksal und die Zeitereignisse bald Lücken reißen und schweres Leid bringen sollten. Noch lebte vor allem sein einziger Sohn Albert Hensel, ein hochbegabter Jurist, Professor in Königsberg, den im Oktober 1933 auf einer Studienreise in Pavia ein Herzschlag dahinraffte.

Im Jahre 1930 trat Hensel nach Erreichung der Altersgrenze in den Ruhestand. Nachdem er noch eine Zeit lang mit seiner eigenen Vertretung beauftragt war, wurde mir seine Nachfolge übertragen. Er hat dann noch eine Reihe von Jahren am Unterrichtsbetrieb der Marburger Universität mit seiner vollen Arbeitskraft teilgenommen. Diese schönen Jahre, in denen ich das Glück hatte, mit meinem verehrten Lehrer an gleicher Stätte zu wirken und seine Gedanken in engster Berührung mit ihm durch eigene Forschungsarbeit weiterzuführen, wurden nur allzubald durch meine Wegberufung nach Göttingen abgeschnitten.

Seine letzten Lebensjahre, als der zweite Weltkrieg bereits seine düsteren Schatten vorauswarf und dann ausbrach, verbrachte Hensel zurückgezogen und recht einsam im engsten Familienkreis und mit einigen wenigen nahen Freunden, unter ihnen vor allem dem Alttestamentler Budde. Seine wissenschaftliche Arbeit hat er unermüdlich bis zum letzten Lebenstage fortgesetzt, ohne ganz den erstrebten Abschluß zu erreichen. Die Entwürfe zu Arbeiten aus dieser letzten Zeit, in denen er eine Reihe von gedanklichen Vereinfachungen seiner Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen brachte, sind leider nach dem Kriege in einem Bergwerksstollen, zusammen mit vielem anderen wertvollen wissenschaftlichen Material der Universität Göttingen verbrannt.

Ein Herzschlag bereitete diesem langen, reichen, fruchtbaren Leben kurz vor Vollendung des achtzigsten Lebensjahres ein sanftes Ende.

II. Die wissenschaftlichen Arbeiten.

1. Hensel gehört zu denjenigen großen Mathematikern, die gleich durch ihre Erstlingsarbeit, die Dissertation, Aufsehen erregt und sich einen Namen verschafft haben. Die heute ganz geläufige und durchsichtige Tatsache, daß in den Diskriminanten der ganzen Zahlen eines algebraischen Körpers — oder, wie man damals noch sagte, einer Gattung — außerwesentliche Teiler auftreten, und daß es sogar allen Zahldiskriminanten gemeinsame außerwesentliche Diskriminantenteiler geben kann, erschien der damaligen Generation von Zahlentheoretikern als ein höchst seltsames, ganz unerwartetes Phänomen, das der näheren Aufklärung bedurfte. In seiner Dissertation gelang es Hensel, diesen Sachverhalt von Grund aus zu klären, indem er zeigte, daß es sich dabei keineswegs um eine seltsame Ausnahmeerscheinung handelte, sondern daß das Auftreten der gemeinsamen außerwesentlichen Diskriminantenteiler von einem allgemeinen Gesetz beherrscht wird, das er dann später in zwei weiteren Arbeiten noch ausgebaut hat. Danach ist der tiefere Grund für das Auftreten dieser Teiler ein rein kombinatorischer, und es lassen sich notwendige und hinreichende Bedingungen dafür in ganz einfacher arithmetischer Gestalt angeben.

Die Methoden, mit denen Hensel dieses Problem bewältigte, entstammen ganz dem Ideenkreis seines Lehrers Kronecker. Dieser hatte in seiner großen, bahnbrechenden Arbeit „Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen" vom Jahre 1882, in Fortführung und Verallgemeinerung von Kummers Theorie der idealen Zahlen eine allgemeine Methodik zur Grundlegung der Arithmetik in algebraischen Körpern entwickelt, bei der statt des Kummerschen Begriffs der idealen Zahl der Divisorbegriff trat, der auf die Betrachtung von Formen in Unbestimmten gegründet war. Dieser Methodik bediente sich Hensel nicht nur zur Lösung des genannten Problems, sondern auch zur Behandlung weiterer Fragestellungen aus der Theorie der algebraischen Körper. So beschäftigt er sich in einer größeren Reihe anschließender Arbeiten mit der Theorie der Diskriminante und ihrer Primdivisoren überhaupt, mit der Darstellung der ganzen Größen durch ein Fundamentalsystem (Basis), der Verzweigungstheorie der Divisoren, sowie auch mit der Komposition von Körpern, also kurz gesagt mit den Grundlagen der heute abgeschlossen vorliegenden Arithmetik in algebraischen Körpern. Charakteristisch für diese Kronecker-Henselsche Methodik, die dann neben der ihr entgegenstehenden Dedekindschen auch in Hilberts Zahlbericht Eingang fand, ist die Tatsache, daß sie die Grundlegung der Arithmetik für die algebraischen Zahlkörper und Funktionenkörper in gemeinsamem Aufbau ergibt, ein Gesichtspunkt, der nach zeitweiligem Zurücktreten auch heute wieder weitgehende Beachtung findet. So beschäftigen sich denn unter den Henselschen Arbeiten in dieser ersten Periode seines Schaffens eine Anzahl auch mit Problemen aus der Theorie der algebraischen Funktionen von einer oder zwei Variablen und der Theorie der Riemannschen Flächen und ihrer Abelschen Integrale, und legen so den Grund für die 1902 in dem ersten großen Hauptwerk gemeinsam mit Landsberg systematisch dargestellte Theorie dieser Funktionen von einer Variablen, sowie auch zu der später von Hensels Schüler Jung entsprechend entwickelten arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen von zwei Variablen. Eine gedrängte Zusammenfassung jenes ersten Hauptwerks gab Hensel in seinem 1921 erschienenen Enzyklopädieartikel.

Daneben hat Hensel in jener ersten Schaffensperiode, angeregt durch Kroneckers Art, die Determinantentheorie zu entwickeln, eine Reihe von Arbeiten zur linearen Algebra geschrieben, in denen es sich um die arithmetische Theorie der Elementarteiler von Matrizen — oder, wie er oft sagt, Systemen —, den Produktsatz für

die Determinanten aus rechteckigen Matrizen, die Realität der Wurzeln der Säkulargleichung, die Klassifikation der gemischt quadratisch-linearen Formen und gar eine Anwendung der Methoden der linearen Algebra auf ein optisches Problem (Strahlenbündel) handelt. Auf einige dieser Themen ist er auch später noch in einigen Arbeiten zur Theorie der Matrizen in abstrakten Körpern zurückgekommen.

2. Die schon bei Kronecker vorliegende gemeinsame Behandlung der algebraischen Zahl- und Funktionenkörper und die von Weierstraß übernommene systematische Verwendung der Potenzreihenentwicklungen bei den letzteren, an Stelle der auf das Kontinuum und geometrische Vorstellungen gestützten Riemannschen Begründungsart, haben dann Hensel zwangsläufig auf die Konzeption des Grundgedankens seiner großen zahlentheoretischen Neuschöpfung, der Theorie der p-adischen Zahlen geführt. Dieser Grundgedanke bestand darin, für die bei den Funktionenkörpern bewährte Potenzreihenmethode ein Analogon bei den Zahlkörpern zu schaffen. Mit dieser Idee trat er erstmalig 1899 in seiner „Neuen Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen" hervor, der dann bald eine mehr systematische Ausgestaltung in mehreren Arbeiten folgte.

Der Boden für die Henselsche Neuschöpfung war durch die Weierstraßsche Behanlung der hyperelliptischen Funktionen und der Abelschen Integrale weitgehend vorbereitet. In den Weierstraßschen Vorlesungen über diese Gegenstände, die Hensel neben denen seines Hauptlehrers Kronecker mit regstem Interesse gehört hatte, finden sich in der Tat neben der grundlegenden Potenzreihenmethode bereits die wesentlichen arithmetischen Begriffsbildungen vorgezeichnet, wie etwa die des Primelements und der Ordnungszahl. Um die Henselsche Leistung recht zu würdigen, muß man sich aber vergegenwärtigen, welche großen begrifflichen Schwierigkeiten der Durchführung des Grundgedankens entgegenstanden. Während wir heute durchaus gewohnt sind, die Potenzreihenentwicklungen der algebraischen Funktionen als formal aufzufassen, also dabei von der tatsächlich bestehenden Konvergenz in einer Umgebung der Entwicklungsstelle zu abstrahieren, lag damals die algebraische Grundlage für eine solche Abstraktion, der allgemeine Körperbegriff, noch nicht vor. Dennoch setzte Hensel kühn die formalen p-adischen Entwicklungen der algebraischen Zahlen an, indem er einfach lehrte, wie man mit diesen neuartigen Gebilden aus einem bisher unbekannten Reservoir mathematischer Objekte rechnen und vergleichen sollte. Es handelt sich demnach hier um eine echte, von Intuition und Phantasie eingegebene Neuschöpfung, die zunächst, wie jede revolutionierende Idee, lapidar und unbehauen hingeworfen wurde, und die ähnlich wie der Leibnizsche Differentialkalkül zunächst des soliden logischen Fundaments entbehrte. Diese erforderliche Fundamentierung wurde dann später auf Grund der Steinitzschen abstrakten Körpertheorie durch die Bewertungstheorie von Kürschák und Ostrowski gegeben, und man kann sagen, daß diese für die Entwicklung der modernen Algebra und Arithmetik grundlegenden Arbeiten den Anlaß zu ihrer Entstehung gerade der Henselschen Theorie der p-adischen Zahlen verdanken. Ähnlich wie Leibniz hat auch Hensel seine neugeschaffenen Zahlen ungeachtet der mangelnden Fundamentierung mit sicherem Instinkt gehandhabt und mit ihrer Hilfe eine völlig neue Begründung der algebraischen Zahlentheorie gegeben, die er dann 1908 in seinem zweiten Hauptwerk niederlegte; zu dem ursprünglich geplanten zweiten Bande dieses Werkes ist es nicht gekommen.

Nur einmal hat ihn sein Instinkt betrogen, nämlich bei dem Versuch, auf die p-adischen Entwicklungen einen neuen Beweis der Transzendenz der Zahl e zu gründen. Wir können heute klar sehen, weswegen sein Ansatz, nämlich e als Nullstelle der p-adischen Gleichung $x^p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n}{n!}$ aufzufassen, nicht das gewünschte Ergebnis liefert, und dabei

gleichzeitig erkennen, in welcher Richtung die noch erforderliche Fundamentierung der Henselschen Konstruktion zu suchen war. Die durch jene Gleichung definierte Zahl e_p, von der sich leicht zeigt, daß sie zwar über dem Körper der rational-p-adischen Zahlen algebraisch, aber über dem Körper der rationalen Zahlen transzendent ist, hat mit der gewöhnlich unter e verstandenen reellen Zahl nichts zu tun; denn e und e_p sind Zahlen aus den perfekten Hüllen des rationalen Zahlkörpers nach zwei nicht-äquivalenten Bewertungen, und es gibt nachweislich keinen beiden Hüllen gemeinsamen bewerteten Erweiterungskörper, in dem man die formale Übereinstimmung der Entwicklungen als eine Gleichheit der Zahlen deuten könnte.

Wie oft in der geschichtlichen Entwicklung hat auch dieser mißglückte Henselsche Ansatz eine unerwartete Frucht getragen. Die Beschäftigung mit der Exponentialreihe brachte Hensel auf den Gedanken, ganz allgemein Exponentialfunktion, Logarithmus und Potenzfunktion in seinen p-adischen Zahlkörpern nachzubilden. Es zeigte sich dann, daß mit Hilfe dieser Bildungen ein Problem lösbar wurde, das noch im Hilbertschen Zahlbericht als ungelöst aufgeführt wird, nämlich die Bestimmung der Struktur der Restklassengruppen nach Primdivisorpotenzen. Diese in mehreren Arbeiten durchgeführte Untersuchung läuft in der Henselschen Auffassung, daß die Kongruenzwerte nach Primdivisorpotenzen Annäherungen an die zu betrachtende algebraische Zahl darstellen, darauf hinaus, die Struktur der Multiplikationsgruppe der p-adischen Erweiterungskörper eines algebraischen Zahlkörpers zu bestimmen, und so wird das Problem von Hensel auch wirklich angefaßt. Es war dies der erste Erfolg der Henselschen Theorie, der über die Dedekindsche idealtheoretische Begründung der algebraischen Zahlentheorie hinausführte.

Systematisch verarbeitet hat Hensel die durch Hinzunahme der elementar-analytischen Funktionen bereicherte p-adische Zahlentheorie 1912 in seinem dritten Hauptwerk, das allerdings seinem lehrbuchartigen Charakter entsprechend auf die dem rationalen Zahlkörper zugeordneten p-adischen Zahlkörper beschränkt ist, dafür aber in seinem Schlußkapitel über quadratische Formen ein neues fruchtbares Anwendungsgebiet für die p-adische Methode erschließt, das dann der Ausgangspunkt für den späteren Siegeszug dieser Methode in der gesamten modernen Arithmetik werden sollte. Erwähnt seien hier auch noch einige kleinere elementar-zahlentheoretische Ergebnisse Hensels, die in diese mittlere Schaffensperiode fallen, wie Verallgemeinerungen des Fermatschen und Wilsonschen Satzes, Bestimmung der höchsten Potenz einer Primzahl p in den Fakultätenzahlen $n!$ durch die p-adische Quersumme von n sowie des Kongruenzwertes mod. p nach Wegdivision dieser Potenz, später auch noch für die Polynomialkoeffizienten durchgeführt, und Bestimmung des quadratischen Restcharakters der Diskriminante eines algebraischen Zahlkörpers nach einer Primzahl.

3. In der nach dem Weltkrieg einsetzenden abschließenden Periode seines Schaffens hat Hensel einen erheblichen Teil seiner Arbeitskraft darauf verwandt, seine neue Begründungsweise immer wieder zu revidieren und auszufeilen. So zieht er für die Aufspaltung eines Primdivisors in Potenzen verschiedener Primdivisoren bei algebraischer Erweiterung die Zerlegung des p-adisch zum Ring erweiterten Grundkörpers in eine direkte Summe von Körpern heran, wendet sich später nochmals der Begründung der Theorie der algebraischen Funktionen von zwei Variablen zu und arbeitete bis zuletzt an dem Mechanismus des Newtonschen Polygons als einer Methode, aus der Grundgleichung einer algebraischen Erweiterung die Primdivisorzerlegung zu konstruieren. Hensel hat wie sein Lehrer Kronecker ganz entschieden auf dem Standpunkt gestanden, daß die beim Aufbau einer Theorie benutzten Begriffsbildungen in endlich vielen Schritten konstruiert sein müssen, ehe man mit ihnen

arbeitet, und er hat sich in allen seinen Veröffentlichungen viele liebevolle Mühe gegeben, diese Konstruktionen möglichst elegant und einfach durchzuführen.

An weiteren Anwendungen seiner Begründungsart auf die höhere algebraische Zahlentheorie brachte er zunächst die Theorie der Primdivisorzerlegung in relativ-zyklischen, insbesondere in Kummerschen Körpern von Primzahlgrad und daran anschließend dann eine p-adische Theorie des Hilbertschen Normenrestsymbols in diesen Körpern, teilweise in Zusammenarbeit mit mir. Ähnlich wie schon bei der Strukturbestimmung der Restklassengruppen nach Primdivisorpotenzen zeigte sich auch hier ganz klar der Vorteil der p-adischen Auffassung; an Stelle der Normenkongruenzen nach beliebig hohen Potenzen des Primdivisors bei Hilbert, tritt bei Hensel die einfache Normengleichung im zugehörigen p-adischen Körper. Erst diese Deutung des Hilbertschen Symbols ermöglichte die dann später von mir durchgeführte, auf p-adischer Grundlage beruhende arithmetische Invariantentheorie der Algebren nebst ihrer Anwendung auf Klassenkörpertheorie und Reziprozitätsgesetz. Geführt wurde ich auf diese Zusammenhänge durch eine Synthese meiner Ausgestaltung der Henselschen Theorie des Hilbertschen Normenrestsymbols einerseits und der Henselschen Theorie der binären quadratischen Formen andererseits. So wurzelt also die heute durch das Hinzukommen der Arbeiten von Chevalley u. a. wesentlich abgeschlossen dastehende moderne Form der Theorie der Algebren, Klassenkörper und Reziprozitätsgesetze nicht nur der beherrschenden Methodik nach auf Hensels Neuschöpfung, sondern stützt sich auch sachlich auf zwei zunächst heterogen erscheinende Henselsche Ansätze.

4. Es sei mir gestattet, dieser Würdigung des wissenschaftlichen Lebenswerks meines Lehrers Kurt Hensel noch die folgenden Ausführungen mehr persönlicher Art hinzuzufügen.

Als ich mich im Jahre 1921 nach fünf abgekürzten Nachkriegssemestern in Göttingen entschloß, mein Studium als Schüler von Hensel in Marburg abzuschließen, hatten meine Göttinger Lehrer Courant, Hecke, Landau und auch mein Konsemester Reidemeister nicht viel mehr als ein mitleidiges Lächeln dafür, daß man als junger Mathematiker Göttingen mit seiner altehrwürdigen Tradition den Rücken kehren könne, um sich einer so ausgefallenen Sache wie der Henselschen p-adik im kleinen Marburg zu widmen. Ich kannte damals Hensel noch nicht, sondern hatte lediglich seine „Zahlentheorie" in einem Antiquariat auf der Weender Straße gesehen und, da sie sehr billig war, erworben. Bei der Lektüre bekam ich sofort den Eindruck von etwas sehr Schönem und Eigenartigem, das gerade dadurch einen besonderen Reiz auf mich ausübte, daß ich es wegen der mangelnden Fundamentierung nicht von Grund aus verstand. Als dann hinzukam, daß Hecke, der mir unter meinen Göttinger Lehrern am meisten gegeben hatte, einem Rufe nach Hamburg folgte, stand mein Entschluß fest, und auch Courants Zureden und Ausmalen der Vorteile und Aussichten in Göttingen konnten ihn nicht mehr umstoßen. Ich habe diesen Entschluß nicht zu bereuen gehabt, auch ganz abgesehen davon, daß mir Hensel sehr bald neben dem verehrten Lehrer ein väterlicher Freund wurde. Denn nachdem ich bei ihm die Grundlagen der p-adik erlernt und von Grund aus verstanden hatte, lag mir klar vor Augen, welch mächtiges Instrument diese bisher eben nur in ihren Grundlagen entwickelte Methodik werden konnte, wenn man sie auf die höheren Probleme der algebraischen Zahlentheorie, insbesondere auf die Reziprozitätsgesetze anwendete. Da ich zunächst nur die Theorie der rational-p-adischen Zahlen erlernt und wirklich verstanden hatte und in der damals beginnenden Inflationszeit schnell zum Abschluß meines Studiums kommen mußte, wählte ich unter den zwei Themen, die mir Hensel nannte, das elementarere, über die p-adische Theorie der rationalzahligen quadratischen Formen, und auch diese Wahl habe ich nicht zu bereuen gehabt. Denn gerade bei der Beschäftigung mit

diesem Thema fiel mir schon frühzeitig das allgemeine Prinzip über den Zusammenhang zwischen dem Verhalten im Kleinen und im Großen in die Hand, durch das die p-adik zur arithmetischen Invariantentheorie wird.

Daß die Henselsche p-adische Methode damals, von einem ganz kleinen Kreis begeisterter Schüler und Anhänger abgesehen, so wenig Beachtung fand und ein so geringes Ansehen genoß, ist wohl verständlich, zumal in Göttingen, wo unter dem nachwirkenden Einfluß von Riemann die Weierstraßschen Gedankengänge sich noch nicht vollen Boden erobert hatten. Schien doch die Dedekindsche idealtheoretische Methode schneller und begrifflich leichter faßlich zum Aufbau der Arithmetik in algebraischen Zahlkörpern zu führen, und waren doch die mit dieser Methode vor allem unter den Händen von Hilbert und seinen Schülern erzielten Ergebnisse, nämlich die allgemeine Klassenkörpertheorie und das allgemeine Reziprozitätsgesetz, von ganz anderer Größenordnung als die paar Fortschritte, die Hensel bisher mit seiner Methode hatte erzielen können. Auch war zwar die Steinitzsche Arbeit schon Allgemeingut geworden, aber die auf ihrem Boden mögliche Fundamentierung der p-adik durch die Kürschák-Ostrowskische Bewertungstheorie erst im Entstehen begriffen. Selbst als die Erfolge der p-adik bei den quadratischen Formen durch meine Erstlingsarbeiten bekannt wurden und ich weitere Erfolge bei der Behandlung der expliziten Reziprozitätsformeln in algebraischen Zahlkörpern erzielen konnte, genügte das immer noch nicht, um der Henselschen Begründungsart einen zum mindesten gleichberechtigten Platz neben der Dedekindschen zu sichern. Ich entsinne mich an zahlreiche Gespräche, die ich in den Jahren 1922—1925 mit Artin über den Wert der p-adik führte. Artin war Feuer und Flamme für die Dedekindsche Idealtheorie, in der ihn die größere Eleganz und Einfachheit bestach, und hatte für die p-adik dasselbe mitleidige Lächeln wie seinerzeit meine Göttinger Lehrer. Neben dem Hinweis auf die bisher erzielten Erfolge führte ich vor allem auch den folgenden Gesichtspunkt für die p-adik ins Feld. Da man es in der höheren Zahlentheorie fast durchweg mit den Primdivisoren und ihren Potenzen als multiplikativen Bausteinen der Körperzahlen und als Kongruenzmoduln zu tun hat, dagegen nur selten noch mit den ihnen zugeordneten Vielfachenmengen, den Idealen, erschien es mir vernünftig und didaktisch besser, auch bei der Begründung zunächst diese Bausteine, die Primdivisoren, zu konstruieren, anstatt diese erst ganz am Schluß der Grundlegung aus den an die Spitze gestellten Idealen herauszupräparieren; denn bei diesem letzteren Gang hat man es während der ganzen Einführung mit einem nicht explizit konstruierten, sondern durch formale Eigenschaften definierten Begriff zu tun, und der Lernende vermag sich zunächst gar keine Vorstellung über den Umfang dieses Idealbegriffs zu machen. Aber auch für diesen Gesichtspunkt zeigte Artin damals wenig Sinn. Erst die späteren großen Erfolge der p-adik in der Theorie der Algebren und Klassenkörper vermochten es, ihn für die Henselsche Methode zu gewinnen, ihn zur vollen Anerkennung ihres Wertes zu bringen und gar eigene Arbeiten von ihm zur Begründung der p-adik (Bewertungen algebraischer Zahlkörper) herbeizuführen.

Ich habe es immer als ein großes Glück empfunden, daß ich durch eigene und von mir angeregte Arbeiten dazu beitragen durfte, dem Lebenswerk meines verehrten Lehrers Hensel die ihm gebührende Anerkennung zu verschaffen. Er selbst hat wohl gefühlt, wie wenig Geltung seine große Neuschöpfung, auf die er mit Recht stolz war, sich noch in den zwanziger Jahren erworben hatte, obwohl er sich nie darüber geäußert hat. Später hat er dann mit größter Freude und regster Anteilnahme an dem Aufstieg teilgenommen. Wenn er auch als Siebziger und Fünfundsiebziger das Neue nicht mehr in allen Einzelheiten verfolgen und gar selbst daran mitarbeiten konnte, so hat er doch die beherrschenden Gedanken, die auf seine eigenen aufbauten, voll erfaßt und gewürdigt, ganz anders als der etwa gleichaltrige Hilbert.

Als ich mit diesem Anfang der dreißiger Jahre ein Gespräch über die moderne Entwicklung der Klassenkörpertheorie herbeiführte, bewies er, daß er es sehr ernst genommen hatte mit seiner oft gepriesenen „Kunst des Vergessens" — um den Geist frei für Neues zu machen. Er ließ sich von mir über die von ihm selbst entwickelten Hauptsätze der Klassenkörpertheorie orientieren, hörte dabei interessiert und mit vielen verständigen Zwischenfragen zu, und sagte schließlich: „Ja, das ist ja alles wirklich janz wunderschön, wer hat denn das äjentlich jemacht?" So vollständig hatte er eine seiner eigenen Großtaten vergessen. Zu einer anschließenden Schilderung alles dessen, was inzwischen dazu gekommen war, ließ er es dann nicht mehr kommen. Zweifellos ist diese so konsequent durchgeführte Kunst des Vergessens eine der wesentlichen Voraussetzungen für Hilberts Großtaten auf allen mathematischen Gebieten gewesen. Hensel selbst wäre der letzte gewesen, der nicht neidlos dem überragenden Genius Hilberts aufrichtige Bewunderung und Verehrung gezollt hätte.

Auch was die ganze Persönlichkeit und Lebenshaltung betrifft, gibt es wohl keinen größeren Unterschied als zwischen diesen beiden Gelehrten, deren Leben sich fast über den gleichen Zeitraum erstreckt hat. Es gibt zahlreiche Anekdoten über Hilbert, aus denen dessen ganze Eigenart vielleicht beredter spricht als aus einer ernsteren Persönlichkeitsschilderung. Über Hensel gibt es keine solchen, wohl aber steckte er selbst voll von reizenden Geschichtchen über die meisten Gelehrten und Menschen von Format, mit denen er in Berührung gekommen war. Er erzählte sie oft und gerne, aber immer mit der größten Liebenswürdigkeit. Niemals habe ich ihn ein boshaftes Wort über andere aussprechen hören. Das Höchste, zu dem er sich einmal verstieg, war die Äußerung: „Ja, der Kollege N. ist ein etwas schwieriger Mensch", oder: „Ich kenne ihn noch nicht so genau".

Jeder, der den Gelehrten Hensel aus seinen Schriften gekannt hat, vor allem aber jeder, der das Glück hatte, mit seiner liebenswerten Persönlichkeit bekannt zu werden, wird diesem großen Manne, der die zahlentheoretische Wissenschaft so reich beschenkt hat, aus vollem Herzen allezeit ein ehrendes Andenken bewahren.

Schriftenverzeichnis.

A. Bücher, Beiträge zu Sammelwerken.

1. Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale. Gemeinsam mit G. Landsberg. Leipzig, B. G. Teubner, 1902.
2. Theorie der algebraischen Zahlen, Band I. Leipzig, B. G. Teubner, 1908.
3. Zahlentheorie. Berlin/Leipzig, G. J. Göschen, 1913.
4. Arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen. Encykl. d. math. Wiss. II. C. **5** (1921) 533—650.

B. Herausgaben.

1. L. Kronecker, Werke, Band I—V. Leipzig, B. G. Teubner, 1895, 1897, 1899, 1929, 1930.
2. L. Kronecker, Vorlesungen über Zahlentheorie, Band I. Leipzig, B. G. Teubner, 1901.
3. L. Kronecker, Vorlesungen über die Theorie der Determinanten, Band 1. Leipzig, B. G. Teubner, 1903.

C. Abhandlungen.

1. Arithmetische Untersuchungen über Diskriminanten und ihre außerwesentlichen Teiler. Diss. Berlin, 1884.
2. Über die Gattungen, welche durch Composition aus zwei anderen Gattungen entstehen. J. f. Math. **105** (1889) 329—344.
3. Über die Darstellung der Determinante eines Systems, welches aus zwei anderen componirt ist. Acta math. **14** (1891) 317—319.
4. Zur Theorie der linearen Formen. J. f. Math. **107** (1891) 241—245.
5. Anwendung der Theorie der Modulsysteme auf ein Problem der Optik. J. f. Math. **108** (1891) 140—143.
6. Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen und der algebraischen Integrale, I J. f. Math. **109** (1891) 140—143.

7. Über die Gleichungen, mit deren Hülfe man die säcularen Störungen der Planeten bestimmt. J. f. Math. **110** (1892) 180—183.

8. Über den Fundamentalsatz der Theorie der algebraischen Functionen einer Variabeln. Jahresber. Deutsche Math.-Ver. **1** (1892) 56—59.

9. Über die Darstellung der ganzen algebraischen Functionen einer Variabeln durch ein Fundamentalsystem. J. f. Math. **111** (1894) 139—155.

10. Untersuchung der Fundamentalgleichung einer Gattung für eine reelle Primzahl als Modul und Bestimmung der Teiler ihrer Discriminante. J. f. Math. **113** (1894) 61—83.

11. Arithmetische Untersuchungen über die gemeinsamen außerwesentlichen Discriminantenteiler einer Gattung. J. f. Math. **113** (1894) 128—160.

12. Über die Klassification der nichthomogenen quadratischen Formen und der Oberflächen zweiter Ordnung. J. f. Math. **113** (1894) 303—317.

13. Bemerkung zu der Abhandlung „On the theory of Riemann's integrals" by H. F. Baker, Bd. 45 der Mathematischen Annalen. Math. Ann. **45** (1894) 598—599.

14. Über die Ordnung der Verzweigungspunkte einer Riemannschen Fläche. Sitz. Ber. Preuß. Akad. Wiss. Berlin 1895, 933—943.

15. Über die Verzweigung der drei- und vierblättrigen Riemannschen Flächen. Sitz. Ber. Preuß. Akad. Wiss. Berlin 1895, 1103—1114.

16. Über einen neuen Fundamentalsatz in der Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln. J. f. Math. **115** (1895) 254—294.

17. Über den größten gemeinsamen Teiler aller Zahlen, welche durch eine Funktion von n Veränderlichen darstellbar sind. J. f. Math. **116** (1896) 350—356.

18. Über die Darstellung der Integrale erster Gattung durch ein Fundamentalsystem. J. f. Math. **117** (1896) 29—41.

19. Über die Reduction algebraischer Systeme auf die canonische Form. J. f. Math. **117** (1896) 129—139.

20. Über die Fundamentalteiler algebraischer Gattungsbereiche. J. f. Math. **117** (1897) 333—345.

21. Über die Fundamentalteiler eines Gattungsbereichs in Bezug auf zwei verschiedene Rationalitätsbereiche. J. f. Math. **118** (1897) 173—185.

22. Über die Zurückführung der Divisorensysteme auf eine reducirte Form. J. f. Math. **118** (1897) 234—250.

23. Über die Elementarteiler zweier Gattungen, von denen die eine unter der anderen enthalten ist. J. f. Math. **117** (1897) 346—355.

24. Über die Bestimmung der Discriminante eines algebraischen Körpers. Gött. Nachr. 1897, 247—253.

25. Über die Fundamentalgleichung und die außerwesentlichen Discriminantenteiler eines algebraischen Körpers. Gött. Nachr. 1897, 254—260.

26. Über die Zurückführung der Divisorensysteme auf ihre reducirte Form (2. Abhandlung). J. f. Math. **119** (1898) 114—130.

27. Über die elementaren arithmetischen Eigenschaften der reinen Modulsysteme zweiter Stufe. J. f. Math. **119** (1898) 175—185.

28. Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen. Jahresber. Deutsche Math.-Ver. **6** (1899) 83—88.

29. Über die Theorie der algebraischen Functionen zweier Variabeln. Jahresber. Deutsche Math.-Ver. **7** (1899) 58—61.

30. Über diejenigen algebraischen Körper, welche aus zwei anderen componirt sind. J. f. Math. **120** (1899) 99—108.

31. Über eine neue Theorie der algebraischen Funktionen zweier Variabeln. Jahresber. Deutsche Math.-Ver. **8** (1900) 221—231.

32. Über eine neue Theorie der algebraischen Funktionen zweier Variabeln. Acta math. **23** (1900) 339—416.

33. Zur Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen und der Abelschen Integrale. Math. Ann. **54** (1901) 437—497.

34. Über die Entwicklung der algebraischen Zahlen in Potenzreihen. Math. Ann. **55** (1901) 301—336.

35. Über einige Verallgemeinerungen des Fermatschen und des Wilsonschen Satzes. Arch. d. Math. u. Phys. (3) **1** (1901) 319—322.

36. Über die arithmetischen Eigenschaften der Faktoriellen. Arch. d. Math. u. Phys. (3) **2** (1902) 293 bis 294.

37. Über analytische Funktionen und algebraische Zahlen. Berl. Math. Ges. Ber. **1** (1902) 29—32.

38. Bemerkungen zur Determinantentheorie. J. f. Math. **126** (1903) 73—82.

39. Zur Theorie der Systeme. J. f. Math. **126** (1903) 165—170.

40. Neue Grundlagen der Arithmetik. J. f. Math. **127** (1904) 51—84.

41. Theorie der Körper von Matrizen. J. f. Math. **127** (1904) 116—166.

42. Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen. J. f. Math. **128** (1904) 1—32.

43. Über die zu einem algebraischen Körper gehörigen Invarianten. J. f. Math. **129** (1905) 68—85.

44. Sur la relation $(D/p)=(-1)^{n-h}$ et la loi de réciprocité. Gemeinsam mit D. Mirimanoff. J. f. Math. **129** (1905) 86—87.

45. Über die arithmetischen Eigenschaften der algebraischen und transzendenten Zahlen. Jahresber. Deutsche Math.-Ver. **14** (1905) 545—558.

46. Über die arithmetischen Eigenschaften der Zahlen. Jahresber. Deutsche Math.-Ver. **16** (1907) 299 bis 319, 388—393, 473—496.

47. Über die zu einer algebraischen Gleichung gehörigen Auflösungskörper. J. f. Math. **136** (1909) 183—209.

48. Festschrift zur Feier des 100. Geburtstages Eduard Kummers. Mit Briefen an seine Mutter und an Leopold Kronecker. Herausgegeben vom Vorstand der Berliner Mathematischen Gesellschaft. Abh. z. Geschichte d. math. Wiss. **29** (1910), Leipzig/Berlin, B. G. Teubner.

49. Ernst Eduard Kummer und der große Fermatsche Satz. Akademische Festrede zu Kaisers Geburtstag. Marburg, N. G. Elwertsche Verlagsbuchh., 1910.

50. Georg Landsberg gestorben. Frankf. Zeitung **261** (1912).

51. Über die Grundlagen einer neuen Theorie der quadratischen Zahlkörper. J. f. Math. **144** (1914) 57—70.

52. Die Exponentialdarstellung der Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers für den Bereich eines Primdivisors. H. A. Schwarz-Festschr. 61—75, Berlin 1914.

53. Untersuchung der Zahlen eines algebraischen Körpers für den Bereich eines beliebigen Primdivisors. J. f. Math. **145** (1915) 92—113.

54. Die multiplikative Darstellung der algebraischen Zahlen für den Bereich eines beliebigen Primteilers. J. f. Math. **146** (1916) 189—215.

55. Untersuchung der Zahlen eines algebraischen Körpers für eine beliebige Primteilerpotenz als Modul. J. f. Math. **147** (1917) 1—15.

56. Die Verallgemeinerung des Legendreschen Symboles für allgemeine algebraische Körper. J. f. Math. **147** (1917) 233—248.

57. Eine neue Theorie der algebraischen Zahlen. Math. Zeitschr. **2** (1918) 433—452.

58. Neue Begründung der arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen. Math. Zeitschr. **5** (1919) 118—131.

59. Über die Invarianten algebraischer Körper. J. f. Math. **149** (1919) 125—146.

60. Über die Zerlegung der Primteiler in relativ zyklischen Körpern, nebst einer Anwendung auf die Kummerschen Körper. J. f. Math. **151** (1920) 112—120.

61. Die Zerlegung der Primteiler eines beliebigen Zahlkörpers in einem auflösbaren Oberkörper. J. f. Math. **151** (1921) 200—209.

62. Zur multiplikativen Darstellung der algebraischen Zahlen für den Bereich eines Primteilers. J. f. Math. **151** (1921) 210—212.

63. Über die Normenreste und Nichtreste in den allgemeinsten relativ Abelschen Zahlkörpern. Math. Ann. **85** (1922) 1—10.

64. Über die Normenreste und Nichtreste eines relativ zyklischen Körpers vom Primzahlgrad l nach einem Primteiler $\mathfrak{l}$ von l. Gemeinsam mit H. Hasse. Math. Ann. **90** (1923) 262—278.

65. Über ein neues Normenrestsymbol und seine Anwendung auf die Theorie der Normenreste in allgemeinen algebraischen Körpern. J. f. Math. **152** (1923) 225—234.

66. Arithmetische Eigenschaften der Polynomialkoeffizienten. J. f. Math. **153** (1924) 8—11.

67. Über Potenzreihen von Matrizen. J. f. Math. **155** (1926) 107—110.

68. Aus der Geschichte des Journals für die reine und angewandte Mathematik. J. f. Math. **157** (1926) 1—2.

69. Paul Bachmann und sein Lebenswerk. Jahresber. Deutsche Math.-Ver. **36** (1927) 31—73.

70. Über eindeutige Zerlegung in Primelemente. J. f. Math. **158** (1927) 195—198.

71. Die Exponentialdarstellung der rationalen Zahlen für den Bereich einer Primzahl. Ges. Bef. ges. Naturw. Marburg **62** (1927) 431—434.

72. Über den Zusammenhang zwischen den Systemen und ihren Determinanten. J. f. Math. **159** (1928) 246—254.

73. Über Systeme in einfachen Körpern. J. f. Math. **160** (1929) 131—142.

74. Arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen von zwei Variablen. J. f. Math. **165** (1931) 257—264.

75. Arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen von zwei Variablen, II. J. f. Math. **168** (1932) 117—128.

76. Über die Ausführbarkeit der elementaren Rechenoperationen in Ringen von Systemen. J. f. Math. **169** (1933) 67—70.

77. Über die vollständige arithmetische Auflösung der algebraischen Gleichungen. Berl. Math. Ges. Ber. **32** (1933) 3—16.

78. Über den Zusammenhang zwischen den Kongruenzgruppen eines algebraischen Körpers für alle Potenzen eines Primteilers als Modul. J. f. Math. **177** (1937) 82—93.

Eingegangen 20. Dezember 1948.

Invariante Kennzeichnung galoisscher Körper mit vorgegebener Galoisgruppe[1]).

Dem Andenken an Emmy Noether gewidmet, die mir Lehrmeisterin war in der begrifflichen Durchdringung und invarianten Gestaltung algebraischer Sachverhalte.

Von *Helmut Hasse* in Berlin.

Inhalt.

Einleitung 14
§ 1. Aufgabenstellung, anknüpfend an den abelschen Fall 14
§ 2. Umgestaltung der Erzeugung im abelschen Fall 17
§ 3. Überleitung zur Verallgemeinerung 19
§ 4. Lösungsansatz im allgemeinen Fall 19
§ 5. Hauptergebnis 22

I. Darstellungstheoretische Grundlagen 23
§ 6. Die Orthogonalitätsrelationen für die Charaktere und Stellenspalten der absolut-irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{G}$ 23
§ 7. Die Charakteralgebra X von $\mathfrak{G}$ über Ω 25
§ 8. Das Zentrum Z des Gruppenrings G von $\mathfrak{G}$ über Ω 25
§ 9. Die Kroneckersche Multiplikation der irreduziblen Darstellungen 27
§ 10. Die Kommutativ- und Assoziativrelationen für das Transformatorensystem 28
§ 11. Direkte Zerlegung des Gruppenrings G von $\mathfrak{G}$ über Ω in einfache Rechtsideale 30

II. Invariante Erzeugung galoisscher Algebren 33
§ 12. Die Normalbasen und die Faktorbasen einer galoisschen Algebra 33
§ 13. Zulässige Substitutionen für eine Faktorbasis 36
§ 14. Das Multiplikationsschema einer Faktorbasis 37
§ 15. Die Kommutativ- und Assoziativrelationen für das Faktorensystem 38
§ 16. Die Regularitätsbedingung für das Faktorensystem 39
§ 17. Erzeugung durch das Faktorensystem 42

Einleitung.

§ 1. Aufgabenstellung, anknüpfend an den abelschen Fall.

Es ist bekannt, daß sich die algebraischen Gleichungen mit abelscher Galoisgruppe auf reine Gleichungen zurückführen lassen. In der klassischen Algebra geschieht das nach Adjunktion der nötigen Einheitswurzeln durch Bildung der Lagrangeschen Resolventen. In der modernen Algebra stellt man statt einer algebraischen Gleichung den durch ihre

---

[1]) Eine vorläufige Mitteilung über die Ergebnisse dieser Arbeit erscheint unter dem gleichen Titel im Arch. d. Math.

Wurzeln erzeugten Normalkörper K über einem die Gleichungskoeffizienten und die nötigen Einheitswurzeln enthaltenden Grundkörper Ω als invarianten Begriff an die Spitze. Die Zurückführung auf reine Gleichungen stellt sich dann als die Theorie der sogenannten Kummer-Erzeugung von K/Ω folgendermaßen dar[2]).

Es sei K/Ω ein Normalkörper endlichen Grades mit abelscher Galoisgruppe $\mathfrak{G}$, und es bezeichne

$$g \text{ die Ordnung von } \mathfrak{G}, \quad n \text{ den Exponenten von } \mathfrak{G}.$$

Letzterer ist erklärt als das kleinste gemeinsame Vielfache aller Elementordnungen von $\mathfrak{G}$. Es ist n ein Teiler von g; umgekehrt ist jeder Primteiler von g auch in n enthalten.

Die Betrachtung sei auf den Fall beschränkt, daß folgende Voraussetzung erfüllt ist:

A. Die Charakteristik von Ω ist kein Teiler von g (oder, was dasselbe, von n).

Ferner sei von vornherein vorausgesetzt:

B. In Ω sind die n-ten Einheitswurzeln enthalten.

Unter diesen Voraussetzungen besitzt K/Ω eine Erzeugung der Form

$$K = \Omega\left(\sqrt[n]{W}\right), \tag{1, 1}$$

wo W eine multiplikative Gruppe in Ω (Untergruppe der Multiplikationsgruppe $\Omega^\times$) mit den folgenden drei Eigenschaften ist:

(a) W enthält $\Omega^{\times n}$ als Untergruppe von endlichem Index.

(b) Die Faktorgruppe $W/\Omega^{\times n}$ ist zu $\mathfrak{G}$ isomorph.

(c) W ist die Gesamtheit der Elemente $w \neq 0$ aus Ω, für die $\sqrt[n]{w} = \omega$ in K liegt.

Führt man eine Basis $S_1, \ldots, S_r$ von $\mathfrak{G}$ mit den Ordnungen $n_1, \ldots, n_r$, also mit den erzeugenden Relationen

$$S_i^{n_i} = 1 \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

ein, wobei

$$n_1 \cdots n_r = g, \qquad [n_1, \ldots, n_r] = n$$

ist, so liefern gemäß (b) isomorph zugeordnete Basisvertreter $w_1, \ldots, w_r$ von $W/\Omega^{\times n}$ eine Erzeugung von K/Ω der Gestalt

$$K = \Omega\left(\sqrt[n]{w_1}, \ldots, \sqrt[n]{w_r}\right), \tag{1, 2}$$

also durch endlich viele unabhängige n-te Radikale. Vermöge der Relationen

$$w_i^{n_i} = c_i^n, \text{ also } w_i = c_i^{\frac{n}{n_i}}, \text{ mit } c_i \text{ aus } \Omega \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

kann diese Erzeugung auch in die Gestalt

$$K = \Omega\left(\sqrt[n_1]{c_1}, \ldots, \sqrt[n_r]{c_r}\right) \tag{1, 3}$$

---

[2]) Zu den auf abelsche Relativkörper bezüglichen Ausführungen dieser Einleitung siehe die systematische Darstellung in meinen vorangehenden Arbeiten:

1. Invariante Kennzeichnung relativ-abelscher Zahlkörper mit vorgegebener Galoisgruppe über einem Teilkörper des Grundkörpers, Abh. Deutsche Akad. d. Wiss. Berlin, Math.-naturw. Kl., 1947, Nr. 8, 1–56, Berlin 1949. — Im folgenden zitiert mit I. K. A.; siehe dort insbesondere § 4.

2. Existenz und Mannigfaltigkeit abelscher Algebren mit vorgegebener Galoisgruppe über einem Teilkörper des Grundkörpers, I, II, III, Math. Nachr. **1** (1948), 40–61, 213–217, 277–283. — Im folgenden zitiert mit E. M. I, II, III; siehe insbesondere I, § 2 und II, **2**.

3. Die Multiplikationsgruppe der abelschen Körper mit fester Galoisgruppe; erscheint demnächst in den Abh. Math. Sem. Hamburg. — Siehe dort insbesondere **4–6**.

mit endlich vielen unabhängigen irreduziblen Radikalen gebracht werden. Dadurch wird dann jede K/Ω erzeugende Gleichung auf die endlich vielen reinen irreduziblen Gleichungen

$$\omega_i^{n_i} = c_i \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

zurückgeführt.

Vom modernen Standpunkt ist die allgemeine Form (1, 1) der Kummer-Erzeugung von K/Ω durch eine Gruppe W in Ω mit der Eigenschaft (a) den endlichen Gestalten (1, 2), (1, 3) vorzuziehen[3]). Denn während (1, 2), (1, 3) auf eine Basis der Galoisgruppe $\mathfrak{G}$ von K/Ω bezogen sind, ist (1, 1) nicht nur von einer solchen Beziehung frei, sondern die allein eingehende Faktorgruppe $W/\Omega^{\times n}$ ist überdies dem betrachteten Relativkörper K/Ω nach (c) invariant zugeordnet. Die Kummer-Erzeugung (1, 1) liefert somit mehr als die von der klassischen Algebra geforderte Zurückführung einer erzeugenden Gleichung von K/Ω auf reine Gleichungen; sie liefert zudem eine Kennzeichnung des Relativkörpers K/Ω durch eine Invariante $W/\Omega^{\times n}$ im Grundkörper Ω.

Geht man umgekehrt von irgendeiner Gruppe W in Ω mit der Eigenschaft (a) aus, also anders gesagt von irgendeiner endlichen Untergruppe $W/\Omega^{\times n}$ der sogenannten n-Klassengruppe $\Omega^{\times}/\Omega^{\times n}$ von Ω, so wird durch (1, 1) ein Normalkörper K/Ω endlichen Grades mit abelscher Galoisgruppe $\mathfrak{G}$ definiert, für den die Beziehungen (b) und (c) erfüllt sind.

Hiernach ist die Gesamtheit der abelschen Relativkörper K/Ω *mit Gruppen* $\mathfrak{G}$ *vom Exponenten* n *invariant gekennzeichnet durch die Gesamtheit der endlichen Untergruppen* $W/\Omega^{\times n}$ *der* n*-Klassengruppe von* Ω, *und zwar derart, daß dabei* $K = \Omega\left(\sqrt[n]{W}\right)$ *und* $\mathfrak{G} \cong W/\Omega^{\times n}$ *gilt.*

Diese Tatsache ist in der algebraischen Zahlentheorie ein wichtiges Hilfsmittel zur Herleitung der invarianten Kennzeichnung der relativ-abelschen Zahlkörper als Klassenkörper zu Divisorenklassengruppen im Grundkörper. Der Vergleich der beiden Kennzeichnungen, als Kummersche Körper und als Klassenkörper, liefert dort das allgemeine Reziprozitätsgesetz der Potenzreste. Als erster Schritt zu einer Verallgemeinerung der Klassenkörpertheorie und des Reziprozitätsgesetzes auf beliebige relativ-galoissche Zahlkörper erscheint es mir daher eine Aufgabe von grundlegender Bedeutung, *die obige invariante Kennzeichnung durch die Kummer-Erzeugung auf Relativkörper* K/Ω *mit beliebiger Galoisgruppe* $\mathfrak{G}$ *zu verallgemeinern.*

Die vorliegende Arbeit ist der Lösung dieser Aufgabe gewidmet. Soweit ich sehe, ist eine solche Lösung bisher nicht gegeben worden. Die Methode zur Lösung verdanke ich meiner mehrjährigen engen Berührung mit Emmy Noether, die im Zusammenhang mit dieser Fragestellung immer wieder auf die Bedeutung des von ihr geschaffenen Begriffs der *Galoismoduln* hinwies. Darunter versteht man nach ihr die in K enthaltenen Ω-Moduln mit der Galoisgruppe $\mathfrak{G}$ von K/Ω als Operatorenbereich.

In den folgenden beiden Paragraphen dieser Einleitung will ich den Gedankengang, der mich zur Lösung der genannten Aufgabe geführt hat, skizzieren, um dann in zwei weiteren einleitenden Paragraphen den Lösungsansatz zu entwickeln und das Hauptergebnis mitzuteilen.

---

[3]) Vergl. dazu J. K. A., §4, 6, Anm. 16. — Neben den dort erwähnten mündlichen Mitteilungen von E. Artin und Cl. Chevalley sei auch auf eine Arbeit von E. Witt verwiesen, in der diese Form der Kummer-Erzeugung eingeführt wird: Der Existenssatz für abelsche Funktionenkörper, ds. Journ. 173 (1935), 43-51.

§ 2. Umgestaltung der Erzeugung im abelschen Fall.

Es ist zunächst erforderlich, im abelschen Falle die Kummer-Erzeugung (1, 1) in eine verallgemeinerungsfähige Gestalt zu setzen, die frei von der Bezugnahme auf einen bestimmten Typus von Grundgleichungen — hier die reinen Gleichungen — ist. Denn soviel ist jedenfalls aus allen bisherigen Erkenntnissen und Ansätzen über galoissche Körper klar, daß man nicht hoffen darf, für jede endliche Gruppe oder geeignet bestimmte Gattung von endlichen Gruppen $\mathfrak{G}$ einen zugehörigen Normaltypus von galoisschen Grundgleichungen zu finden.

Die erforderliche Umgestaltung der Kummer-Erzeugung (1, 1) ergibt sich, indem man sich nicht mit der bloßen Isomorphieaussage $W/\Omega^{\times n} \cong \mathfrak{G}$ begnügt, sondern — wie es Artin in diesen und auch in anderen Zusammenhängen, z. B. bei seinem Reziprozitätsgesetz, immer wieder als systematische Forderung erhoben hat — nach einer formelmäßigen Darstellung dieser Isomorphie, also nach einem bestimmten Isomorphismus zwischen $W/\Omega^{\times n}$ und $\mathfrak{G}$ fragt. Es zeigt sich, daß man dazu sowohl $W/\Omega^{\times n}$ als auch $\mathfrak{G}$ zuvor durch andere, mit ihnen in leicht übersehbarer Weise isomorph zusammenhängende Bildungen ersetzen muß.

Einerseits muß man die *Radikandengruppe* $W/\Omega^{\times n}$ durch die zugehörige, zu ihr isomorphe *Radikalgruppe* $\mathrm{W}/\Omega^{\times}$ ersetzen, nämlich die Gesamtheit der Elemente $\omega \neq 0$ aus K, für die $\omega^n = w$ in Ω liegt. Durch $\omega \to w$ wird dabei ein bestimmter Isomorphismus von $\mathrm{W}/\Omega^{\times}$ auf $W/\Omega^{\times n}$ gegeben.

Andererseits muß man die abelsche Galoisgruppe $\mathfrak{G}$ durch die zugehörige, zu ihr isomorphe Charaktergruppe X ersetzen. Eine invariante, von der Bezugnahme auf Basen von $\mathfrak{G}$ und X freie Darstellung dieser Isomorphie gibt es bekanntlich nicht; man kann vielmehr die gegenseitig eindeutige Beziehung zwischen $\mathfrak{G}$ und X in invarianter Weise nur durch das folgende Dualitätsprinzip zum Ausdruck bringen. In der Matrix

$$\text{(2, 1)} \qquad \mathrm{A} = \chi(S) \qquad \left\{\begin{matrix}\text{Zeilenindex } S \text{ in } \mathfrak{G} \\ \text{Spaltenindex } \chi \text{ in } \mathrm{X}\end{matrix}\right\}$$

der g^2 Charakterwerte stellen nicht nur die Spalten die Werte der g Charaktere von $\mathfrak{G}$, sondern auch die Zeilen die Werte der g Charaktere von X dar.

Eine Darstellung der Isomorphie zwischen $W/\Omega^{\times n}$ und $\mathfrak{G}$ erhält man dann als einen bestimmten Isomorphismus zwischen $\mathrm{W}/\Omega^{\times}$ und X in folgender Weise. Jedem Charakter χ von $\mathfrak{G}$ entspricht umkehrbar eindeutig eine Radikalklasse $\omega_\chi\, \Omega^{\times}$ von K/Ω derart, daß bei der Anwendung der Automorphismen S aus $\mathfrak{G}$ gilt:

$$\text{(2, 2)} \qquad \omega_\chi^S = \chi(S)\, \omega_\chi .$$

Die Elemente ω_χ aus K bilden dabei ein volles Vertretersystem für die Klassen von $\mathrm{W}/\Omega^{\times}$. Sie sind linear-unabhängig über Ω, bilden also eine Basis von K/Ω.

Eine solche Basis ω_χ habe ich im Hinblick auf das Verhalten (2, 2) bei den Automorphismen S von K/Ω eine *Faktorbasis* von K/Ω genannt. Die Faktorbasen ω_χ von K/Ω sind gerade die Lagrangeschen Resolventen der klassischen Algebra. Sie hängen nämlich mit den *Normalbasen* θ^S von K/Ω umkehrbar eindeutig durch die linearen Gleichungssysteme

$$\text{(2, 3)} \qquad \theta^S = \sum_\chi \chi(S)\, \omega_\chi, \quad \omega_\chi = \frac{1}{g} \sum_S \chi(S^{-1})\, \theta^S$$

zusammen, deren Matrix die in (2, 1) definierte Matrix A der Charakterwerte bzw. deren Reziproke ist.

Die Ersetzung der Radikandengruppe $W/\Omega^{\times n}$ aus Ω durch die Radikalgruppe $W/\Omega^{\times}$ aus K liegt zunächst nicht im Sinne der gestellten Aufgabe, K/Ω invariant in Ω zu kennzeichnen. Man kommt jedoch zu einer im Grundkörper Ω gelegenen Invariante zurück, wenn man das *Multiplikationsschema* einer Faktorbasis ω_χ von K/Ω ins Auge faßt. Dieses hat nach (2, 2) die einfache Gestalt

$$\omega_\chi\, \omega_\psi = \omega_{\chi\psi}\, c_{\chi,\psi} \tag{2, 4}$$

mit einem *Faktorensystem* $c_{\chi,\psi} \neq 0$ aus Ω, das den *Kommutativ- und Assoziativrelationen*

$$c_{\psi,\chi} = c_{\chi,\psi}, \quad c_{\varphi\chi,\psi}\, c_{\varphi,\chi} = c_{\varphi,\chi\psi}\, c_{\chi,\psi} \tag{2, 5}$$

genügt — kurz: *abelsch* ist — und bei den für eine Faktorbasis allein zulässigen Substitutionen

$$\omega_\chi \to \omega_\chi\, a_\chi \text{ mit willkürlichen } a_\chi \neq 0 \text{ aus } \Omega \tag{2, 6}$$

gemäß

$$c_{\chi,\psi} \to c_{\chi,\psi} \frac{a_\chi\, a_\psi}{a_{\chi\psi}} \tag{2, 7}$$

in *assoziierte* Systeme übergeht. Die durch diese Substitutionen gelieferte *Klasse* $\mathfrak{c}$ *assoziierter abelscher Faktorensysteme zu* X ist dann eine wieder in Ω gelegene Invariante von K/Ω. Sie reicht zur Kennzeichnung von K/Ω aus, da die Elemente $c_{\chi,\psi}$ irgendeines Vertreters aus $\mathfrak{c}$ nach (2, 4) die Multiplikationskonstanten einer Basis ω_χ von K/Ω sind.

Bei dieser Beschreibung von K/Ω tritt an die Stelle der Kummer-Erzeugung (1, 1) das Gleichungssystem (2, 4), an die Stelle der reinen Grundgleichungen also das Multiplikationsschema einer Faktorbasis, das als solches den Methoden der linearen Algebra zugänglich ist. Gerade in dem letzteren Umstand besteht der Vorteil und die Verallgemeinerungsfähigkeit dieser neuen Form der Kummer-Erzeugung.

Geht man umgekehrt von irgendeiner abelschen Faktorensystemklasse $\mathfrak{c}$ zu X in Ω aus und definiert K/Ω formal durch das Multiplikationsschema (2, 4) mit einem Vertreter $c_{\chi,\psi}$ aus $\mathfrak{c}$, so erhält man dann und nur dann einen abelschen Körper K/Ω mit der Gruppe $\mathfrak{G}$, wenn $\mathfrak{c}$ im Sinne von I. K. A., § 4, 3, 4 *irreduzibel* ist, sonst nur eine abelsche Algebra K/Ω mit der Gruppe $\mathfrak{G}$ im dortigen Sinne, deren Kernkörper K_0/Ω dann eine echte Untergruppe $\mathfrak{G}_0$ von $\mathfrak{G}$ als Galoisgruppe hat. Allgemeiner als zuvor hat auch jede abelsche Algebra K/Ω mit der Gruppe $\mathfrak{G}$ eine Erzeugung (2, 4) durch eine abelsche Faktorensystemklasse $\mathfrak{c}$ zu X in Ω[4]). Bei dieser neuen Form der Kummer-Erzeugung wird mithin die ursprüngliche Frage nach der invarianten Kennzeichnung der abelschen Körper K/Ω mit der Gruppe $\mathfrak{G}$ insofern gelockert, als gleich die Gesamtheit aller abelschen Algebren K/Ω mit der Gruppe $\mathfrak{G}$ erfaßt wird. Nach E. M. I, §§1, 2 und II, 2 läuft das auf die gleichzeitige Betrachtung aller derjenigen abelschen Körper K_0/Ω hinaus, deren Galoisgruppen $\mathfrak{G}_0$ irgendwelche Untergruppen der gegebenen Gruppe $\mathfrak{G}$ sind.

Hiernach ist die Gesamtheit der abelschen Algebren K/Ω *mit vorgegebener Galoisgruppe* $\mathfrak{G}$ *— oder, was auf dasselbe hinausläuft, die Gesamtheit der abelschen Körper* K_0/Ω *mit irgendwelchen Untergruppen* $\mathfrak{G}_0$ *von* $\mathfrak{G}$ *als Galoisgruppen — umkehrbar eindeutig und invariant gekennzeichnet durch die Gesamtheit der abelschen Faktorensystemklassen* $\mathfrak{c}$ *in* Ω *zur Charaktergruppe* X *von* $\mathfrak{G}$, *und zwar derart, daß* K_0/Ω *der Kernkörper der durch das Multiplikationsschema* (2, 4) *gelieferten abelschen Algebra* K/Ω *mit der Gruppe* $\mathfrak{G}$ *ist.*

---

[4]) Hierbei ist folgende in E. M. I, § 2, 2 nicht ausdrücklich erwähnte Tatsache zu beachten: Die Basiselelemente ω_χ sind nicht nur $\neq 0$, sondern sie sind sogar *reguläre* Elemente aus K; denn nach (2, 2) sind die $\omega_\chi^n = w_\chi$ Elemente aus Ω, und diese sind $\neq 0$, weil K als abelsche Algebra definitionsgemäß halbeinfach ist.

§ 3. Überleitung zur Verallgemeinerung.

Für die Verallgemeinerung auf den Fall einer beliebigen Galoisgruppe $\mathfrak{G}$ wird man sich fragen, wie man, ausgehend von einer in beliebigen galoisschen Körpern (oder Algebren) K/Ω vorhandenen Begriffsbildung, zu der Erzeugung (2, 4) gelangen kann. Unter den vorstehend vorkommenden Begriffsbildungen tritt als hierzu geeignet der Begriff der *Normalbasis* von K/Ω hervor, von dem ja auch die klassische Algebra bei der Konstruktion der Lagrangeschen Resolventen ausgeht.

Die Existenz einer Normalbasis von K/Ω ist gleichbedeutend mit der Tatsache, daß K/Ω als Galoismodul isomorph ist zum Gruppenring G von $\mathfrak{G}$ über Ω als G-Rechtsideal[5]). Die Normalbasen θ^S von K/Ω entsprechen umkehrbar eindeutig den Isomorphismen

$$(3, 1) \qquad S \to \theta^S \qquad \text{(gegeben bereits durch } 1 \to \theta)$$

des Gruppenrings G auf den Galoismodul K/Ω, nämlich als die Bilder der aus den Elementen S aus $\mathfrak{G}$ bestehenden Ω-Basis von G bei diesen Isomorphismen.

Die linearen Gleichungssysteme (2, 3), durch die im abelschen Falle die Normalbasen mit den Faktorbasen zusammenhängen, lassen sich bei dieser Auffassung folgendermaßen deuten.

Für eine abelsche Gruppe $\mathfrak{G}$ ist der Gruppenring G, zufolge der Charakteristik- und Einheitswurzelvoraussetzungen § 1, A, B über Ω, vollständig reduzibel in einfache Bestandteile vom Range 1, also direkte Summe von g zu Ω isomorphen Körpern, und zwar sind die Komponenten der Basiselemente S von G bei dieser eindeutig bestimmten direkten Zerlegung den Charakterwerten $\chi(S)$ isomorph zugeordnet. Es gilt also

$$(3, 2) \qquad G = \sum_{\chi} \Omega\, e_\chi$$

mit den Charakteren χ von G zugeordneten primitiven orthogonalen Idempotenten e_χ aus G, die mit den Elementen S aus $\mathfrak{G}$ durch die linearen Gleichungssysteme

$$(3, 3) \qquad S = \sum_{\chi} \chi(S)\, e_\chi, \qquad e_\chi = \frac{1}{g} \sum_{S} \chi(S^{-1})\, S$$

zusammenhängen.

Bei einem Isomorphismus (3, 1) von G auf K/Ω geht nun (3, 2) in eine eindeutig bestimmte direkte Zerlegung

$$(3, 4) \qquad K = \sum_{\chi} \Omega\, \omega_\chi$$

in einfache Galoismoduln vom Range 1 über, und (3, 3) gerade in die obigen linearen Gleichungssysteme (2, 3) für die Erzeugenden ω_χ dieser einfachen Galoismoduln. Diese Erzeugenden ω_χ bilden also eine Faktorbasis von K/Ω. Den verschiedenen Isomorphismen (3, 1) von G auf K/Ω entsprechen so gerade die verschiedenen Faktorbasen ω_χ von K/Ω.

Demnach lassen sich die Faktorbasen ω_χ einer abelschen Algebra K/Ω auch deuten als die Systeme von Vertretern $\neq 0$ (die dann auch regulär sind) aus den einfachen Galoismoduln von K/Ω.

§ 4. Lösungsansatz im allgemeinen Fall.

Es liegt nunmehr auf der Hand, wie die Verallgemeinerung auf den Fall einer galoisschen Algebra K/Ω mit beliebiger Galoisgruppe $\mathfrak{G}$ anzusetzen ist. Ich gebe hier zunächst eine kurze, einleitende Skizze dieses Ansatzes, die ich denn in den beiden Hauptabschnitten der Arbeit im einzelnen ausführen werde.

---

[5]) Siehe dazu M. Deuring, Galoissche Theorie und Darstellungstheorie, Math. Ann. **107** (1933), 140–144, oder auch M. Deuring, Algebren (Ergebn. d. Math. u. ihrer Grenzgeb. **4**, Berlin 1935), IV, § 3.

Man wird ausgehen von einer zu (3, 2) analogen Zerlegung des Gruppenrings G von $\mathfrak{G}$ über Ω in einfache Bestandteile, und zwar nicht nur von der eindeutig bestimmten gröberen Zerlegung in einfache zweiseitige Ideale, sondern von einer feineren Zerlegung in einfache Rechtsideale[6]). Unter den Charakteristik- und Einheitswurzelvoraussetzungen § 1, A, B — wobei statt B bei dem heutigen Stande der Erkenntnis eine etwas schärfere Forderung zu stellen ist (g-te statt nur n-te Einheitswurzeln in Ω)[7]) — entsprechen die einfachen zweiseitigen Ideale G_χ von G umkehrbar eindeutig den einfachen Frobeniusschen Charakteren χ von $\mathfrak{G}$, und ihre Ränge sind die Quadrate f_χ^2 der Grade f_χ der zugehörigen irreduziblen Darstellungen Γ_χ von $\mathfrak{G}$. Die G_χ sind volle Matrixalgebren der Grade f_χ über zu Ω isomorphen Körpern $\Omega\, e_\chi$, nämlich den einfachen Bestandteilen des Zentrums Z von G. Die primitiven orthogonalen Idempotente e_χ von Z hängen dabei mit der Ω-Basis von Z, die aus den Elementsummen $\mathfrak{S}$ der Klassen konjugierter Elemente von $\mathfrak{G}$ besteht, durch die zu (3, 3) analogen Gleichungen

$$(4,\,1)\qquad \mathfrak{S} = \sum_\chi \frac{h_{\mathfrak{S}}\,\chi(S)}{f_\chi}\, e_\chi, \qquad e_\chi = \frac{1}{g}\sum_{\mathfrak{S}} f_\chi\, \chi(S^{-1})\, \mathfrak{S}$$

zusammen, wo $h_{\mathfrak{S}}$ die Elementanzahl von $\mathfrak{S}$ bezeichnet und S ein Element aus $\mathfrak{S}$ bedeutet. Als volle Matrixalgebren der Grade f_χ sind die G_χ weiter direkte Summen von je f_χ zueinander isomorphen einfachen Rechtsidealen G_χ^k vom Range f_χ.

Bei einem Isomorphismus (3, 1) von G auf K/Ω entsteht aus der direkten Zerlegung von G in die einfachen Rechtsideale G_χ^k der Ränge f_χ eine zu (3, 4) analoge direkte Zerlegung von K/Ω in einfache Galoismoduln K_χ^k/Ω der Ränge f_χ, von denen die je f_χ demselben χ entsprechenden zueinander isomorph sind. Stellt man ein System von Basisspalten von je f_χ solchen zueinander isomorphen K_χ^k/Ω zu je einer f_χ-reihig-quadratischen Matrix W_χ zusammen, so bilden die $\sum_\chi f_\chi^2 = g$ Elemente dieser Matrizen W_χ zusammen eine Basis von K/Ω. Es zeigt sich dann, daß diese Basis von K/Ω die zu (2, 2) analoge Eigenschaft

$$(4,\,2)\qquad \mathrm{W}_\chi^S = A_\chi(S)\,\mathrm{W}_\chi$$

einer *Faktorbasis* von K/Ω hat, wo für jeden einfachen Charakter χ von $\mathfrak{G}$ die Matrizen $A_\chi(S)$ über Ω eine irreduzible Darstellung Γ_χ von $\mathfrak{G}$ aus der durch χ charakterisierten Darstellungsklasse sind. Die Faktorbasen W_χ von K/Ω erhält man, ausgehend von den Normalbasen θ^S von K/Ω, explizit in der zu den zweiten Gleichungen (2, 3) analogen Form

$$(4,\,3)\qquad \mathrm{W}_\chi = \frac{1}{g}\sum_S f_\chi\, A_\chi(S^{-1})\,\theta^S.$$

Man wird nunmehr das Multiplikationsschema einer Faktorbasis W_χ von K/Ω ins Auge fassen. Formal erhält man es, indem man für je zwei einfache Charaktere χ, ψ von $\mathfrak{G}$ das Kroneckersche Matrizenprodukt $\mathrm{W}_\chi \times \mathrm{W}_\psi$ bildet. Dazu muß man sich auf die Verallgemeinerung der Charaktergruppe X von $\mathfrak{G}$ des abelschen Falles stützen. Im allgemeinen Falle tritt an deren Stelle eine kommutative assoziative halbeinfache Algebra. Diese *Charakteralgebra* X von $\mathfrak{G}$, hier über dem Grundkörper Ω zu betrachten, ergibt sich aus den einfachen Charakteren ξ von $\mathfrak{G}$ und einem zugehörigen Vertretersystem Γ_ξ in Ω der irreduziblen Darstellungsklassen von $\mathfrak{G}$, indem man für je zwei einfache Charaktere χ, ψ von $\mathfrak{G}$ die Produktdarstellung $\Gamma_\chi \times \Gamma_\psi$ auf ihre irreduziblen Bestandteile reduziert. Treten dabei die irreduziblen Bestandteile Γ_ξ mit den Vielfachheiten $k_{\chi\psi}^\xi$ auf, so multiplizieren sich die Charaktere χ, ψ nach dem Schema

$$(4,\,4)\qquad \chi\,\psi = \sum_\xi k_{\chi\psi}^\xi\, \xi.$$

---

[6]) Siehe dazu E. Noether, Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie, Math. Zeitschr. **30** (1929), 641–692, oder auch B. L. van der Waerden, Moderne Algebra II, 2. Aufl. (Grundl. d. Math. Wiss. **34**, Berlin 1940), §§ 125, 126.

[7]) Siehe dazu unten I, § 6, Anm. 10.

Durch dies Multiplikationsschema für die einfachen Charaktere ξ von $\mathfrak{G}$ als Basiselemente (über Ω) wird die Charakteralgebra X von $\mathfrak{G}$ (über Ω) definiert. Sie besitzt übrigens eine zur direkten Zerlegung (4, 1) des Zentrums Z von G analoge direkte Zerlegung in zu Ω isomorphe Körper, und man kann hieraus eine Verallgemeinerung des im abelschen Falle bestehenden Dualismus zwischen X und $\mathfrak{G}$ entwickeln.

Für die Darstellungen gilt bei der Charaktermultiplikation (4, 4) entsprechend

$$\Gamma_\chi \times \Gamma_\psi = P_{\chi,\psi}^{-1}\, \Gamma_{\chi\psi}\, P_{\chi,\psi}, \tag{4, 5}$$

wo die $\Gamma_{\chi\psi}$ die diagonal aus den Γ_ξ mit den Vielfachheiten $k_{\chi\psi}^{\xi}$ zusammengesetzten, vollständig reduzierten Darstellungen bedeuten und die $P_{\chi,\psi}$ ein *Transformatorensystem* aus regulären Matrizen über Ω der Grade $f_\chi f_\psi$ sind, das durch das Vertretersystem Γ_ξ wesentlich eindeutig bestimmt ist (nämlich bis auf reguläre mit $\Gamma_{\chi\psi}$ vertauschbare Matrizen über Ω als vordere Faktoren). Es zeigt sich dann, daß das Multiplikationsschema einer Faktorbasis W_χ von K/Ω die zu (2. 4) analoge Gestalt

$$\mathrm{W}_\chi \times \mathrm{W}_\psi = P_{\chi,\psi}^{-1}\, \mathrm{W}_{\chi\psi}\, P_{\chi,\psi} \cdot C_{\chi,\psi} \tag{4, 6}$$

hat, wo die $\mathrm{W}_{\chi\psi}$ die diagonal aus den W_ξ mit den Vielfachheiten $k_{\chi\psi}^{\xi}$ zusammengesetzten Matrizen über K bedeuten und die $C_{\chi,\psi}$ ein *Faktorensystem* aus Matrizen über Ω der Grade $f_\chi f_\psi$ sind, das durch das Vertretersystem Γ_ξ und die Faktorbasis W_ξ eindeutig bestimmt ist.

Bei den für eine Faktorbasis W_χ von K/Ω bei festem Vertretersystem Γ_χ, wie sich zeigt, allein zulässigen zu (2, 6) analogen Substitutionen

$$\mathrm{W}_\chi \to \mathrm{W}_\chi A_\chi \tag{4, 7}$$

mit willkürlichen regulären Matrizen A_χ über Ω geht das Faktorensystem $C_{\chi,\psi}$ gemäß den zu (2, 7) analogen Substitutionen

$$C_{\chi,\psi} \to (P_{\chi,\psi}^{-1}\, A_{\chi\psi}\, P_{\chi,\psi})^{-1}\, C_{\chi,\psi}\, (A_\chi \times A_\psi) \tag{4, 8}$$

in *assoziierte* Systeme über, wobei wieder $A_{\chi\psi}$ aus den A_ξ diagonal mit den Vielfachheiten $k_{\chi\psi}^{\xi}$ zusammengesetzt ist. Die durch diese Substitutionen gelieferte *Klasse* $\mathfrak{C}$ *assoziierter Faktorensysteme zu* X ist dann die gesuchte K/Ω kennzeichnende Invariante in Ω.

Als Folge aus der definitionsgemäßen Kommutativität und Assoziativität der galoisschen Algebra K/Ω genügt das Faktorensystem $C_{\chi,\psi}$ zu (2, 5) analogen *Kommutativ- und Assoziativrelationen*, die aber wesentlich komplizierter sind. Sie lauten

$$\left\{\begin{aligned} & C_{\psi,\chi} = V_{\chi,\psi}^{-1}\, C_{\chi,\psi}\, V_{\chi,\psi} \\ & (P_{\varphi,\chi} \times I_\psi)^{-1}\, C_{\varphi\chi,\psi}\, (P_{\varphi,\chi} \times I_\psi) \cdot (C_{\varphi,\chi} \times I_\psi) \\ & \quad = (I_\varphi \times P_{\chi,\psi})^{-1} C_{\varphi,\chi\psi}\, (I_\varphi \times P_{\chi,\psi}) \cdot (I_\varphi \times C_{\chi,\psi}) \end{aligned}\right\}. \tag{4, 9}$$

Dabei sind die $V_{\chi,\psi}$ gewisse durch die Grade f_χ, f_ψ bestimmte Permutationsmatrizen, die mit dem Umstand zusammenhängen, daß das Kroneckersche Matrizenprodukt nur bis auf Zeilen- und Spaltenpermutationen kommutativ ist. Ferner entstehen die $C_{\varphi\chi,\psi}$ aus den $C_{\xi,\psi}$ durch diagonale Zusammensetzung mit den Vielfachheiten $k_{\varphi\chi}^{\xi}$ und die $C_{\varphi,\chi\psi}$ aus den hiernach bestimmten $C_{\chi\psi,\varphi}$ durch Transformation mit den Permutationsmatrizen $V_{\chi\psi,\varphi}$ zu den Graden $f_\chi f_\psi$, f_φ. Schließlich bezeichnet allgemein I_χ die Einsmatrix vom Grade f_χ. Kommutativ- und Assoziativrelationen von ähnlichem Bau bestehen übrigens auch schon für die Transformationsmatrizen $P_{\chi,\psi}$.

Als Folge aus der definitionsgemäßen Halbeinfachheit und Separabilität der galoisschen Algebra K/Ω genügt das Faktorensystem $C_{\chi,\psi}$ einer *Regularitätsbedingung*, die aber nicht etwa besagt, daß die Matrizen $C_{\chi,\psi}$ im gewöhnlichen Sinne regulär sind, sondern eine schwächere Forderung darstellt. Sie betrifft nur die Matrizen $C_{\chi,\bar{\chi}}$, wo

$\bar{\chi}$ den zu χ adjungierten Charakter bedeutet, und verlangt, daß die aus ihnen gebildeten Matrizen

$$(4, 10) \qquad \mathfrak{Z}_1(P_{\chi,\bar{\chi}}\, C_{\chi,\bar{\chi}}) \text{ regulär}$$

sind. Die Bildung dieser Matrizen erfolgt nach dem folgenden Schema. Die erste (dem einfachen Bestandteil Γ_1 von $\Gamma_{\chi\bar{\chi}}$ entsprechende) Zeile von $P_{\chi,\bar{\chi}}\, C_{\chi,\bar{\chi}}$ besteht nach (4, 6) aus f_χ^2 Gliedern, die den Spaltenpaaren k, $\bar{k}$ von Γ_χ, $\Gamma_{\bar{\chi}}$ zugeordnet sind. Diese f_χ^2 Glieder werden zu einer f_χ-reihig-quadratischen Matrix $\mathfrak{Z}_1(P_{\chi,\bar{\chi}}\, C_{\chi,\bar{\chi}})$ mit k, $\bar{k}$ als Zeilen- und Spaltenindex zusammengestellt.

§ 5. Hauptergebnis.

Geht man umgekehrt von irgendeiner kommutativen assoziativen regulären Faktorensystemklasse $\mathfrak{C}$ zu X in Ω im Sinne von (4, 7), (4, 8), (4, 9), (4, 10) aus und definiert K/Ω formal durch das Multiplikationsschema (4, 6) für die W_χ als Basis, wobei das Transformatorensystem $P_{\chi,\nu}$ durch (4, 5) und die $W_{\chi\nu}$, $\Gamma_{\chi\nu}$ in der angegebenen Weise durch die Vielfachheiten $k_{\chi\nu}^{\xi}$ aus (4, 4) bestimmt sind, so erhält man eine galoissche Algebra K/Ω mit der Gruppe $\mathfrak{G}$, und damit als Kernkörper einen galoisschen Körper K_0/Ω mit einer Untergruppe $\mathfrak{G}_0$ von $\mathfrak{G}$ als Galoisgruppe.

Als Hauptergebnis dieser Arbeit kann somit festgestellt werden:

Unter den Charakteristik- und Einheitswurzelvoraussetzungen § 1, A, B (*letztere mit g statt n*) *wird die Gesamtheit der galoisschen Algebren* K/Ω *mit vorgegebener Galoisgruppe* $\mathfrak{G}$ — *oder, was auf dasselbe hinausläuft, die Gesamtheit der galoisschen Körper* K_0/Ω *mit irgendwelchen Untergruppen* $\mathfrak{G}_0$ *von* $\mathfrak{G}$ *als Galoisgruppen — auf Grund der verallgemeinerten Kummer-Erzeugung* (4, 6) (*mit der Eigenschaft* (4, 2) *und der expliziten Angabe* (4, 3) *durch eine Normalbasis von* K/Ω) *umkehrbar eindeutig und invariant gekennzeichnet durch die Gesamtheit der Klassen* $\mathfrak{C}$ *kommutativer assoziativer regulärer Faktorensysteme in* Ω *zur Charakteralgebra* X *von* $\mathfrak{G}$ *im Sinne von* (4, 7), (4, 8), (4, 9), (4, 10), *und zwar derart, daß* K_0/Ω *der Kernkörper der durch das Multiplikationsschema* (4, 6) *gelieferten galoisschen Algebra ist.*

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß K/Ω selbst ein Körper ist, muß sich grundsätzlich in einer zu I. K. A., § 4, 4 analogen *Irreduzibilitätseigenschaft* der Faktorensystemklasse $\mathfrak{C}$ in Ω ausdrücken lassen. Die explizite Aufstellung dieser Eigenschaft habe ich noch nicht in Angriff genommen. Sie wären zu leisten, wenn man mit der hier zunächst nur in ihren Grundzügen entwickelten Methode das bekannte Problem der *Existenz galoisscher Körper* K/Ω *mit vorgegebener Galoisgruppe* $\mathfrak{G}$ in Angriff nehmen will. Der Lösung dieses Problems steht aber auch abgesehen hiervon noch eine erhebliche Schwierigkeit im Wege, nämlich der Umstand, daß die Faktorensystemklasse $\mathfrak{C}$ in Ω nicht ein System unabhängiger Invarianten von K/Ω liefert, sondern den formal einigermaßen komplizierten Kommutativ- und Assoziativrelationen (4, 7) unterworfen ist. Für die in I. K. A. und E. M. behandelten speziellen Gruppen $\mathfrak{G} = (\mathfrak{N}; \Gamma, \mathfrak{C})$[8]) läuft die Überwindung dieser Schwierigkeit auf den Beweis der im allgemeinen Falle noch offen gebliebenen Vermutung (V.) aus E. M. I, § 3, 3 zurück.

Die Bedeutung meiner Methode scheint mir im übrigen weniger in diesem neuen Ansatz zur Lösung des Existenzproblems zu liegen. Ein bloßer Existenzbeweis wird ja den Algebraiker niemals zufriedenstellen. Was dieser darüber hinaus grundsätzlich fordern muß, ist eine invariante Konstruktion der Gesamtheit der im jeweiligen

[8]) Die dortige (gruppentheoretische) Faktorensystemklasse $\mathfrak{C}$ darf nicht mit der obigen (körpertheoretischen) Faktorensystemklasse $\mathfrak{C}$ verwechselt werden; letztere entspricht vielmehr der dortigen (körpertheoretischen) Faktorensystemklasse $\mathfrak{c}$.

Existenzproblem geforderten Gegenstände, und hierzu ist mit ihrer invarianten Kennzeichnung eine weitertragende Vorarbeit geleistet als mit dem bloßen Existenzbeweis eines unter ihnen nicht näher gekennzeichneten.

Für die galoisschen Körper K_0/Ω, deren Gruppen $\mathfrak{G}_0$ Untergruppen einer gegebenen Gruppe $\mathfrak{G}$ sind, wird die invariante Kennzeichnung durch das zuvor ausgesprochene Hauptergebnis dieser Arbeit geleistet. Zu ihrer invarianten Konstruktion wäre die Lösungsgesamtheit der Kommutativ- und Assoziativrelationen durch unabhängige Parameter zu beschreiben, wie das in einer anschließenden Arbeit an einem Beispiel durchgeführt werden soll. Zur Lösung des Existenzproblems wäre darüber hinaus die Existenz eine in noch zu präzisierendem Sinne irreduziblen Lösung nachzuweisen.

Viel wichtiger scheint mir aber, wie schon zuvor betont, die Ausnutzung meiner Methode zur Verallgemeinerung von Klassenkörpertheorie und Reziprozitätsgesetz auf beliebige galoissche Zahlkörper zu sein. Auf dieses Problem hoffe ich, in anschließenden Arbeiten — oder auch durch solche meiner Schüler — zurückzukommen.

I. Darstellungstheoretische Grundlagen[9]).

§ 6. Die Orthogonalitätsrelationen für die Charaktere und Stellenspalten der absolut-irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{G}$.

Es sei $\mathfrak{G}$ eine endliche Gruppe der Ordnung g und Ω ein Körper von nicht in g aufgehender Charakteristik, über dem alle absolut-irreduziblen Darstellungsklassen von $\mathfrak{G}$ vertreten sind. Nach R. Brauer[10]) genügt dazu, daß Ω die g-ten Einheitswurzeln enthält. Es ist zu vermuten, daß analog wie im abelschen Fall bereits die n-ten Einheitwurzeln ausreichen, wo n der Exponent von $\mathfrak{G}$ ist; dann würden für alles Folgende die Voraussetzungen § 1, A, B genügen.

Die absolut-irreduziblen Darstellungsklassen von $\mathfrak{G}$ sind eindeutig gekennzeichnet durch ihre Charaktere χ, die einfachen Charaktere von $\mathfrak{G}$; sie haben die Grade

$$f_\chi = \chi(1).$$

Es sei Γ_χ ein über Ω gelegenes Vertretersystem dieser Darstellungsklassen. Die den Elementen S aus $\mathfrak{G}$ zugeordneten Matrizen aus Γ_χ seien mit

$$A_\chi(S) = (a_\chi^{ik}(S)) \qquad (i, k = 1, \ldots, f_\chi)$$

bezeichnet; dann sind die Charakterwerte

$$\chi(S) = \mathrm{Sp}\,(A_\chi(S)) = \sum_i a_\chi^{ii}(S).$$

Für das Einselement 1 von $\mathfrak{G}$ sei durchweg

$$A_\chi(1) = I_\chi = (e_{ik}) \qquad (i, k = 1, \ldots, f_\chi)$$

gesetzt, also unter $I_\chi = (e_{ik})$ die Einsmatrix vom Grade f_χ verstanden.

Für ein Element S aus $\mathfrak{G}$ sei die zugehörige Klasse konjugierter Elemente von $\mathfrak{G}$ mit dem entsprechenden deutschen Buchstaben $\mathfrak{S}$ bezeichnet; bei festliegender Klasse $\mathfrak{S}$

---

[9]) In diesem Abschnitt stelle ich die gebrauchten Grundlagen aus der Darstellungstheorie zusammen, wie sie in der bereits zitierten Literatur (Deuring, Noether, van der Waerden) oder auch bei A. Speiser, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung (Grundl. d. Math. Wiss. **5**, 3. Aufl., Berlin 1937), Kap. 11, 12 entwickelt sind, und zwar setze ich diese Grundlagen hier in eine solche Form, wie es für den vorliegenden Zweck angebracht erscheint, und unter Einarbeitung einiger hier wesentlicher, bisher nirgends ausgeführter Ergänzungen.

[10]) R. Brauer, On the representation of a group of finite order g in the field of the g-th roots of unity, Amer. Journ. Math. **67** (1947), 461–471. Siehe auch schon in weniger scharfer Form (nämlich mit einer hinreichend hohen Potenz g^h statt g) bei R. Brauer-H. Hasse-E. Noether, Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebren, dies Journ. **167** (1931), 399–404, Satz 6.

sei unter S ein beliebiger Vertreter aus $\mathfrak{S}$ verstanden. Mit $h_{\mathfrak{S}}$ sei die Elementanzahl von $\mathfrak{S}$ bezeichnet. Die Anzahl der verschiedenen absolut-irreduziblen Darstellungsklassen, also der verschiedenen einfachen Charaktere χ und Vertreter Γ_χ ist gleich der Anzahl der verschiedenen Klassen $\mathfrak{S}$; diese Anzahl sei mit r bezeichnet.

Die Charakterwerte $\chi(S)$ hängen nur von den Klassen $\mathfrak{S}$ ab. Es bestehen die beiden Systeme zueinander komplementärer Orthogonalitätsrelationen

$$\frac{1}{g}\sum_{\mathfrak{S}} h_{\mathfrak{S}}\,\chi(S)\,\psi(S^{-1}) = e_{\chi,\psi}\,, \tag{6, 1}$$

$$\frac{1}{g}\sum_{\chi} h_{\mathfrak{S}}\,\chi(S)\,\chi(T^{-1}) = e_{\mathfrak{S},\mathfrak{T}}\,, \tag{6, 2}$$

wo $e_{\chi,\psi}$ und $e_{\mathfrak{S},\mathfrak{T}}$ die Elemente der Einsmatrizen zu den Charakteren χ, ψ bzw. Klassen $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$ als Zeilen- und Spaltenindizes bezeichnen. Nach (6, 2) für $S = 1$, $T = 1$ besteht insbesondere die Gradrelation

$$\sum_{\chi} f_\chi^2 = g. \tag{6, 3}$$

Den Orthogonalitätsrelationen (6, 1) für die Charakterwerte $\chi(S)$ liegen die Orthogonalitätsrelationen

$$\frac{1}{g}\sum_{S} f_\chi\, a_\chi^{ik}(S)\, a_\psi^{k'i'}(S^{-1}) = e_{\chi,\psi}\, e_{ii'}\, e_{kk'} \tag{6, 4}$$

für die Elemente $a_\chi^{ik}(S)$ der Darstellungsmatrizen $A_\chi(S)$ zugrunde, die hier zu sogenannten Stellenspalten zusammengefaßt erscheinen; die Stellenspalten der Darstellung Γ_χ sind die Elementspalten $a_\chi^{ik}(S)$ mit festem χ und festem Stellenindexpaar i, k aus der Reihe $1, \ldots, f_\chi$ bei laufendem S. Den komplementären Orthogonalitätsrelationen (6, 2) für die Charakterwerte entsprechen ebenso die komplementären Orthogonalitätsrelationen

$$\frac{1}{g}\sum_{\chi,i,k} f_\chi\, a_\chi^{ik}(S)\, a_\chi^{ki}(T^{-1}) = e_{S,T} \tag{6, 5}$$

für die Elemente der Darstellungsmatrizen, die übrigens auch in der Form

$$\frac{1}{g}\sum_{\chi} f_\chi\, \mathrm{Sp}\,(A_\chi(S)\, A_\chi(T^{-1})) = e_{S,T} \tag{6, 5'}$$

geschrieben werden können und dadurch wegen $A_\chi(S)\,A_\chi(T^{-1}) = A_\chi(S\,T^{-1})$ als Folge aus (6, 2) (mit $\psi = 1$, $S \to S\,T^{-1}$) erscheinen.

Die zueinander komplementären Orthogonalitätsrelationen (6, 4), (6, 5) können auch durch die folgende Aussage zum Ausdruck gebracht werden. Die aus den Elementen der Darstellungsmatrizen $A_\chi(S)$ zusammengestellte Matrix

$$\mathrm{A} = (a_\chi^{ik}(S)) \qquad \left\{\begin{array}{l} S \text{ Zeilenindex} \\ \chi;\ i,\ k \text{ Spaltenindizes} \end{array}\right\} \tag{6, 6}$$

der sogenannten Stellenspalten, die nach (6, 3) g-reihig-quadratisch ist, ist regulär mit der transponierten Reziproken

$$\mathrm{A}'^{-1} = \frac{1}{g}\,(f_\chi\, a_\chi^{ki}(S^{-1})) \qquad \left\{\begin{array}{l} S \text{ Zeilenindex} \\ \chi;\ i,\ k \text{ Spaltenindizes} \end{array}\right\}. \tag{6, 7}$$

Die ersten Orthogonalitätsrelationen (6, 1), (6, 4) ordnen sich den allgemeineren Relationen

$$\frac{1}{g}\sum_{ST=R} f_\chi\, \chi(S)\, \psi(T) = \chi(R)\, e_{\chi,\psi}\,, \tag{6, 8}$$

$$\frac{1}{g}\sum_{ST=R} f_\chi\, a_\chi^{ik}(S)\, a_\psi^{k'i'}(T) = a_\chi^{i'i}(R)\, e_{\chi,\psi}\, e_{kk'} \tag{6, 9}$$

als die Spezialfälle $R = 1$ unter. Diese allgemeineren Relationen haben eine begriffliche Deutung; siehe am Schluß von §§ 8, 11.

§ 7. Die Charakteralgebra X von $\mathfrak{G}$ über Ω.

Wie schon in der Einleitung § 4 ausgeführt, ergibt sich für die einfachen Charaktere χ von $\mathfrak{G}$ aus der (in § 9 zu behandelnden) Kroneckerschen Multiplikationen der Darstellungen Γ_χ ein Multiplikationsschema

$$\chi\,\psi = \sum_\xi k_{\chi\psi}^\xi\,\xi \tag{7, 1}$$

mit durch die Gruppe $\mathfrak{G}$ bestimmten, ganzzahligen nicht-negativen Koeffizienten $k_{\chi\psi}^\xi$. Diese bestimmen sich explizit durch Übergang zu den Charakterwerten und Auflösung mittels der Orthogonalitätsrelationen (6, 1) zu

$$k_{\chi\psi}^\xi = \frac{1}{g}\sum_S \chi(S)\,\psi(S)\,\xi(S^{-1}). \tag{7, 2}$$

Durch das Multiplikationsschema (7, 1) wird eine kommutative assoziative Algebra X vom Range r mit den einfachen Charakteren ξ als Basis definiert, die hier über dem Grundkörper Ω zu betrachten ist; sie sei die *Charakteralgebra von* $\mathfrak{G}$ *über* Ω genannt.

Die Übergänge $\chi \to \chi(S)$ zu den Charakterwerten liefern r verschiedene Darstellungen ersten Grades von X in Ω. Daher ist die Charakteralgebra X halbeinfach und die direkte Summe von r zu Ω isomorphen Körpern:

$$\mathrm{X} = \sum_{\mathfrak{S}} \Omega\,\varepsilon_{\mathfrak{S}},$$

wo $\mathfrak{S}$ die Klassen konjugierter Elemente von $\mathfrak{G}$ durchläuft und die $\varepsilon_{\mathfrak{S}}$ ihnen zugeordnete, primitive orthogonale Idempotente aus X sind. Diese haben die Eigenschaften

$$\chi\,\varepsilon_{\mathfrak{S}} = \chi(S)\,\varepsilon_{\mathfrak{S}}, \qquad \sum_{\mathfrak{S}} \varepsilon_{\mathfrak{S}} = 1.$$

Aus den demgemäß bestehenden Formeln

$$\chi = \sum_{\mathfrak{S}} \chi(S)\,\varepsilon_{\mathfrak{S}} \tag{7, 3}$$

folgt durch Auflösung mittels der Orthogonalitätsrelationen (6, 2) die explizite Darstellung

$$\varepsilon_{\mathfrak{S}} = \frac{1}{g}\sum_\chi h_{\mathfrak{S}}\,\chi(S^{-1})\,\chi \tag{7, 4}$$

der Idempotente $\varepsilon_{\mathfrak{S}}$ durch die einfachen Charaktere χ.

Die Kommutativität und Assoziativität der Charakteralgebra X drückt sich durch die folgenden Relationen zwischen den Multiplikationskonstanten $k_{\chi\psi}^\xi$ aus (7, 1), (7, 2) aus:

$$k_{\psi\chi}^\xi = k_{\chi\psi}^\xi, \tag{7, 5}$$

$$\sum_\xi k_{\varphi\xi}^\eta\,k_{\chi\psi}^\xi = \sum_\xi k_{\varphi\chi}^\xi\,k_{\xi\psi}^\eta. \tag{7, 6}$$

§ 8. Das Zentrum Z des Gruppenrings G von $\mathfrak{G}$ über Ω.

Es sei G der durch $\mathfrak{G}$ bestimmte Gruppenring über dem Körper Ω. Die Klassen $\mathfrak{S}$ konjugierter Elemente von $\mathfrak{G}$ seien fortan als die in G gelegenen Summen ihrer Elemente S verstanden. Sie bilden eine Ω-Basis des Zentrums Z von G.

In einer irreduziblen Darstellung Γ_χ von $\mathfrak{G}$ und damit von G über Ω entsprechen den Klassensummen $\mathfrak{S}$ Matrizen der Form

$$A_\chi(\mathfrak{S}) = c_{\mathfrak{S}}\,I_\chi \tag{8, 1}$$

mit Elementen $c_{\mathfrak{S}}$ aus Ω. Diese bestimmen sich durch Übergang zu den Charakterwerten:

$$\chi(\mathfrak{S}) = h_{\mathfrak{S}}\,\chi(S) = c_{\mathfrak{S}}\,f_\chi. \tag{8, 2}$$

Das Multiplikationsschema der Basis $\mathfrak{S}$ von Z hat die Gestalt

$$\mathfrak{S}\,\mathfrak{T} = \sum_{\mathfrak{R}} l^{\mathfrak{R}}_{\mathfrak{S}\mathfrak{T}}\,\mathfrak{R} \tag{8, 3}$$

mit durch die Gruppe $\mathfrak{G}$ bestimmten, ganzrationalen nicht-negativen Koeffizienten $l^{\mathfrak{R}}_{\mathfrak{S}\mathfrak{T}}$. Diese bestimmen sich explizit durch Übergang zu den Darstellungsmatrizen gemäß (8, 1), (8, 2) und Auflösung mittels der Orthogonalitätsrelationen (6, 2) zu

$$l^{\mathfrak{R}}_{\mathfrak{S}\mathfrak{T}} = \frac{1}{g}\sum_{\chi}\frac{h_{\mathfrak{S}}h_{\mathfrak{T}}}{f_\chi}\,\chi(S)\,\chi(T)\,\chi(R^{-1}). \tag{8, 4}$$

Die Übergänge $\mathfrak{S} \to A_\chi(\mathfrak{S})$ zu den Darstellungsmatrizen gemäß (8, 1), (8, 2) liefern r verschiedene Darstellungen ersten Grades von Z in Ω. Daher ist das Zentrum Z halbeinfach und die direkte Summe von r zu Ω isomorphen Körpern:

$$Z = \sum_{\chi}\Omega\,e_\chi,$$

wo die e_χ den einfachen Charakteren χ zugeordnete, primitive orthogonale Idempotente aus Z sind. Diese haben die Eigenschaften

$$\mathfrak{S}\,e_\chi = \frac{h_{\mathfrak{S}}\,\chi(S)}{f_\chi}\,e_\chi, \qquad \sum_{\chi} e_\chi = 1.$$

Aus den demgemäß bestehenden Formeln

$$\mathfrak{S} = \sum_{\chi}\frac{h_{\mathfrak{S}}\,\chi(S)}{f_\chi}\,e_\chi \tag{8, 5}$$

folgt durch Auflösung mittels der Orthogonalitätsrelationen (6, 1) die explizite Darstellung

$$e_\chi = \frac{1}{g}\sum_{\mathfrak{S}} f_\chi\,\chi(S^{-1})\,\mathfrak{S} \tag{8, 6}$$

der Idempotente e_χ durch die Klassensummen $\mathfrak{S}$.

Die Kommutativität und Assoziativität des Zentrums Z drückt sich durch die folgenden Relationen zwischen den Multiplikationskonstanten $l^{\mathfrak{R}}_{\mathfrak{S}\mathfrak{T}}$ aus (8, 3), (8, 4) aus:

$$l^{\mathfrak{R}}_{\mathfrak{T}\mathfrak{S}} = l^{\mathfrak{R}}_{\mathfrak{S}\mathfrak{T}}, \tag{8, 7}$$

$$\sum_{\mathfrak{X}} l^{\mathfrak{Y}}_{\mathfrak{R}\mathfrak{X}}\,l^{\mathfrak{X}}_{\mathfrak{S}\mathfrak{T}} = \sum_{\mathfrak{X}} l^{\mathfrak{X}}_{\mathfrak{R}\mathfrak{S}}\,l^{\mathfrak{Y}}_{\mathfrak{X}\mathfrak{T}}. \tag{8, 8}$$

Bringt man die Orthogonalität der Idempotente e_χ in ihrer expliziten Darstellung (8, 6) zum Ausdruck, so ergeben sich gerade die Formeln (6, 8); hierin liegt deren begriffliche Bedeutung.

Bemerkung zu §§ 7, 8. Im abelschen Falle spielt der Dualismus zwischen der Gruppe $\mathfrak{G}$ und ihrer Charaktergruppe X eine wichtige Rolle in der Klassenkörpertheorie. Im allgemeinen Falle sind das Zentrum Z des Gruppenrings G von $\mathfrak{G}$ über Ω und die Charakteralgebra X von $\mathfrak{G}$ über Ω beide direkte Summen von je r zu Ω isomorphen Körpern, also zueinander isomorph, und die Formeln aus §§ 7, 8 lassen einen entsprechenden Dualismus zwischen Z und X hervortreten. Es ist zu erwarten, daß das bei der Anwendung der Ergebnisse dieser Arbeit auf die Verallgemeinerung der Klassenkörpertheorie von Bedeutung sein wird.

§ 9. Die Kroneckersche Multiplikation der irreduziblen Darstellungen.

Ist

$$\pi = \sum_{\xi} k_{\pi}^{\xi} \xi$$

ein aus den einfachen Charakteren ξ von $\mathfrak{G}$ mit ganzrationalen nicht-negativen Vielfachheiten k_{π}^{ξ} zusammengesetzter Charakter, so bezeichne

$$\Gamma_{\pi} = \underset{\xi}{\Delta} (I_{\pi}^{\xi} \times \Gamma_{\xi}) \tag{9, 1}$$

die zugehörige, aus den irreduziblen Darstellungen Γ_{ξ} über Ω diagonal mit den Vielfachheiten k_{π}^{ξ} zusammengesetzte, vollständig reduzierte Darstellung vom Grade

$$f_{\pi} = \sum_{\xi} k_{\pi}^{\xi} f_{\xi}.$$

Die diagonale Zusammensetzung von k_{π}^{ξ} Darstellungen Γ_{ξ} ist dabei als das Kroneckersche Produkt der Einsmatrix I_{π}^{ξ} vom Grade k_{π}^{ξ} mit der Darstellung Γ_{ξ} geschrieben, und die diagonale Zusammensetzung der den verschiedenen ξ entsprechenden Bestandteile $I_{\pi}^{\xi} \times \Gamma_{\xi}$ durch das zum Summenzeichen analoge Zeichen $\underset{\xi}{\Delta}$ angegeben. Für die einfachen Charaktere ξ von $\mathfrak{G}$ sei dabei eine ein für allemal feste Reihenfolge zugrunde gelegt. Die mit der vollständig reduzierten Darstellung Γ_{π} vertauschbaren Matrizen sind die Matrizen der Form

$$D_{\pi} = \underset{\xi}{\Delta} (A_{\pi}^{\xi} \times I_{\xi}) \tag{9, 2}$$

mit willkürlichen Matrizen A_{π}^{ξ} der Grade k_{π}^{ξ} und den bereits in § 6 eingeführten Einsmatrizen I_{ξ} der Grade f_{ξ}.

Als Regel für die Zeilen- und Spaltenfolge des Kroneckerschen Matrizenprodukts sei allgemein festgesetzt, daß die Paare der Zeilen- und Spaltenindizes der beiden Faktoren lexikographisch angeordnet werden, wobei der erste Faktor (Grobstruktur) den Vorrang vor dem zweiten Faktor (Feinstruktur) haben soll. Es werden also die einzelnen Elemente des ersten Faktors mit dem vollen zweiten Faktor multipliziert und zu einer Matrix zusammengestellt. Bei dieser Festsetzung liegt in (9, 1) in der Tat eine diagonale Zusammensetzung vor, während in (9, 2) eine Matrix aus Skalarmatrizen entsteht.

Im folgenden treten neben der gewöhnlichen Addition und Multiplikation der Matrizen laufend die beiden in (9, 1), (9, 2) vorkommenden Operationen Δ und $\times$ vom Charakter einer Addition und Multiplikation auf. Es wird also in einem Kalkül mit insgesamt vier Operationen gearbeitet, die untereinander in bekannten oder ohne weiteres ersichtlichen Distributivbeziehungen stehen. Es wäre erwünscht, diesem Kalkül eine formal-algebraische Ausgestaltung zu geben, um die im folgenden zu entwickelnden, einigermaßen komplizierten Formeln durchsichtiger und für weitere Untersuchungen handlicher zu machen.

Dem Multiplikationsschema (7, 1) für die einfachen Charaktere liegt das Multiplikationsschema für die Kroneckerschen Produkte der irreduziblen Darstellungen zugrunde. Dieses hat die Gestalt

$$\Gamma_{\chi} \times \Gamma_{\psi} = P_{\chi,\psi}^{-1} \Gamma_{\chi\psi} P_{\chi,\psi}. \tag{9, 3}$$

Dabei sind die Darstellungen $\Gamma_{\chi\psi}$ nach dem Schema (9, 1) mit den Vielfachheiten $k_{\chi\psi}^{\xi}$ aus (7, 1), (7, 2) gebildet, also

$$\Gamma_{\chi\psi} = \underset{\xi}{\Delta} (I_{\chi\psi}^{\xi} \times \Gamma_{\xi}), \tag{9, 4}$$

und die $P_{\chi,\psi}$ sind ein *Transformatorensystem* aus von S unabhängigen regulären Matrizen über Ω der Grade $f_{\chi\psi} = f_\chi f_\psi$. Dieses System liegt durch das Vertretersystem Γ_ξ nur bis auf Substitutionen

$$P_{\chi,\psi} \to D_{\chi\psi} P_{\chi,\psi} \tag{9, 5}$$

fest, wo die $D_{\chi\psi}$ reguläre Matrizen über Ω von der Form (9, 2) mit den Vielfachheiten $k^\xi_{\chi\psi}$ sind, also

$$D_{\chi\psi} = \underset{\xi}{\Delta} (A^\xi_{\chi\psi} \times I_\xi) \tag{9, 6}$$

mit willkürlichen regulären Matrizen $A^\xi_{\chi\psi}$ über Ω der Grade $k^\xi_{\chi\psi}$. Da es auf die Normierung der Transformatoren $P_{\chi,\psi}$ gemäß (9, 5) nicht ankommen wird, sei die Gleichheit bis auf einen vorderen Faktor $D_{\chi\psi}$ der Gestalt (9, 6) im folgenden kurz mit $\sim$ bezeichnet; dies soll sinngemäß auch bei der späteren Verallgemeinerung der Transformatoren $P_{\chi,\psi}$ auf zusammengesetzte Charaktere an Stelle der einfachen χ, ψ gelten.

§ 10. Die Kommutativ- und Assoziativrelationen für das Transformatorensystem.

Entsprechend der Kommutativität und Assoziativität der Charakteralgebra X, die sich in den Relationen (7, 5), (7, 6) für die Multiplikationskonstanten $k^\xi_{\chi\psi}$ aus (7, 1), (7, 2) ausdrückt, bestehen für das Transformatorensystem $P_{\chi,\psi}$ aus (9, 3) Kommutativ- und Assoziativrelationen im Sinne der bei (9, 5), (9, 6) erklärten Gleichheit $\sim$, die jetzt aufgestellt werden sollen.

a) Für die Kommutativrelationen ist zu beachten, daß das Kroneckersche Matrizenprodukt nur bis auf Zeilen- und Spaltenpermutationen kommutativ ist. Sind A, B irgend zwei Matrizen der Grade m, n, so gilt die Vertauschungsregel

$$B \times A = V^{-1}_{m,n} (A \times B)\, V_{m,n}, \tag{10, 1}$$

wo $V_{m,n}$ die Matrix derjenigen allein durch die Grade m, n bestimmten Permutation ist, welche die lexikographische Anordnung der Indizespaare unter Bevorzugung des zweiten Index in die lexikographische Anordnung unter Bevorzugung des ersten Index überführt[11].

Für die Kroneckerschen Produkte der irreduziblen Darstellungen gilt nach (10, 1) die Regel

$$\Gamma_\psi \times \Gamma_\chi = V^{-1}_{\chi,\psi} (\Gamma_\chi \times \Gamma_\psi)\, V_{\chi,\psi}, \tag{10, 2}$$

wo zur Abkürzung $V_{f_\chi, f_\psi} = V_{\chi,\psi}$ gesetzt ist. Nach (9, 3), (9, 5) ergeben sich daraus für das Transformatorensystem die Kommutativrelationen

$$P_{\psi,\chi} \sim P_{\chi,\psi}\, V_{\chi,\psi}. \tag{10, 3}$$

Die Regel (10, 2) gilt allgemeiner auch für zusammengesetzte Charaktere an Stelle der einfachen χ, ψ. Die entsprechende Verallgemeinerung der Relationen (10, 3) wird sich nachher im Zusammenhang mit der Definition der Transformatoren $P_{\chi,\psi}$ für zusammengesetzte Charaktere an Stelle der einfachen χ, ψ einstellen.

b) Für die Assoziativrelationen ist zu beachten, daß das Kroneckersche Matrizenprodukt bei der festgesetzten lexikographischen Bildungsregel assoziativ ist, ferner in Verbindung mit dem gewöhnlichen Matrizenprodukt der Distributivregel

$$(A_1 \times B_1)(A_2 \times B_2) = A_1 A_2 \times B_1 B_2 \tag{10, 4}$$

[11]) Man beachte, daß bei der Transformation $V^{-1}AV$ einer Matrix A mit einer Permutationsmatrix V die Zeilen und Spalten von A die der Reziproken V^{-1} zugeordnete Permutation erfahren.

genügt, und schließlich auch in Verbindung mit der diagonalen Zusammensetzung des ersten Faktors einer entsprechenden Distributivregel

$$\underset{i}{\Delta}\, A_i \times B = \underset{i}{\Delta}\,(A_i \times B) \tag{10, 5}$$

genügt. Für die diagonale Zusammensetzung des zweiten Faktors gilt nicht etwa einfach die analoge Regel; man kann jedoch mittels der obigen Vertauschungsregel (10, 1) auf die diagonale Zusammensetzung des ersten Faktors zurückgehen.

Für die Kroneckerschen Produkte der irreduziblen Darstellungen gilt nach (9, 3) und (10, 4) zunächst

$$\begin{aligned}(\Gamma_\varphi \times \Gamma_\chi) \times \Gamma_\psi &= P_{\varphi,\chi}^{-1}\, \Gamma_{\varphi\chi}\, P_{\varphi,\chi} \times \Gamma_\psi \\ &= (P_{\varphi,\chi} \times I_\psi)^{-1}\,(\Gamma_{\varphi\chi} \times \Gamma_\psi)\,(P_{\varphi,\chi} \times I_\psi),\end{aligned} \tag{10, 6_1}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_\varphi \times (\Gamma_\chi \times \Gamma_\psi) &= \Gamma_\varphi \times P_{\chi,\psi}^{-1}\, \Gamma_{\chi\psi}\, P_{\chi,\psi} \\ &= (I_\varphi \times P_{\chi,\psi})^{-1}\,(\Gamma_\varphi \times \Gamma_{\chi\psi})\,(I_\varphi \times P_{\chi,\psi}).\end{aligned} \tag{10, 6_2}$$

Einerseits hat man hierin nach (9, 4) und (10, 4), (10, 5) die Umformung

$$\begin{aligned}\Gamma_{\varphi\chi} \times \Gamma_\psi &= \underset{\xi}{\Delta}\,(I_{\varphi\chi}^{\xi} \times \Gamma_\xi \times \Gamma_\psi) = \underset{\xi}{\Delta}\,(I_{\varphi\chi}^{\xi} \times P_{\xi,\psi}^{-1}\, \Gamma_{\xi\psi}\, P_{\xi,\psi}) \\ &= \underset{\xi}{\Delta}[(I_{\varphi\chi}^{\xi} \times P_{\xi,\psi})^{-1}\,(I_{\varphi\chi}^{\xi} \times \Gamma_{\xi\psi})\,(I_{\varphi\chi}^{\xi} \times P_{\xi,\psi})] \\ &= \underset{\xi}{\Delta}\,(I_{\varphi\chi}^{\xi} \times P_{\xi,\psi})^{-1} \cdot \underset{\xi}{\Delta}\,(I_{\varphi\chi}^{\xi} \times \Gamma_{\xi\psi}) \cdot \underset{\xi}{\Delta}\,(I_{\varphi\chi}^{\xi} \times P_{\xi,\psi}).\end{aligned}$$

Nun geht die diagonale Zusammensetzungsfolge aus

$$\underset{\xi}{\Delta}\,(I_{\varphi\chi}^{\xi} \times \Gamma_{\xi\psi}) = \underset{\xi}{\Delta}\,[I_{\varphi\chi}^{\xi} \times \underset{\eta}{\Delta}\,(I_{\xi\psi}^{\eta} \times \Gamma_\eta)]$$

durch eine Permutation in die diagonale Zusammensetzungsfolge aus

$$\Gamma_{\varphi\chi\psi} = \underset{\eta}{\Delta}\,(I_{\varphi\chi\psi}^{\eta} \times \Gamma_\eta) = \underset{\eta}{\Delta}[\underset{\xi}{\Delta}\,(I_{\varphi\chi}^{\xi} \times I_{\chi\psi}^{\eta}) \times \Gamma_\eta]$$

über, wobei zu beachten ist, daß die Vielfachheit $k_{\varphi\chi\psi}^{\eta} = \sum\limits_{\xi} k_{\varphi\chi}^{\xi}\, k_{\xi\psi}^{\eta}$ ist. Bezeichnet $U_{\varphi\chi,\psi}$ die Matrix dieser durch die Vielfachheiten $k_{\varphi\chi}^{\xi}$, $k_{\xi\psi}^{\eta}$ und die Grade f_η bestimmten Permutationen, so gilt also[12])

$$\underset{\xi}{\Delta}\,(I_{\varphi\chi}^{\xi} \times \Gamma_{\xi\psi}) = U_{\varphi\chi,\psi}^{-1}\, \Gamma_{\varphi\chi\psi}\, U_{\varphi\chi,\psi}. \tag{10, 7}$$

Definiert man demgemäß

$$P_{\varphi\chi,\psi} \sim U_{\varphi\chi,\psi} \cdot \underset{\xi}{\Delta}\,(I_{\varphi\chi}^{\xi} \times P_{\xi,\psi}), \tag{10, 8_1}$$

so hat man

$$\Gamma_{\varphi\chi} \times \Gamma_\psi = P_{\varphi\chi,\psi}^{-1}\, \Gamma_{\varphi\chi\psi}\, P_{\varphi\chi,\psi}. \tag{10, 9_1}$$

Durch die Formeln (10, 9_1) wird das Multiplikationsschema (9, 3) zweier irreduzibler Darstellungen Γ_χ, Γ_ψ auf den Fall verallgemeinert, daß der erste Faktor eine reduzible Darstellung $\Gamma_{\varphi\chi}$ in vollständig reduzierter Gestalt ist. In Verallgemeinerung der Transformatoren $P_{\chi,\psi}$ aus (9, 3) treten dabei die durch die Formeln (10, 8_1) definierten Transformatoren $P_{\varphi\chi,\psi}$ auf. Nach dieser Definition erhält man $P_{\varphi\chi,\psi}$, indem man zunächst die $P_{\xi,\psi}$ diagonal mit den Vielfachheiten $k_{\varphi\chi}^{\xi}$ zusammensetzt und dann die so erhaltene Matrix vorne mit der durch (10, 7) definierten Permutationsmatrix $U_{\varphi\chi,\psi}$ multipliziert, d. h. ihre Zeilen der zugeordneten Permutation unterzieht.

---

[12]) Vgl. die vorige Anmerkung.

Andererseits hat man unter Verwendung dieses Ergebnisses nach der verallgemeinerten Vertauschungsregel (10, 2) die Umformung

$$\Gamma_\varphi \times \Gamma_{\chi\psi} = V_{\chi\psi,\varphi}^{-1} (\Gamma_{\chi\psi} \times \Gamma_\varphi) V_{\chi\psi,\varphi} = V_{\chi\psi,\varphi}^{-1} P_{\chi\psi,\varphi}^{-1} \Gamma_{\varphi\chi\psi} P_{\chi\psi,\varphi} V_{\chi\psi,\varphi}.$$

Definiert man demgemäß

$$(10, 8_2) \qquad P_{\varphi,\chi\psi} \sim P_{\chi\psi,\varphi} V_{\chi\psi,\varphi},$$

so hat man

$$(10, 9_2) \qquad \Gamma_\varphi \times \Gamma_{\chi\psi} = P_{\varphi,\chi\psi}^{-1} \Gamma_{\varphi\chi\psi} P_{\varphi,\chi\psi}.$$

Durch die Formeln (10, 9_2) wird das Multiplikationsschema (9, 3) zweier irreduzibler Darstellungen Γ_φ, Γ_χ auch auf den Fall verallgemeinert, daß der zweite Faktor eine reduzible Darstellung $\Gamma_{\chi\psi}$ in vollständig reduzierter Gestalt ist. In Verallgemeinerung der Transformatoren $P_{\varphi,\chi}$ aus (9, 3) treten dabei die durch (10, 8_2) definierten Transformatoren $P_{\varphi,\chi\psi}$ auf. Nach dieser Definition erhält man die $P_{\varphi,\chi\psi}$ aus den vorstehend bereits festgelegten $P_{\chi\psi,\varphi}$ durch formale Verallgemeinerung der Kommutativrelationen (10, 3) auf den Fall, daß einer der beiden Charaktere zusammengesetzt ist.

Trägt man die Umformungsergebnisse (10, 9) in die Ausgangsformeln (10, 6) ein, so ergeben sich durch Vergleich der beiden Berechnungsarten des assoziativen Kroneckerschen Produkts $\Gamma_\varphi \times \Gamma_\chi \times \Gamma_\psi$ die Assoziativrelationen

$$(10, 10) \qquad P_{\varphi\chi,\psi} (P_{\varphi,\chi} \times I_\psi) \sim P_{\varphi,\chi\psi} (I_\varphi \times P_{\chi,\psi}),$$

wo die $P_{\varphi\chi,\psi}$, $P_{\varphi,\chi\psi}$ durch die Formeln (10, 8) gegeben sind. Die Gleichheit $\sim$ bedeutet dabei das Übereinstimmen bis auf eine mit $\Gamma_{\varphi\chi\psi}$ vertauschbare reguläre Matrix $D_{\varphi\chi\psi}$ über Ω als vorderen Faktor, also eine Matrix der Gestalt

$$D_{\varphi\chi\psi} = \underset{\eta}{\Delta} (A_{\varphi\chi\psi}^\eta \times I_\eta)$$

mit willkürlichen regulären Matrizen $A_{\varphi\chi\psi}^\eta$ über Ω der Grade $k_{\varphi\chi\psi}^\eta$.

§ 11. Direkte Zerlegung des Gruppenrings G von $\mathfrak{G}$ über Ω in einfache Rechtsideale.

Da die Charakteristik von Ω kein Teiler von g sein soll, ist der Gruppenring G von $\mathfrak{G}$ über Ω wie sein Zentrum Z eine halbeinfache Algebra. Der eindeutig bestimmten direkten Zerlegung

$$Z = \sum_\chi \Omega e_\chi$$

aus § 8 in r den einfachen Charakteren χ von $\mathfrak{G}$ zugeordnete zu Ω isomorphe Körper Ωe_χ mit den primitiven orthogonalen Idempotenten e_χ als Einselementen entspricht die direkte Zerlegung

$$(11, 1) \qquad G = \sum_\chi G_\chi \quad \text{mit} \quad G_\chi = G e_\chi = e_\chi G$$

in r den χ zugeordnete einfache invariante Teilalgebren G_χ mit den Einselementen e_χ. Diese direkten Summanden G_χ sind auch als die einfachen zweiseitigen Ideale von G gekennzeichnet.

Da die absolut-irreduziblen Darstellungsklassen von $\mathfrak{G}$ über Ω vertreten sein sollen, sind die G_χ aus (11, 1) volle Matrixalgebren über den Körpern Ωe_χ, und es gilt genauer folgendes. Sei e_χ^{ik} $(i, k = 1, \ldots, f_\chi)$ ein System von Matrizeneinheiten aus G_χ (nur bis auf innere Automorphismen von G_χ festliegend). Stellt man dann die speziellen Elemente $S e_\chi$ aus G_χ mit S aus $\mathfrak{G}$ in der Form

$$(11, 2) \qquad S e_\chi = \sum_{i,k} a_\chi^{ik}(S) e_\chi^{ik}$$

mit Koeffizienten $a_\chi^{ik}(S)$ aus Ω dar, so bilden die Matrizen $A_\chi(S) = (a_\chi^{ik}(S))$ eine irreduzible Darstellung von $\mathfrak{G}$ über Ω, und zwar gerade einen Vertreter Γ_χ aus der durch χ charakterisierten irreduziblen Darstellungsklasse.

Um letzteres einzusehen, bezeichne für den Augenblick $\Gamma_{\chi'}$ die Darstellung aus (11, 2). Zur Bestimmung ihres Charakters χ' genügt es, die Werte $\chi'(\mathfrak{S}) = h_{\mathfrak{S}}\,\chi'(S)$ für die Klassensummen $\mathfrak{S}$ zu berechnen. Diese ergeben sich aus

$$\mathfrak{S}\, e_\chi = \sum_{i,k} \Big(\sum_{S \text{ in } \mathfrak{S}} a_\chi^{ik}(S)\Big)\, e_\chi^{ik}$$

als die Summen der Diagonalglieder rechts. Durch Vergleich mit der nach § 8 bestehenden Formel

$$\mathfrak{S}\, e_\chi = \frac{h_{\mathfrak{S}}\,\chi(S)}{f_\chi}\, e_\chi = \sum_i \frac{h_{\mathfrak{S}}\,\chi(S)}{f_\chi}\, e_\chi^{ii}$$

findet man $h_{\mathfrak{S}}\,\chi'(S) = h_{\mathfrak{S}}\,\chi(S)$, also in der Tat $\chi' = \chi$.

Als volle Matrixalgebren der Grade f_χ über den Körpern $\Omega\, e_\chi$ haben die G_χ die Ω-Ränge f_χ^2. Idealtheoretisch ausgedrückt ist jedes der einfachen zweiseitigen G-Ideale G_χ als direkte Summe

$$G_\chi = \sum_\chi G_\chi^k \quad \text{mit} \quad G_\chi^k = e_\chi^{kk}\, G_\chi \tag{11, 3}$$

von f_χ einfachen G-Rechtsidealen G_χ^k vom Ω-Rang f_χ darstellbar. Die eine solche Zerlegung erzeugenden primitiven orthogonalen Idempotente e_χ^{kk} sind die Diagonalglieder eines Matrizeneinheitensystems e_χ^{ik} aus G_χ. Jedes G_χ^k liefert, als Ω-Darstellungsmodul von $\mathfrak{G}$ aufgefaßt, vermöge seiner Ω-Basen die irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{G}$ über Ω aus der durch χ charakterisierten Darstellungsklasse.

Ein spezielles System von Ω-Basen der G_χ^k bilden die Spalten der Matrix

$$E_\chi = (e_\chi^{ki}) \quad (i, k = 1, \ldots, f_\chi), \tag{11, 4}$$

die aus einem der Zerlegung (11, 3) angepaßten System von Matrizeneinheiten e_χ^{ik} unter Transposition zusammengestellt ist. Diese Basisspalten liefern gerade den dem Matrizeneinheitensystem e_χ^{ik} nach (11, 2) zugeordneten Vertreter Γ_χ aus der durch χ charakterisierten irreduziblen Darstellungsklasse von $\mathfrak{G}$ über Ω; denn nach (11, 2) stellt sich für sie der geläufige Formalismus der Erzeugung der Darstellung aus dem Ω-Darstellungsmodul G_χ^k so dar:

$$e_\chi^{ki}\, S = e_\chi^{ki}\, e_\chi\, S = e_\chi^{ki}\, S\, e_\chi = e_\chi^{ki} \sum_{l,j} a_\chi^{lj}(S)\, e_\chi^{lj} = \sum_j a_\chi^{ij}(S)\, e_\chi^{kj}.$$

Diese Formeln können zu der Matrizengleichung

$$E_\chi\, S = A_\chi(S)\, E_\chi \tag{11, 5}$$

zusammengefaßt werden.

Aus den Formeln (11, 2) erhält man durch Summation über χ gemäß (11, 1) das lineare Gleichungssystem

$$S = \sum_{\chi; i,k} a_\chi^{ik}(S)\, e_\chi^{ik}, \tag{11, 6}$$

welches die Elemente S aus $\mathfrak{G}$ durch die Matrizensysteme e_χ^{ik} aus den G_χ ausdrückt. Die Matrix dieses Systems ist die in (6, 6) eingeführte Matrix A der Stellenspalten der Darstellungen Γ_χ. Nach (6, 7), oder also nach den Orthogonalitätsrelationen (6, 4), ergibt sich umgekehrt das lineare Gleichungssystem

$$e_\chi^{ik} = \frac{1}{g} \sum_S f_\chi\, a_\chi^{ki}(S^{-1})\, S, \tag{11, 7}$$

welches die Matrizeneinheitensysteme e_χ^{ik} explizit durch die Gruppenelemente S ausdrückt. Unter Verwendung der in (11, 4) definierten Matrizen E_χ über den G_χ kann das System (11, 7) einfacher in der Gestalt

$$E_\chi = \frac{1}{g} \sum_S f_\chi A_\chi (S^{-1}) S \tag{11, 8}$$

geschrieben werden. Hierdurch wird das Verhalten (11, 5) der Matrizen E_χ bei Anwendung der Operatoren S aus $\mathfrak{G}$ in Evidenz gesetzt Entsprechend kann übrigens das System (11, 6) einfacher in der Gestalt

$$S = \sum_\chi \operatorname{Sp} (A_\chi(S) E'_\chi) \tag{11, 7'}$$

geschrieben werden. Jedoch kommt es darauf für die Zwecke dieser Arbeit nicht an.

Über das Verhalten (11, 5) der Matrizen E_χ bei Anwendung der Operatoren S aus $\mathfrak{G}$ gilt die folgende später benötigte Tatsache:

Die f_χ-reihig-quadratischen Matrizen E_χ über G werden durch die Beziehungen (11, 5) *und die Forderung ihrer Regularität (im Sinne über Ω linear-unabhängiger Spalten) genau bis auf eine Substitution*

$$E_\chi \to \alpha E_\chi$$

mit willkürlichem regulärem α aus G, also genau bis auf einen willkürlichen Automorphismus von G als G-Rechtsideal festgelegt.

Beweis. Es sei E_χ^* ein System f_χ-reihig-quadratischer Matrizen über G mit dem zu (11, 5) analogen Verhalten

$$E_\chi^* S = A_\chi(S) E_\chi^*$$

bei Anwendung der Operatoren S aus $\mathfrak{G}$. Dann sind die zu (11, 8) analogen Gleichungen

$$E_\chi^* = \frac{1}{g} \sum_S f_\chi A_\chi(S^{-1}) \alpha_S$$

wegen der Regularität der Stellenspaltenmatrix A aus (6, 6) eindeutig durch ein Elementsystem α_S aus G lösbar. Wegen der Voraussetzung über die E_χ^* hat diese Lösung α_S die Form

$$\alpha_S = \alpha S$$

mit einem Element α aus G, so daß also

$$E_\chi^* = \alpha E_\chi$$

ist. Umgekehrt liefert ersichtlich die Substitution $E_\chi \to \alpha E_\chi$ für jedes α aus G wieder eine Lösung der Beziehungen (11, 5). Nun ist

$$\alpha E_\chi = E_\chi A_\chi,$$

wo $A_\chi = A_\chi(\alpha) = (a_\chi^{ik})$ die $\alpha = \sum_{\chi; i, k} a_\chi^{ik} e_\chi^{ik}$ zugeordnete Matrix aus der (auf G erweiterten) Darstellung Γ_χ über Ω ist. Hiernach ist αE_χ dann und nur dann im angegebenen Sinne regulär, wenn A_χ regulär ist, und dies ist dann und nur dann für alle χ der Fall, wenn α regulär ist.

Sieht man von der Regularitätsforderung für E_χ^* ab, so ergibt dieser Beweis jedenfalls

$$E_\chi^* = E_\chi A_\chi$$

mit einer f_χ-reihig-quadratischen Matrix A_χ über Ω. Sei nun für einen festen einfachen Charakter χ eine f_χ-gliedrige Spalte $\mathfrak{e}_\chi$ mit der Eigenschaft

$$\mathfrak{e}_\chi S = A_\chi(S) \mathfrak{e}_\chi \tag{11, 9}$$

gegeben. Dann fülle man $\mathfrak{e}_\chi$ durch Nullspalten zu einer quadratischen Matrix E_χ^* auf und wähle im übrigen $E_{\chi'}^* = 0$ $(\chi' \neq \chi)$. So erhält man den für später wichtigen Zusatz:

Eine f_χ-gliedrige Spalte $\mathfrak{e}_\chi$ über G mit der Eigenschaft (11, 9) *entsteht aus der Matrix E_χ in der Form*

$$\mathfrak{e}_\chi = E_\chi \, \mathfrak{a}_\chi$$

mit einer f_χ-gliedrigen Spalte $\mathfrak{a}_\chi$ über Ω.

Die zueinander komplementären feineren Gleichungsysteme (11, 6), (11, 7) zwischen den Gruppenelementen S und den Matrizeneinheitensystemen e_χ^{ik} sind formal analog zu den zueinander komplementären gröberen Gleichungssystemen (8, 5), (8, 6) zwischen den Klassensummen $\mathfrak{S}$ und den primitiven Zentrumsidempotenten e_χ^{ik}.

Bringt man das Multiplikationsschema der Matrizeneinheiten e_χ^{ik} bei festen χ und ihre Orthogenalität für verschiedene χ in den expliziten Formeln (11, 7) zum Ausdruck, so ergeben sich gerade die Formeln (6, 9); hierin liegt deren begriffliche Bedeutung.

II. Invariante Erzeugung galoisscher Algebren.

§ 12. Die Normalbasen und Faktorbasen einer galoisschen Algebra.

Unter den Voraussetzungen aus § 6 über $\mathfrak{G}$ und Ω sei jetzt K eine galoissche Algebra über Ω mit der Gruppe $\mathfrak{G}$ im Sinne von E. M. I, § 1.

Betrachtet man K als Ω-Modul mit den Automorphismen aus $\mathfrak{G}$ als Rechtsoperatoren, so wird K zum Ω-Darstellungsmodul von $\mathfrak{G}$. Diesen und allgemeiner jeden in ihm enthaltenen Ω-Darstellungsmodul von $\mathfrak{G}$ nennt man auch *Galoismodul von* K *über* Ω.

Laut Definition einer galoisschen Algebra K/Ω mit der Gruppe $\mathfrak{G}$ ist K als Galoismodul über Ω isomorph zum Gruppenring G von $\mathfrak{G}$ über Ω als G-Rechtsideal[13]), liefert also die reguläre Darstellungsklasse von $\mathfrak{G}$, und zwar erhält man die reguläre Darstellung in ihrer Permutationsgestalt, wenn man die aus den Elementen S von $\mathfrak{G}$ gebildete Ω-Basis von G zugrunde legt. Die Isomorphismen J von G auf K ordnen dieser Ω-Basis S von G die *Normalbasen* θ^S von K/Ω zu.

Es sei

$$J = (S \to \theta^S), \text{ gegeben bereits durch } (1 \to \theta), \tag{12, 1}$$

ein fester Isomorphismus von G auf K. Dann erhält man alle übrigen solchen, indem man einen willkürlichen Automorphismus von G als G-Rechtsideal vorsetzt; der allgemeinste solche ist

$$K_\alpha = (S \to \alpha\, S), \text{ gegeben bereits durch } (1 \to \alpha), \tag{12, 2}$$

mit willkürlichem regulärem α aus G, also

$$\alpha = \sum_S a_S\, S, \quad a_S \text{ in } \Omega, \quad |a_{ST^{-1}}| \neq 0.$$

Statt dessen kann man auch den K_α durch J zugeordneten Automorphismus von K/Ω als Galoismodul hintersetzen; dieser ist gegeben durch

$$J^{-1} K_\alpha J = (\theta \to \sum_S a_S\, \theta^S), \quad a_S \text{ in } \Omega, \ |a_{ST^{-1}}| \neq 0.$$

Durch die letzteren Substitutionen erhält man also alle möglichen Normalbasiserzeugenden von K/Ω aus einer festen θ, wie auch ohne die gegebene begriffliche Unterbauung klar ist.

Es sollen jetzt die direkten Zerlegungen (11, 1) und (11, 3) das Gruppenrings G mittels eines festen Isomorphismus (12, 1) auf den Galoismodul K übertragen werden.

[13]) Für den Spezialfall galoisscher Körper K/Ω liegt dem der bereits in der Einleitung § 3, Anm. 5 zitierte Deuringsche Satz zugrunde.

Was zunächst die eindeutig bestimmte gröbere Zerlegung (11, 1) von G in die r einfachen zweiseitigen G-Ideale G_χ der Ω-Ränge f_χ^2 betrifft, so entspricht ihr bei J eine direkte Zerlegung

$$\mathrm{K} = \sum_\chi \mathrm{K}_\chi$$

von K in r Galoismoduln K_χ der Ω-Ränge f_χ^2. Diese brauchen keineswegs einfach zu sein; denn die Linksidealeigenschaft der G_χ in G hat für die K_χ in K kein Äquivalent, so daß sich die Einfachheit der G_χ als zweiseitige Ideale nicht übertragen läßt. Entsprechend den Hauptidealdarstellungen $G_\chi = e_\chi G$ mit den durch (8, 6) gegebenen primitiven orthogonalen Idempotenten e_χ werden die K_χ als Ω-Moduln erzeugt durch die *Charaktersummen*

$$\omega_\chi = \frac{1}{g} \sum_S f_\chi \chi(S^{-1})\, \theta^S \tag{12, 3}$$

und ihre Konjugierten

$$\omega_\chi^S = \frac{1}{g} \sum_T f_\chi \chi(T^{-1})\, \theta^{TS} = \frac{1}{g} \sum_T f_\chi \chi(S\, T^{-1})\, \theta^T.$$

Unter diesen Konjugierten sind demnach für jedes feste χ genau f_χ^2 über Ω linear-unabhängig.

Was ferner die feinere Zerlegung (11, 3) von G_χ in f_χ zueinander isomorphe einfache G-Rechtsideale G_χ^k vom Ω-Rang f_χ betrifft, so entspricht ihr bei J eine direkte Zerlegung

$$\mathrm{K}_\chi = \sum_k \mathrm{K}_\chi^k$$

von K_χ in f_χ zueinander isomorphe einfache Galoismoduln K_χ^k vom Ω-Rang f_χ, deren jeder die durch χ charakterisierte irreduzible Darstellungsklasse von $\mathfrak{G}$ über Ω liefert. Der in (11, 4) definierten Matrix $E_\chi = (e_\chi^{ki})$ der Matrizeneinheiten aus G_χ (die der Zerlegung (11, 3) angepaßt sind), aufgefaßt als Matrix aus Ω-Basisspalten der G_χ^k, entspricht bei J eine Matrix

$$\mathrm{W}_\chi = (\omega_\chi^{ik}) \qquad (i, k = 1, \ldots, f_\chi)$$

über K_χ aus Ω-Basisspalten der K_χ^k. Der expliziten Formel (11, 7) für die Matrizen E_χ entsprechend stellen sich die Matrizen explizit in der Form

$$\mathrm{W}_\chi = \frac{1}{g} \sum_S f_\chi A_\chi(S^{-1})\, \theta^S \tag{12, 4}$$

dar. Ihre $\sum_\chi f_\chi^2 = g$ Elemente ω_χ^{ik} bilden zusammen eine Ω-Basis von K. Insbesondere sind daher die f_χ Spalten jeder einzelnen Matrix W_χ linear-unabhängig über Ω, also die Matrizen W_χ über K in diesem Sinne regulär.

Dem Verhalten (11, 5) der Matrizen E_χ bei Anwendung der Operatoren S aus $\mathfrak{G}$ entspricht bei J das Verhalten

$$\mathrm{W}_\chi^S = A_\chi(S)\, \mathrm{W}_\chi \tag{12, 5}$$

der Matrizen W_χ bei Anwendung der Automorphismen S aus $\mathfrak{G}$. Dies Verhalten wird auch durch die explizite Darstellung (12, 4) in Evidenz gesetzt. Das entsprechende Verhalten haben dann auch die einzelnen Spalten der W_χ; hierdurch wird die obige Aussage präzisiert, daß jeder der zueinander isomorphen einfachen Galoismoduln K_χ^k die durch χ charakterisierte irreduzible Darstellungsklasse von $\mathfrak{G}$ über Ω liefert.

Da die Matrizen E_χ, wie in § 8 bewiesen, durch ihr Verhalten (11, 5) bei den Operatoren S aus $\mathfrak{G}$ und die Forderung ihrer Regularität genau bis auf einen willkürlichen Automorphismus von G als G-Rechtsideal festliegen, liegen die Matrizen W_χ durch ihr Verhalten (12, 5) bei den Automorphismen S aus $\mathfrak{G}$ und die Forderung ihrer Regularität genau bis auf einen willkürlichen Automorphismus von K/Ω als Galoismodul fest. Hiernach bilden für jedes System regulärer f_χ-reihig-quadratischer Matrizen $\mathrm{W}_\chi = (\omega_\chi^{ik})$ über K mit der Eigenschaft (12, 5) die $\sum_\chi f_\chi^2 = g$ Elemente ω_χ^{ik} eine Basis von K/Ω.

Eine solche Basis sei eine ***Faktorbasis*** von K/Ω genannt und auch als solche kurz mit W_χ bezeichnet.

Die sämtlichen Faktorbasen von K/Ω entstehen nach dem eben Gesagten aus einer W_χ durch Anwendung der sämtlichen Automorphismen von K/Ω als Galoismodul. Wie bei (12, 1), (12, 2) bemerkt, läuft das auf die Abänderungen $J \to K_\alpha J$ des zugrunde gelegten Isomorphismus von G auf K/Ω hinaus. Da diese Abänderungen gerade zu den sämtlichen Normalbasen von K/Ω führen, hängt also die Gesamtheit der Faktorbasen W_χ von K/Ω mit der Gesamtheit der Normalbasen θ^S von K/Ω umkehrbar eindeutig durch (12, 4), also durch das lineare Gleichungssystem

$$\omega_\chi^{ik} = \frac{1}{g} \sum_S f_\chi \, a_\chi^{ik}(S^{-1}) \, \theta^S \tag{12, 6}$$

und das dazu komplementäre

$$\theta^S = \sum_{\chi; i,k} a_\chi^{ik}(S) \, \omega_\chi^{ik} \tag{12, 7}$$

oder auch

$$\theta^S = \sum_\chi \mathrm{Sp}\,(A_\chi(S)\, W'_\chi) \tag{12, 7'}$$

zusammen. Formal entstehen diese beiden Systeme aus den beiden Systemen (11, 6), (11, 7) durch Anwendung des Isomorphismus J.

Die charakteristische Eigenschaft (12, 5) der Faktorbasen W_χ von K/Ω sei im folgenden kurz so ausgedrückt: W_χ *multipliziert sich bei* $\mathfrak{G}$ *vorne mit* Γ_χ. Es ist das die Verallgemeinerung der bekannten Eigenschaft der Lagrangeschen Resolventen des abelschen Falles. Die dort auftretenden Faktoren $\chi(S)$ werden dabei in ihrer Eigenschaft als Darstellungsmatrizen verallgemeinert. Die Verallgemeinerung als Charakterwerte liefert nur die Charaktersummen (12, 3), die aus den Matrizen (12, 4) einer Faktorbasis durch Bildung der Matrizenspuren

$$\omega_\chi = \mathrm{Sp}\,(W_\chi)$$

entstehen. Bei dieser Spurbildung geht die charakteristische Eigenschaft (12, 5) verloren. Somit sind die Charaktersummen ω_χ nicht die richtige Verallgemeinerung der Lagrangeschen Resolventen des abelschen Falles. Sie wurden hier nur beiläufig erwähnt, weil sie sich bei der schrittweise durchgeführten direkten Zerlegung von K in die einfachen Galoismoduln K_χ^k unterwegs (bei den noch nicht notwendig einfachen K_χ) einstellten. Im folgenden werden sie keine Rolle spielen.

Über den umkehrbar eindeutigen Zusammenhang (12, 6), (12, 7) zwischen den Normalbasen und Faktorbasen von K/Ω sei schließlich noch folgendes bemerkt. Jede Normalbasis θ^S liefert die reguläre Permutationsdarstellung Π von $\mathfrak{G}$, jede Faktorbasis W_χ nach (12, 5) eine vollständig in irreduzible Bestandteile Γ_χ mit den Vielfachheiten f_χ reduzierte Darstellung von $\mathfrak{G}$. Die Gleichungssysteme (12, 6), (12, 7) drücken also zusammen mit (12, 5) die aus der klassischen Darstellungstheorie bekannte Tatsache aus, daß Π durch Transformation mit der Stellenspaltenmatrix A aus (6, 6) vollständig in die Γ_χ mit den Vielfachheiten f_χ zerfällt:

$$A^{-1}\,\Pi\,A = \underset{\chi}{\Delta}\,(I_\chi \times \Gamma_\chi).$$

Man hätte auch diese Tatsache an die Spitze der hier entwickelten Theorie stellen können und wäre so schneller zu den weiterhin allein wichtigen Faktorbasen gelangt. Jedoch schien mir die Anknüpfung an die moderne Form der Darstellungstheorie als Strukturtheorie des Gruppenrings für ein tieferes Verständnis dienlicher. Dies wird insbesondere bei den im folgenden Paragraphen zu beweisenden Tatsachen hervortreten. Vermutlich wird diese Anknüpfung auch für die Anwendung auf die Klassenkörpertheorie wichtig sein.

§ 13. Zulässige Substitutionen für eine Faktorbasis.

Eine Faktorbasis W_χ von K/Ω liegt, wie bereits in § 12 festgestellt, bei vorgegebenem Vertretersystem Γ_χ der irreduziblen Darstellungsklassen von $\mathfrak{G}$ über Ω durch ihre charakteristische Eigenschaft (12, 5) und die Forderung ihrer Regularität (im Sinne von über Ω linear-unabhängigen Spalten) genau bis auf einen willkürlichen Automorphismus von K/Ω als Galoismodul fest. Dieser stellt sich in der Form

(13, 1) $\quad W_\chi \to W_\chi A_\chi$ mit willkürlichen regulären Matrizen A_χ über Ω dar.

Letzteres erkennt man, indem man den willkürlichen Automorphismus von K/Ω als Galoismodul gemäß (12, 1), (12, 2) durch eine Abänderung

$$J \to K_\alpha J \text{ mit willkürlichem regulärem } \alpha \text{ aus } G$$

des zugrunde gelegten Isomorphismus J von G aus K erzeugt. Bei dem vorgesetzten willkürlichen Automorphismus

$$K_\alpha = (S \to \alpha S)$$

von G als G-Rechtsideal haben nämlich nach dem Beweis in § 11 die Matrizen E_χ der den Γ_χ zugeordneten Matrizeneinheiten aus G das Verhalten

$$E_\chi \to \alpha E_\chi = E_\chi A_\chi,$$

wo $A_\chi = A_\chi(\alpha)$ die α zugeordneten Matrizen aus den (auf G erweiterten) Darstellungen Γ_χ über Ω sind. Durchläuft α alle regulären Elemente aus G, so durchlaufen die A_χ alle regulären Matrizen über Ω der Grade f_χ, weil Γ_χ als Darstellung von G zu G_χ isomorph, also volle Matrixalgebra über Ω ist. Bei $K_\alpha J$ gilt dann $E_\chi \to E_\chi A_\chi \to W_\chi A_\chi$, bei $J^{-1} K_\alpha J$ also in der Tat $W_\chi \to W_\chi A_\chi$.

Bei vorgegebenem Vertretersystem Γ_χ der irreduziblen Darstellungsklassen von $\mathfrak{G}$ über Ω sind demnach für eine Faktorbasis W_χ von K/Ω allein die Substitutionen (13, 1) zulässig. Den Übergängen

(13, 2) $\quad \Gamma_\chi \to B_\chi^{-1} \Gamma_\chi B_\chi$ mit willkürlichen regulären Matrizen B_χ über Ω

zu anderen Vertretersystemen entsprechen nach (12, 5) ersichtlich die Substitutionen

(13, 3) $\quad W_\chi \to B_\chi^{-1} W_\chi B_\chi$ mit willürlichen regulären Matrizen B_χ über Ω,

denen sich dann noch die Substitutionen (13, 1) überlagern. Im Hinblick auf letzteres könnten in (13, 3) die hinteren Faktoren B_χ auch weggelassen werden; es erweist sich jedoch als zweckmäßig, sie mitzuführen.

Für das Folgende ist es wichtig, die Tatsache (13, 1) über die Festlegung der Matrizen W_χ durch die Eigenschaft (12, 5) und ihre Regularität auf reduzible Darstellungen an Stelle der irreduziblen Γ_χ zu verallgemeinern, nämlich die folgende Tatsache zu beweisen:

Ist Γ eine beliebige Darstellung von $\mathfrak{G}$ über Ω vom Grade f, so wird eine f-reihig-quadratische Matrix W über K, die sich bei $\mathfrak{G}$ vorne mit Γ multipliziert, durch diese Eigenschaft bis auf eine Substitution $W \to W A$ mit einer willkürlichen Matrix A über Ω festgelegt.

Beweis. Es genügt ersichtlich, die Darstellung Γ in der vollständig reduzierten Gestalt

$$\Gamma_\pi = \underset{\xi}{\Delta} (I_\pi^\xi \times \Gamma_\xi)$$

vorauszusetzen, und zu beweisen, daß eine Matrix W mit der angegebenen Eigenschaft sich durch die Matrix

$$W_\pi = \underset{\xi}{\Delta} (I_\pi^\xi \times W_\xi),$$

die ja ebenfalls diese Eigenschaft hat, in der Form

$$W = W_\pi A$$

mit einer Matrix A über Ω darstellt. Dazu genügt es ferner zu beweisen, daß eine f-gliedrige Spalte $\mathfrak{w}$ über K, die sich bei $\mathfrak{G}$ vorne mit Γ_π multipliziert, die also die Eigenschaft

$$\mathfrak{w}^S = A_\pi(S)\,\mathfrak{w} \text{ mit } A_\pi(S) = \underset{\xi}{\Delta}\,(I_\pi^\xi \times A_\xi(S))$$

hat, sich in der Form

$$\mathfrak{w} = \mathrm{W}_\pi\,\mathfrak{a}$$

mit einer f-gliedrigen Spalte $\mathfrak{a}$ über Ω darstellt. Diese Aussage reduziert sich aber infolge des diagonalen Zerfallens von Γ_π und W_π auf die entsprechende Aussage für irreduzible Darstellungen, die ihrerseits aus dem Zusatz in § 11 durch Ausübung eines Isomorphismus J von G auf K folgt.

Wegen der Basiseigenschaft W_χ ist dabei $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{w}$ und somit vorher A durch W *eindeutig* bestimmt.

§ 14. Das Multiplikationsschema einer Faktorbasis.

Aus dem durch (9, 3) gegebenen Multiplikationsschema

$$\Gamma_\chi \times \Gamma_\psi = P_{\chi,\psi}^{-1}\,\Gamma_{\chi\psi}\,P_{\chi,\psi}$$

eines Vertretersystems Γ_χ der irreduziblen Darstellungsklassen von $\mathfrak{G}$ über Ω ergibt sich ein entsprechendes Multiplikationsschema für eine zugehörige Faktorbasis W_χ von K/Ω.

Analog zu (9, 4) (siehe auch schon im Beweis aus § 13) sei dazu

$$\mathrm{W}_{\chi\psi} = \underset{\xi}{\Delta}\,(I_{\chi\psi}^\xi \times \mathrm{W}_\xi) \tag{14, 1}$$

gesetzt. Nach (12, 5) multipliziert sich dann bei $\mathfrak{G}$ einerseits $\mathrm{W}_{\chi\psi}$ vorne mit $\Gamma_{\chi\psi}$ und somit $P_{\chi,\psi}^{-1}\,\mathrm{W}_{\chi\psi}\,P_{\chi,\psi}$ vorne mit $P_{\chi,\psi}^{-1}\,\Gamma_{\chi\psi}\,P_{\chi,\psi}$, andererseits $\mathrm{W}_\chi \times \mathrm{W}_\psi$ vorne mit $\Gamma_\chi \times \Gamma_\psi$. Da hiernach $P_{\chi,\psi}^{-1}\,\mathrm{W}_{\chi\psi}\,P_{\chi,\psi}$ und $\mathrm{W}_\chi \times \mathrm{W}_\psi$ bei $\mathfrak{G}$ dieselbe vordere Multiplikation erfahren, ergibt sich nach dem Satz aus § 13 für die W_χ ein Multiplikationsschema der Gestalt

$$\mathrm{W}_\chi \times \mathrm{W}_\psi = P_{\chi,\psi}^{-1}\,\mathrm{W}_{\chi\psi}\,P_{\chi,\psi} \cdot C_{\chi,\psi}, \tag{14, 2}$$

wo das Transformatorensystem $P_{\chi,\psi}$ die Bedeutung aus (9, 3) hat und $C_{\chi,\psi}$ ein durch dieses Schema eindeutig festgelegtes *Faktorensystem* aus Matrizen über Ω der Grade $f_{\chi\psi} = f_\chi\,f_\psi$ ist. Durch die an sich entbehrliche Mitführung der hinteren Faktoren $P_{\chi,\psi}$ in (14, 2) wird erreicht, daß das Faktorensystem $C_{\chi,\psi}$ unabhängig von der Normierung des Transformatorensystems $P_{\chi,\psi}$ im Sinne von (9, 5), (9, 6) ist, also allein durch die Faktorbasis W_χ von K/Ω eindeutig festliegt.

Bei den für festes Vertretersystem Γ_χ nach (13, 1) allein noch zulässigen Substitutionen

$$\mathrm{W}_\chi \to \mathrm{W}_\chi\,A_\chi$$

mit willkürlichen regulären Matrizen A_χ über Ω erfährt das Faktorensystem $C_{\chi,\psi}$ die Substitutionen

$$C_{\chi,\psi} \to (P_{\chi,\psi}^{-1}\,A_{\chi\psi}\,P_{\chi,\psi})^{-1}\,C_{\chi,\psi}\,(A_\chi \times A_\psi) \tag{14, 3}$$

in *assoziierte* Systeme, wo zu (14, 1) analog

$$A_{\chi\psi} = \underset{\xi}{\Delta}\,(I_{\chi\psi}^\xi \times A_\xi)$$

gesetzt ist. Die durch diese Substitutionen gelieferte *Klasse* $\mathfrak{C}$ *assoziierter Faktorensysteme* $C_{\chi,\psi}$ *zur Charakteralgebra* X *von* $\mathfrak{G}$ *über* Ω ist demnach eine Invariante der galoisschen Algebra K/Ω, und zwar eine diese Algebra kennzeichnende Invariante, da durch das Faktorensystem $C_{\chi,\psi}$ das Multiplikationsschema (14, 2) einer Faktorbasis W_χ von K/Ω bestimmt ist. Man beachte dazu, daß das in (14, 2) ebenfalls eingehende Transformatorensystem $P_{\chi,\psi}$ bereits durch die Gruppe $\mathfrak{G}$ und das Vertretersystem Γ_χ ihrer irreduziblen

Darstellungsklassen über Ω bestimmt ist. Die eigentlichen Multiplikationskonstanten der Faktorbasis W_χ sind Linearformen über Ω in den Elementen der Faktoren $C_{\chi,\psi}$, deren Koeffizienten sich durch die Transformatoren $P_{\chi,\psi}$ bestimmen.

Es wird im allgemeinen genügen, das Vertretersystem Γ_χ der irreduziblen Darstellungsklassen von $\mathfrak{G}$ über Ω festzuhalten. Der Vollständigkeit halber sei jedoch auch angegeben, wie die Faktorensystemklasse $\mathfrak{C}$ von der Wahl des Vertretersystems Γ_χ abhängt.

Bei den Übergängen (13, 2), (13, 3) zu anderen Vertretersystemen und Faktorbasen

$$\Gamma_\chi \to B_\chi^{-1}\,\Gamma_\chi\,B_\chi, \quad W_\chi \to B_\chi^{-1}\,W_\chi\,B_\chi$$

mit willkürlichen regulären Matrizen B_χ über Ω erfährt zunächst das Transformatorensystem die Substitutionen

$$P_{\chi,\psi} \to B_{\chi\psi}^{-1}\,P_{\chi,\psi}\,(B_\chi \times B_\psi), \tag{14, 4}$$

wo wieder zu (14, 1) analog

$$B_{\chi\psi} = \underset{\xi}{\Delta}\,(I_{\chi\psi}^{\xi} \times B_\xi)$$

gesetzt ist, und dann das Faktorensystem $C_{\chi,\psi}$ die Substitutionen

$$C_{\chi,\psi} \to (B_\chi \times B_\psi)^{-1}\,C_{\chi,\psi}\,(B_\chi \times B_\psi), \tag{14, 5}$$

denen sich für die Klasse $\mathfrak{C}$ wieder noch die Substitutionen (14, 3) überlagern.

§ 15. Die Kommutativ- und Assoziativrelationen für das Faktorensystem.

Eine galoissche Algebra K/Ω mit der Gruppe $\mathfrak{G}$ liegt laut der in E. M. I, § 1 gegebenen Definition vor, wenn folgende vier Tatsachen erfüllt sind:

(I). K/Ω ist eine Algebra.

(II.) K/Ω hat $\mathfrak{G}$ als Automorphismengruppe und ist als Ω-Modul mit $\mathfrak{G}$ als Rechtsoperatorenbereich isomorph zum Gruppenring G von $\mathfrak{G}$ über Ω als G-Rechtsideal, d. h. liefert als Ω-Darstellungsmodul von $\mathfrak{G}$ die reguläre Darstellungsklasse.

(III.) K/Ω ist kommutativ und assoziativ.

(IV.) K/Ω ist halbeinfach und separabel; letzteres kann auch dadurch ausgedrückt werden, daß K/Ω bei jeder Grundkörperweiterung halbeinfach bleibt[14]).

Von diesen vier Definitionseigenschaften einer galoisschen Algebra K/Ω wurde in §§ 12, 13 zur Definition der Faktorbasen W_χ und Herleitung ihrer Eigenschaften nur (II.) benutzt, in § 14 zur Aufstellung des Multiplikationsschemas einer Faktorbasis W_χ und Definition des zugehörigen Faktorensystems $C_{\chi,\psi}$ dann auch (I.). Es bleibt jetzt zu untersuchen, wie sich die beiden weiteren Definitionseigenschaften (III.) und (IV.) in Eigenschaften des K/Ω kennzeichnenden Faktorensystems $C_{\chi,\psi}$ einer Faktorbasis W_χ widerspiegeln. Das soll für (III.) in diesem § 15, für (IV.) im folgenden § 16 geschehen.

Die Kommutativität der Algebra K/Ω drückt sich nach (10, 1) in den zu (10, 2) analogen Beziehungen

$$W_\psi \times W_\chi = V_{\chi,\psi}^{-1}\,(W_\chi \times W_\psi)\,V_{\chi,\psi}$$

für je zwei einfache Charaktere χ, ψ aus. Nach (14, 2) hat man nun einerseits

$$W_\psi \times W_\chi = P_{\psi,\chi}^{-1}\,W_{\chi\psi}\,P_{\psi,\chi}\cdot C_{\psi,\chi},$$

andrerseits

$$\begin{aligned} V_{\chi,\psi}^{-1}\,(W_\chi \times W_\psi)\,V_{\chi,\psi} &= V_{\chi,\psi}^{-1}\cdot P_{\chi,\psi}^{-1}\,W_{\chi\psi}\,P_{\chi,\psi}\cdot C_{\chi,\psi}\cdot V_{\chi,\psi} \\ &= (P_{\chi,\psi}\,V_{\chi,\psi})^{-1}\,W_{\chi\psi}\,(P_{\chi,\psi}\,V_{\chi,\psi})\cdot V_{\chi,\psi}^{-1}\,C_{\chi,\psi}\,V_{\chi,\psi}. \end{aligned}$$

---

[14]) Herr H. W. Knobloch, dem ich manchen wertvollen Hinweis zu einzelnen Punkten dieser Arbeit verdanke, bemerkt, daß die Separabilität schon aus (II.) folgt und daher in (IV.) nicht besonders gefordert zu werden braucht.

Auf Grund der Kommutativrelationen (10, 3) für das Transformatorensystem $P_{\chi,\psi}$ und wegen des eindeutigen Festliegens des Faktorensystems durch das Multiplikationsschema spiegelt sich hiernach die Kommutativität von K/Ω in den *Kommutativrelationen*

$$C_{\psi,\chi} = V_{\chi,\psi}^{-1}\, C_{\chi,\psi}\, V_{\chi,\psi} \tag{15, 1}$$

für das Faktorensystem $C_{\chi,\psi}$ wieder.

Die Assoziativität der Algebra K/Ω drückt sich in den Beziehungen

$$(\mathrm{W}_\varphi \times \mathrm{W}_\chi) \times \mathrm{W}_\psi = \mathrm{W}_\varphi \times (\mathrm{W}_\chi \times \mathrm{W}_\psi)$$

für je drei einfache Charaktere φ, χ, ψ aus. Nach (14, 2) hat man nun analog zu (10, 6) zunächst

$$(\mathrm{W}_\varphi \times \mathrm{W}_\chi) \times \mathrm{W}_\psi = (P_{\varphi,\chi} \times I_\psi)^{-1} (\mathrm{W}_{\varphi\chi} \times \mathrm{W}_\psi)\, (P_{\varphi,\chi} \times I_\psi) \cdot (C_{\varphi,\chi} \times I_\psi), \tag{15, 2_1}$$

$$\mathrm{W}_\varphi \times (\mathrm{W}_\chi \times \mathrm{W}_\psi) = (I_\varphi \times P_{\chi,\psi})^{-1} (\mathrm{W}_\varphi \times W_{\chi\psi})\, (I_\varphi \times P_{\chi,\psi}) \cdot (I_\varphi \times C_{\chi,\psi}). \tag{15, 2_2}$$

Beachtet man, daß analog zu (10, 7) auch

$$\underset{\xi}{\Delta}\, (I_{\varphi\chi}^{\xi} \times \mathrm{W}_{\xi\psi}) = U_{\varphi\chi,\psi}^{-1}\, \mathrm{W}_{\varphi\chi\psi}\, U_{\varphi\chi,\psi}$$

mit der dort definierten Permutationsmatrix $U_{\varphi\chi,\psi}$ gilt, so hat man nach (14, 2) und (10, 8) analog zu (10, 9), (10, 8) weiter

$$\mathrm{W}_{\varphi\chi} \times \mathrm{W}_\psi = P_{\varphi\chi,\psi}^{-1}\, \mathrm{W}_{\varphi\chi\psi}\, P_{\varphi\chi,\psi} \cdot C_{\varphi\chi,\psi}, \tag{15, 3_1}$$

$$\mathrm{W}_\varphi \times \mathrm{W}_{\chi\psi} = P_{\varphi,\chi\psi}^{-1}\, \mathrm{W}_{\varphi\chi\psi}\, P_{\varphi,\chi\psi} \cdot C_{\varphi\chi\psi} \tag{15, 3_2}$$

mit

$$C_{\varphi\chi,\psi} = \underset{\xi}{\Delta}\, (I_{\varphi\chi}^{\xi} \times C_{\xi,\psi}), \tag{15, 4_1}$$

$$C_{\varphi,\chi\psi} = V_{\chi\psi,\varphi}^{-1}\, C_{\chi\psi,\varphi}\, V_{\chi\psi,\varphi}. \tag{15, 4_2}$$

Trägt man die Formeln (15, 3) in (15, 2) ein und beachtet die Assoziativrelationen (10, 10) für das Transformatorensystem $P_{\chi,\psi}$, so folgt aus der eindeutigen Bestimmtheit des in den entstehenden Relationen auftretenden Faktorensystems, daß sich die Assoziativität von K/Ω in den *Assoziativrelationen*

$$\begin{aligned} &(P_{\varphi,\chi} \times I_\psi)^{-1}\, C_{\varphi\chi,\psi}\, (P_{\varphi,\chi} \times I_\psi) \cdot (C_{\varphi,\chi} \times I_\psi) \\ &= (I_\varphi \times P_{\chi,\psi})^{-1}\, C_{\varphi,\chi\psi}\, (I_\varphi \times P_{\chi,\psi}) \cdot (I_\varphi \times C_{\chi,\psi}) \end{aligned} \tag{15, 5}$$

für das Faktorensystem $C_{\chi,\psi}$ widerspiegelt, in denen die Faktoren $C_{\varphi,\chi\psi}$ und $C_{\varphi,\chi\psi}$ für zusammengesetzten ersten bzw. zweiten Charakter durch die Formeln (15, 4) definiert sind.

§ 16. Die Regularitätsbedingung für das Faktorensystem.

Wenn die Definitionseigenschaften § 15, (I.), (II.), (III.) einer galoisschen Algebra K/Ω erfüllt sind, so ist für das Erfülltsein von (IV.) notwendig und hinreichend, daß für eine Basis ω_μ von K/Ω die Determinante

$$d(\omega_\mu) = |\mathrm{sp}(\omega_\mu\, \omega_\nu)| \neq 0 \qquad (\mu, \nu = 1, \ldots, g)$$

ist. Dabei stellt sich die aus der charakteristischen Gleichung zu bildende Spur $\mathrm{sp}(\omega)$ eines Elements ω aus K auch in der Form

$$\mathrm{sp}(\omega) = \sum_S \omega^S \tag{16, 1}$$

dar, also als Summe der durch die Automorphismen S aus $\mathfrak{G}$ gelieferten Konjugierten von ω. Diese Tatsachen ergeben sich nach dem Muster der Beweise aus der allgemeinen Algebrentheorie ohne Schwierigkeit im Anschluß an die Ausführungen in E. M. 1, § 1.

Um demnach die Definitionseigenschaft § 15, (IV.) in einer Eigenschaft des K/Ω kennzeichnenden Faktorensystems $C_{\chi,\psi}$ widerzuspiegeln, genügt es, die Diskriminante $d(W_\chi)$ einer Faktorbasis W_χ von K/Ω durch das zugehörige Faktorensystem $C_{\chi,\psi}$ auszudrücken.

Diese Basisdiskriminante $d(\mathrm{W}_\chi)$ läßt sich nun aus dem System

$$\mathrm{W}_\chi \times \mathrm{W}_\psi = (\omega_\chi^{ik}\,\omega_\psi^{i'k'}) \qquad \left\{\begin{array}{l}\text{Zeilenindizes } i,\ i'\\ \text{Spaltenindizes } k,\ k'\end{array}\right\}$$

der linken Seiten des Multiplikationsschemas (14, 2) durch den folgenden formalen Prozeß gewinnen. Man nehme zunächst mit den Zeilen- und Spaltenindizes die Umordnung

$$\mathfrak{J}(\mathrm{W}_\chi \times \mathrm{W}_\psi) = (\omega_\chi^{ik}\,\omega_\psi^{i'k'}) \qquad \left\{\begin{array}{l}\text{Zeilenindizes } i,\ k\\ \text{Spaltenindizes } i',\ k'\end{array}\right\}$$

vor. Ferner rechne man auch noch χ als Zeilenindex, ψ als Spaltenindex, ganz entsprechend wie bei der Stellenspaltenmatrix A in (6, 6), so daß das (zugleich Kroneckersche und gewöhnliche) Produkt einer g-gliedrigen Spalte und einer g-gliedrigen Zeile entsteht. Dann ist die durch elementweise Spurbildung gelieferte Determinante

$$(16,\ 2) \qquad d(\mathrm{W}_\chi) = |\mathfrak{J}(\mathrm{sp}(\mathrm{W}_\chi \times \mathrm{W}_\psi))| = |\mathrm{sp}(\omega_\chi^{ik}\,\omega_\psi^{i'k'})| \quad \left\{\begin{array}{l}\text{Zeilenindizes } \chi;\ i,\ k\\ \text{Spaltenindizes } \psi;\ i',\ k'\end{array}\right\}$$

die zu bestimmende Basisdiskriminante.

Um die so dargestellte Basisdiskriminante $d(W_\chi)$ durch das Faktorensystem $C_{\chi,\psi}$ auszudrücken, ist der entsprechende Prozeß auch mit den rechten Seiten des Multiplikationsschemas (14, 2) durchzuführen. Dazu sei vorweg folgendes bemerkt.

Jeder

irreduziblen Darstellung Γ_χ, Matrizen $A_\chi(S)$, Charakterwerte $\chi(S)$

entspricht dual die transponierte reziproke oder auch

adjungierte Darstellung Γ'^{-1}_χ, Matrizen $A'_\chi(S)^{-1} = A'_\chi(S^{-1})$,
Charakterwerte $\bar{\chi}(S) = \chi(S^{-1})$.

Für den ihr entsprechenden Vertreter $\Gamma_{\bar{\chi}}$ in dem zugrunde gelegten Vertretersystem der irreduziblen Darstellungsklassen von $\mathfrak{G}$ über Ω besteht dann eine Beziehung

$$(16,\ 3) \qquad \Gamma_{\bar{\chi}} = P_\chi^{-1}\,\Gamma'^{-1}_\chi\,P_\chi$$

mit einer von S unabhängigen regulären Matrix P_χ über Ω vom Grade f_χ. In dem Multiplikationsschema (7, 1) der einfachen Charaktere χ sind nach (7, 2) und den Orthogonalitätsrelationen (6, 1) die Vielfachheiten des Hauptcharakters $\xi = 1$ gegeben, durch

$$(16,\ 4) \qquad k^1_{\chi,\psi} = e_{\chi,\bar{\psi}}.$$

Es werde nun der oben beschriebene Prozeß zunächst mit dem Multiplikationsschema (9, 3) des Vertretersystems Γ_χ vorgenommen, wobei als formales Analogon der Spurbildung gemäß (16, 1) die Summation über die Gruppenelemente S tritt. Nach den Orthogonalitätsrelationen (6, 4) mit $\psi = 1$ gilt

$$(16,\ 5) \qquad \sum_S A_\chi(S) = g\,e_{\chi,1}.$$

Aus (9, 3), (9, 4) ergibt sich nach (16, 4), (16, 5) das Formelsystem

$$\sum_S (A_\chi(S) \times A_\psi(S)) = P^{-1}_{\chi,\psi} \cdot \sum_S A_{\chi\psi}(S) \cdot P_{\chi,\psi} = P^{-1}_{\chi,\psi} \cdot \underset{\xi}{\Delta}\left(I^\xi_{\chi\psi} \times \sum_S A_\xi(S)\right) \cdot P_{\chi,\psi}$$

$$= g\,e_{\chi,\bar{\psi}}\,P^{-1}_{\chi,\bar{\chi}}\begin{pmatrix}1 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{pmatrix} P_{\chi,\bar{\chi}},$$

wobei die feste Reihenfolge der einfachen Charaktere ξ als mit dem Hauptcharakter $\xi = 1$ beginnend angenommen ist. Nimmt man hierin die oben definierte Umordnung $\mathfrak{J}$ der Zeilen- und Spaltenindizes vor, so erhält man, wie leicht zu sehen, das Formelsystem

$$(16, 6) \qquad \mathfrak{J}\Big[\sum_S (A_\chi(S) \times A_\psi(S))\Big] = g\, e_{\chi,\bar\psi}(\mathfrak{Z}_1(P'^{-1}_{\chi,\bar\chi}) \times \mathfrak{Z}_1(P_{\chi,\bar\chi}))$$

mit folgender Bedeutung der beiden Faktoren des Kroneckerschen Produkts rechts. Der Tatsache gemäß, daß nach (9, 3) die Zeilen von $P^{-1}_{\chi,\bar\chi}$ den Zeilenpaaren i, $\bar i$ und die Spalten von $P_{\chi,\bar\chi}$ den Spaltenpaaren k, $\bar k$ von Γ_χ, $\Gamma_{\bar\chi}$ zugeordnet sind, entsteht $\mathfrak{Z}_1(P'^{-1}_{\chi,\bar\chi})$ indem man die (dem Hauptcharakter zugeordnete) erste Spalte von $P^{-1}_{\chi,\bar\chi}$, oder also die erste Zeile von $P'^{-1}_{\chi,\bar\chi}$ zu einer quadratischen Matrix mit i, $\bar i$ als Zeilen- und Spaltenindex umordnet, und $\mathfrak{Z}_1(P_{\chi,\bar\chi})$ entsprechend, indem man die erste Zeile von $P_{\chi,\bar\chi}$ zu einer quadratischen Matrix mit k, $\bar k$ als Zeilen- und Spaltenindex umordnet. Rechnet man auch noch χ, ψ als Zeilen- und Spaltenindex und geht zur Determinante über, so erhält man die Formel

$$(16, 7) \qquad \Big|\mathfrak{J}\Big[\sum_S (A_\chi(S) \times A_\psi(S))\Big]\Big| = g^g \prod_\chi (|\mathfrak{Z}_1(P'^{-1}_{\chi,\bar\chi})|\,|\mathfrak{Z}_1(P_{\chi,\bar\chi})|)^{f_\chi}.$$

Diese Determinante läßt sich auch noch auf eine andere Weise bestimmen, indem man nämlich die Summe links direkt nach den Orthogonalitätsrelationen (6, 4) unter Beachtung von (16, 3) berechnet. So ergibt sich zunächst das Formelsystem

$$\begin{aligned}\sum_S (A_\chi(S) \times A_\psi(S)) &= (I_\chi \times P_{\bar\psi})^{-1} \sum_S (A_\chi(S) \times A'_{\bar\psi}(S^{-1}))\,(I_\chi \times P_{\bar\psi}) \\ &= \frac{g}{f_\chi}\, e_{\chi,\bar\psi}\,(I_\chi \times P_\chi)^{-1}\,(e_{ii'}\, e_{kk'})\,(I_\chi \times P_\chi) \qquad \left\{\begin{matrix}\text{Zeilenindizes } i, i' \\ \text{Spaltenindizes } k, k'\end{matrix}\right\} \\ &= \frac{g}{f_\chi}\, e_{\chi,\bar\psi}\,(I_\chi \times P_\chi)^{-1} \cdot \mathfrak{J}(I_\chi \times I_\chi) \cdot (I_\chi \times P_\chi).\end{aligned}$$

Durch Ausführung der Umordnung $\mathfrak{J}$ entsteht hieraus, wie leicht zu sehen, das Formelsystem

$$(16, 8) \qquad \mathfrak{J}\Big[\sum_S (A_\chi(S) \times A_\psi(S))\Big] = \frac{g}{f_\chi}\, e_{\chi,\bar\psi}\,(P'^{-1}_\chi \times P_\chi).$$

Rechnet man wieder auch χ, ψ als Zeilen- und Spaltenindex, so erhält man die Formel

$$(16, 9) \qquad \Big|\mathfrak{J}\Big[\sum_S (A_\chi(S) \times A_\psi(S))\Big]\Big| = \frac{g^g}{\prod_\chi f_\chi^{f_\chi}}.$$

Durch Vergleich von (16, 9) und (16, 7) ergibt sich die Determinantenformel

$$(16, 10) \qquad \prod_\chi (|f_\chi\, \mathfrak{Z}_1(P'^{-1}_{\chi,\bar\chi})|\,|\mathfrak{Z}_1(P_{\chi,\bar\chi})|)^{f_\chi} = 1.$$

Nach (16, 8), (16, 6) mit $\psi = \bar\chi$ gilt diese Formel sogar beitragsweise für die einzelnen χ. Hiernach sind die aus den ersten Zeilen von $P'^{-1}_{\chi,\bar\chi}$, $P_{\chi,\bar\chi}$ in der oben angegebenen Weise gebildeten Matrizen $\mathfrak{Z}_1(P'^{-1}_{\chi,\bar\chi})$, $\mathfrak{Z}_1(P_{\chi,\bar\chi})$ regulär.

Nunmehr werde auf die vorstehend beschriebene Art die Basisdiskriminante (16, 2) berechnet. Analog zu (16, 5) gilt nach (12, 5) und (16, 1)[15]) hier

$$(16, 11) \qquad \mathrm{sp}\,(\mathrm{W}_\chi) = \sum_S \mathrm{W}_\chi^S = \sum_S A_\chi(S) \cdot \mathrm{W}_\chi = g\, e_{\chi,1}\, \mathrm{W}_1 = g\, e_{\chi,1}\, C_{1,1},$$

letzteres da nach dem Multiplikationsschema (14, 2) speziell (einreihige Matrizen!)

$$\mathrm{W}_1\, \mathrm{W}_1 = P^{-1}_{1,1}\, \mathrm{W}_1\, P_{1,1} \cdot C_{1,1} = \mathrm{W}_1\, C_{1,1}$$

[15]) Die hier auftretende, elementweise zu bildende Spur $\mathrm{sp}\,(\mathrm{W}_\chi)$ ist nicht mit der in § 12 erwähnten Matrizenspur $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{W}_\chi)$ zu verwechseln.

mit $W_1 \neq 0$, $C_{1,1} \neq 0$, also $\frac{W_1}{C_{1,1}} = 1$ das Einselement von K ist. Unter Berücksichtigung der formalen Abweichungen in (16, 11), (14, 2) gegenüber (16, 5), (9, 3) ergibt sich durch die analoge Rechnung wie bei (16, 6) hier das Formelsystem

$$\mathfrak{J}(\mathrm{sp}(W_\chi \times W_\psi)) = g\, e_{\chi,\bar\psi}\, C_{1,1}(\mathfrak{Z}_1(P'^{-1}_{\chi,\bar\chi}) \times \mathfrak{Z}_1(P_{\chi,\bar\chi}\, C_{\chi,\bar\chi})),$$

und daraus analog zu (16, 7) die Formel

$$(16,\,12)\qquad d(W_\chi) = |\mathfrak{J}(\mathrm{sp}(W_\chi \times W_\psi))| = g^g\, C^g_{1,1} \prod_\chi (|\mathfrak{Z}_1(P'^{-1}_{\chi,\bar\chi})|\,|\mathfrak{Z}_1(P_{\chi,\bar\chi}\, C_{\chi,\bar\chi})|)^{f_\chi}$$

für die Diskriminante der Faktorbasis W_χ von K/Ω. Sie kann nach (16, 10) auch in der Form

$$(16,\,12')\qquad d(W_\chi) = |\mathfrak{J}(\mathrm{sp}(W_\chi \times W_\psi))| = g^g\, C^g_{1,1} \prod_\chi \left(\frac{|\mathfrak{Z}_1(P_{\chi,\bar\chi}\, C_{\chi,\bar\chi})|}{|f_\chi\, \mathfrak{Z}_1(P_{\chi,\bar\chi})|}\right)^{f_\chi}$$

geschrieben werden[16]).

Nach diesen Formeln spiegelt sich die Halbeinfachheit und Separabilität von K/Ω in der *Regularitätsbedingung*

$$(16,\,13)\qquad |\mathfrak{Z}_1(P_{\chi,\bar\chi}\, C_{\chi,\bar\chi}| \neq 0$$

für die speziellen Faktoren $C_{\chi,\bar\chi}$ des Faktorensystems $C_{\chi,\psi}$ wider, in die auch die speziellen Transformatoren $P_{\chi,\bar\chi}$ des Transformatorensystems $P_{\chi,\psi}$ eingehen, und zwar entsteht, noch einmal gesagt, $\mathfrak{Z}_1(P_{\chi,\bar\chi}\, C_{\chi,\bar\chi})$, indem man die erste (dem Hauptcharakter zugeordnete) Zeile von $P_{\chi,\bar\chi}\, C_{\chi,\bar\chi}$, deren Glieder den Spaltenpaaren k, $\bar k$ von Γ_χ, $\Gamma_{\bar\chi}$ (oder hier richtiger W_χ, $W_{\bar\chi}$) zugeordnet sind, zu einer quadratischen Matrix mit k, $\bar k$ als Zeilen- und Spaltenindex umordnet.

Aus dem Erfülltsein der Regularitätsbedingung (16, 13) für die speziellen Faktoren $C_{\chi,\bar\chi}$ und der Kommutativ- und Assoziativrelationen (15, 1), (15, 5) für das Faktorensystem $C_{\chi,\psi}$ folgt im allgemeinen Falle nicht, daß die sämtlichen Faktoren $C_{\chi,\psi}$ reguläre Matrizen im gewöhnlichen Sinne sind. Im abelschen Spezialfall trifft dies zu (vergl. die Anmerkung 4 in § 2) und läßt sich auch leicht direkt rechnerisch zeigen. Ist nämlich $c_{\chi,\psi}$ ein kommutatives assoziatives Faktorensystem zur Charaktergruppe X einer abelschen Gruppe $\mathfrak{G}$, und gilt

$$c_{\chi,\bar\chi} \neq 0 \quad \text{für alle } \chi,$$

so hat man nach den Assoziativrelationen mit χ, $\bar\chi$, 1 zunächst

$$c_{11}\, c_{\chi,\bar\chi} = c_{\chi,\bar\chi}\, c_{\bar\chi,1}, \quad \text{also} \quad c_{\chi,1} = c_{1,1} \neq 0 \text{ für alle } \chi,$$

und nach den Assoziativrelationen mit χ, ψ, $\bar\psi$ dann

$$c_{\chi\psi,\bar\psi}\, c_{\chi,\psi} = c_{\chi,1}\, c_{\psi,\bar\psi}, \quad \text{also} \quad c_{\chi,\psi} \neq 0 \text{ für alle } \chi,\ \psi.$$

§ 17. Erzeugung durch das Faktorensystem.

Es seien nach wie vor die Gruppe $\mathfrak{G}$, der Körper Ω, das Vertretersystem Γ_χ der irreduziblen Darstellungsklassen von $\mathfrak{G}$ über Ω und das zugehörige Transformatorensystem $P_{\chi,\psi}$ fest zugrunde gelegt.

Während aber im vorhergehenden eine galoissche Algebra K/Ω mit der Gruppe $\mathfrak{G}$ als gegeben betrachtet, vermöge einer Faktorbasis W_χ zu Γ_χ das zugehörige Faktoren-

[16]) Der vorbereitende Nachweis der Determinantenformel (16, 10) ist entbehrlich. Da nämlich $\mathfrak{Z}_1(P'^{-1}_{\chi,\bar\chi})$ nur von $\mathfrak{G}$, nicht von K, abhängt, kann $|\mathfrak{Z}_1(P'^{-1}_{\chi,\bar\chi})| \neq 0$ auch aus der Formel (16, 12) selbst erschlossen werden, indem man K auf die voll zerfallende galoissche Algebra über Ω mit der Gruppe $\mathfrak{G}$ (direkte Summe von g zu Ω isomorphen Körpern) spezialisiert, für die man leicht $d(W_\chi) = 1$ findet.

system $C_{\chi,\psi}$ gebildet, und seine Klasse $\mathfrak{C}$ als kennzeichnende Invariante von K/Ω im Grundkörper Ω untersucht wurde, sei nunmehr umgekehrt ein Faktorensystem $C_{\chi,\psi}$ zur Charakteralgebra X von $\mathfrak{G}$ über Ω gegeben, das den Kommutativ- und Assoziativrelationen (15, 1), (15, 5) sowie der Regularitätsbedingung (16, 13) genügen soll. Durch (14, 2) als Multiplikationsschema für eine zu f_χ-reihig-quadratischen Matrizen W_χ zusammengestellte Basis wird dann eine Algebra K/Ω vom Range $\sum_\chi f_\chi^2 = g$ definiert, also die Definitionsbedingung § 15, (I.) erfüllt. Es soll jetzt gezeigt werden, daß für K/Ω auch die weiteren Definitionsbedingungen § 15, (II.), (III.), (IV.) einer galoisschen Algebra erfüllt sind.

Was die Galoisgruppe betrifft, so werde die Wirkung der Operatoren S aus $\mathfrak{G}$ auf die Elemente von K formal dadurch definiert, daß die Elemente aus Ω invariant sein und die Basismatrizen W_χ das Verhalten (12, 5) haben, sich also bei $\mathfrak{G}$ vorne mit Γ_χ multiplizieren sollen. Dann folgt einerseits

$$\begin{aligned} W_\chi^S \times W_\psi^S &= \big(A_\chi(S) \times A_\chi(S)\big)\,(W_\chi \times W_\psi) = P_{\chi,\psi}^{-1}\, A_{\chi\psi}\,(S)\; P_{\chi,\psi} \cdot P_{\chi,\psi}^{-1}\, W_{\chi\psi}\, P_{\chi,\psi} \cdot C_{\chi,\psi} \\ &= P_{\chi,\psi}^{-1}\big(A_{\chi\psi}(S)\, W_{\chi\psi}\big)\, P_{\chi,\psi} \cdot C_{\chi,\psi} = P_{\chi,\psi}^{-1}\, W_{\chi\psi}^S\, P_{\chi,\psi} \cdot C_{\chi,\psi}, \end{aligned}$$

also die Invarianz des Multiplikationsschemas (14, 2) bei $\mathfrak{G}$, und andererseits

$$(W_\chi^S)^T = A_\chi(S)\, W_\chi^T = A_\chi(S)\, A_\chi(T)\, W_\chi = A_\chi(S\,T)\, W_\chi = W_\chi^{ST}.$$

Daher sind die wie angegeben definierten Operatoren S aus $\mathfrak{G}$ Automorphismen von K/Ω und setzen sich als solche nach der Multiplikation in $\mathfrak{G}$ zusammen. Demnach ist $\mathfrak{G}$ Automorphismengruppe von K/Ω. Als Ω-Modul mit dem Operatorenbereich $\mathfrak{G}$ liefert dabei K vermöge der Basis W_χ nach der Festsetzung (12, 5) die vollständig reduzierte Darstellung $\underset{\chi}{\Delta}\,(I_\chi \times \Gamma_\chi)$ aus der regulären Darstellungsklasse von $\mathfrak{G}$. Hiernach ist die Definitionsbedingung § 15, (II.) für K/Ω erfüllt.

Was die Kommutativität und Assoziativität betrifft, so folgert man aus dem Multiplikationsschema (14, 2) und den vorausgesetzten Kommutativ- und Assoziativrelationen (15, 1), (15, 5) nach den jetzt rückwärts auszuführenden Rechnungen in § 15 ohne weiteres die Gültigkeit der Beziehungen

$$\begin{aligned} W_\psi \times W_\chi &= V_{\chi,\psi}^{-1}\,(W_\chi \times W_\psi)\; V_{\chi,\psi}, \\ (W_\varphi \times W_\chi) \times W_\psi &= W_\varphi \times (W_\chi \times W_\psi). \end{aligned}$$

Diese besagen, daß die Multiplikation in K kommutativ und assoziativ ist. Danach ist auch die Definitionsbedingung § 15, (III.) für K/Ω erfüllt.

Was die Halbeinfachheit und Separabilität betrifft, so folgt aus der vorausgesetzten Regularitätsbedingung (16, 13) nach der Formel (16, 12), daß die Basisdiskriminante $d(W_\chi) \neq 0$ ist. Man beachte hierzu, daß die zu (16, 12) führende Rechnung auch unter den jetzigen Voraussetzungen gültig ist, weil sie lediglich von dem Multiplikationsschema (14, 2) und der charakteristischen Eigenschaft (12, 5) einer Faktorbasis W_χ von K/Ω Gebrauch macht. Nach dem zu Beginn von § 15 Gesagten ist danach auch die Definitionsbedingung § 15. (IV.) für K/Ω erfüllt.

Somit ist K/Ω eine galoissche Algebra mit der Gruppe $\mathfrak{G}$, die der Definition zugrunde liegende Basis W_χ ist eine Faktorbasis zu Γ_χ von K/Ω, und das zum Ausgang genommene Faktorensystem $C_{\chi,\psi}$ ist das Faktorensystem dieser Faktorbasis.

Durch die in §§ 12—17 erhaltenen Einzelergebnisse ist das in § 5 formulierte Hauptergebnis dieser Arbeit in beiden Richtungen — von K/Ω zu $\mathfrak{C}$ und von $\mathfrak{C}$ zu K/Ω — vollständig bewiesen.

Eingegangen 15. August 1947.

Operatoren in Lieschen Ringen.

Von *Franz Wever* in Göttingen.

Es sei $\mathfrak{A}$ ein freier Ring in den freien Erzeugenden $x, y, z \ldots$ mit dem Körper der rationalen Zahlen als Koeffizientenbereich. Addition und Multiplikation sollen dem assoziativen und distributiven Gesetz unterliegen, dagegen soll die Multiplikation nicht kommutativ sein. Dieser Ring heiße im folgenden stets assoziativer Ring. „Frei" bedeutet, daß keine Beziehungen zwischen den Erzeugenden bestehen sollen, die nicht aus den allgemeinen Rechengesetzen folgen. Zu den beiden Operationen in $\mathfrak{A}$ möge nun noch eine weitere eingeführt werden, eine durch eckige Klammern gekennzeichnete Multiplikation

$$[x\,y] = x\,y - y\,x,$$

also eine Kommutatorbildung. Alle Formen, die sich in $\mathfrak{A}$ allein aus Addition und der so definierten Klammermultiplikation zusammensetzen lassen, bilden einen Modul $\mathfrak{L}$ mit den Beziehungen

$$(1) \qquad [r\,s] + [s\,r] = 0,$$

$$(2) \qquad \big[[r\,s]\,t\big] + \big[[t\,r]\,s\big] + \big[[s\,t]\,r\big] = 0,$$

$$(3) \qquad [r\,r] = 0.$$

In $\mathfrak{L}$ gilt das assoziative Gesetz also nicht. Der Modul $\mathfrak{L}$ kann infolge dieser Relationen als Darstellung eines Lieschen Rings Λ mit freien Erzeugenden $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ aufgefaßt werden, wenn man nur die Zuordnung $\xi \to x$, $\eta \to y, \ldots$ trifft, der Addition in Λ die Addition in $\mathfrak{L}$ und der Multiplikation in Λ die Klammermultiplikation in $\mathfrak{L}$ entsprechen läßt. Magnus[1][2]) und Witt[3]) haben gezeigt, daß umgekehrt ein durch die Relationen (1) und (2) definierter Liescher Ring immer durch einen solchen Modul dargestellt werden kann.

Im assoziativen Ring $\mathfrak{A}$ sind Produkte gleicher Zusammensetzung linear unabhängig, wenn sie sich nur in der Reihenfolge ihrer Faktoren unterscheiden. Das ist im Lieschen Ring Λ bzw. in seiner Darstellung $\mathfrak{L}$ nicht mehr der Fall.

Die Untersuchung der Lieschen Ringe ist interessant im Hinblick auf ihre Anwendbarkeit in der Theorie der freien Gruppen, insbesondere ihr Verhalten gegenüber linearen Transformationen der Erzeugenden, das zu den Automorphismen der freien Gruppe in Beziehung gesetzt werden kann.

Die hierbei auftretenden Fragen, vor allem die Konstruktion einer Basis, das Bestehen von linearen Abhängigkeiten, das Zerfallen in irreduzible Darstellungen können

[1]) W. Magnus, Über Beziehungen zwischen höheren Kommutatoren. J. reine angew. Math. 177 (1937), 105—115.

[2]) W. Magnus, Über Gruppen und zugeordnete Liesche Ringe. J. reine angew. Math. 182 (1940), 142—149.

[3]) E. Witt, Treue Darstellung Liescher Ringe. J. reine angew. Math. 177 (1937), 152—160.

beantwortet werden durch Operationen im Gruppenring der symmetrischen Gruppe. Bequeme Ausdrücke ergeben sich bei Benutzung der Youngschen substitutional analysis in der Bearbeitung von Rutherford[4]).

I. Substitutional Analysis von Young.

1. Soweit dies später gebraucht wird, soll ohne Beweise und Ableitungen über die Youngsche Theorie berichtet werden.

Es sei $\mathfrak{S}_m$ die symmetrische Gruppe aller Permutationen von m Gegenständen. Ihre Elemente werden mit $\varepsilon = \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{m!}$ bezeichnet, wobei ε die identische Permutation sein soll. Dann besteht der Gruppenring der symmetrischen Gruppe aus allen Linearausdrücken

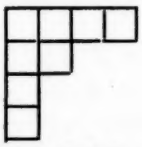
$$W = \sum_i w_i \sigma_i, \quad w_i \text{ rational.}$$

Der Gruppenring vermittelt eine reguläre Darstellung der symmetrischen Gruppe, die in soviel irreduzible Darstellungen zerfällt, wie es Klassen in $\mathfrak{S}_m$ gibt, also wie sich die ganze Zahl m auf verschiedene Weise als Summe positiver ganzer Zahlen darstellen läßt.

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ mit $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_r \geq 0$ und $\sum \alpha_i = m$ heiße eine Zerlegung der ganzen Zahl m. Ist zwischen diesen Zerlegungen eine Ordnung nötig, so heiße $\alpha > \beta$, wenn die erste nicht verschwindende Differenz $\alpha_i - \beta_i > 0$. Jede Zerlegung kennzeichnet eine irreduzible Darstellung vom Grade f^α. In der regulären Darstellung kommt jede irreduzible Darstellung so oft vor, wie ihr Grad beträgt, es ist also

$$\sum_\alpha (f^\alpha)^2 = m!.$$

Die Zerlegung α bestimmt ein Schema, das in der i-ten Zeile α_i Kästchen enthält. Zum Beispiel gehört für $m = 8$ zur Zerlegung $\alpha = (4, 2, 1, 1)$ das Schema



In diesem Schema lassen sich die Ziffern $1, 2, 3, \ldots, m$ unterbringen. Eine Anordnung dieser Ziffern heißt eine Normaltabelle, wenn die Ziffern in den Zeilen von links nach rechts und in den Spalten von oben nach unten größer werden. Zu dem angeführten Beispiel ist

1	3	5	7
2	4		
6			
8			

eine Normaltabelle. Aus diesen Normaltabellen werden Ausdrücke P_r^α und N_r^α gebildet, sogenannte symmetrizer. P_r^α ist die im Gruppenring gebildete Summe aller Permutationen, die die Ziffern des Schemas innerhalb der Zeilen vertauschen, N_r^α die alternierende Summe aller Permutationen, die die Ziffern innerhalb der Spalten vertauschen, d. h. in N_r^α haben gerade Permutationen positives, ungerade negatives Vorzeichen. Die angehängten Indizes bezeichnen die Nummer der Normaltabelle. Zur Zerlegung α gibt es genau f^α Normaltabellen, also gerade soviel, wie der Grad der Darstellung zur Zerlegung α beträgt. Die Ausdrücke P_r^α, N_r^α und $P_r^\alpha N_r^\alpha$ sind bis auf einen Zahlenfaktor idempotent. Zu den Zerlegungen $\alpha = (m)$ und $\alpha = (1, 1, \ldots, 1)$ gehören Darstellungen vom Grade 1.

---

[4]) D. E. Rutherford, Substitutional analysis (im Druck).

Als Basis für den Gruppenring der symmetrischen Gruppe wird nun zweckmäßig ein System von idempotenten und nilpotenten Elementen g^{α}_{rs} ausgewählt, die natürliche Einheiten heißen. Die natürlichen Einheiten werden auf hier nicht näher zu erklärende Weise aus den symmetrizern zusammengesetzt. α ist eine Zerlegung und die ganzzahligen Indizes r und s können je die Werte $1, 2, \ldots, f^{\alpha}$ annehmen, sind also Nummern einer Normaltabelle. Zwischen den Einheiten gilt die Multiplikationsregel

$$g^{\alpha}_{ru} \cdot g^{\beta}_{vs} = \delta^{\alpha\beta}\, \delta_{uv}\, g^{\alpha}_{rs}, \tag{4}$$

also insbesondere

$$(g^{\alpha}_{rr})^2 = g^{\alpha}_{rr} \tag{5}$$

und für $r \neq s$

$$(g^{\alpha}_{rs})^2 = 0. \tag{6}$$

$\delta^{\alpha\beta}$ bzw. δ_{uv} ist das Kroneckerdelta. Werden für α alle Zerlegungen und für den Doppelindex alle Nummern der Normaltabellen ausgewählt, so gelangt man zu $m!$ Einheiten, die linear unabhängig sind. Alle Ausdrücke des Gruppenrings können durch diese Einheiten ausgedrückt werden, also

$$W = \sum_{\alpha, r, s} u^{\alpha}_{rs}\, g^{\alpha}_{rs},$$

wo die u rationale Zahlen sind. Das Multiplikationsgesetz der Einheiten entspricht der Multiplikation zweier Matrizen mit lauter Nullen und einer Eins an der Stelle $r\,s$. Die u^{α}_{rs} können also als Koeffizienten einer quadratischen Matrix mit f^{α} Zeilen aufgefaßt werden. Die Schreibweise

$$[W] = [u^{(m)}_{11}] \dotplus \begin{bmatrix} u^{(m-1,1)}_{11}, & u^{(m-1,1)}_{12}, & \ldots \\ u^{(m-1,1)}_{21}, & u^{(m-1,1)}_{22}, & \ldots \\ \ldots, & \ldots, & \ldots \end{bmatrix} \dotplus \cdots \dotplus [u^{(1,1,\ldots 1)}_{11}]$$

oder

$$[W] = U^{(m)}_{W} \dotplus U^{(m-1,1)}_{W} \dotplus \cdots \dotplus U^{(1,1,\ldots,1)}_{W}$$

soll als Abkürzung einer Matrix mit $m!$ Zeilen und Spalten gelten, die in der Diagonale die vorstehenden Einzelmatrizen enthält, und zwar jede so oft, wie ihr Grad beträgt. Außerhalb dieser Diagonalkästen sollen lauter Nullen stehen. Das Produkt zweier solcher Matrizen ist also zu bilden, indem jeweils die an gleicher Stelle stehenden Matrizen multipliziert werden. Im folgenden wird der Rang von $[W]$ gebraucht. Darunter ist

$$\nu = \sum_{\alpha} f^{\alpha}\, \nu^{\alpha}$$

zu verstehen, wenn ν^{α} der Rang der zur Zerlegung α gehörenden Matrix ist.

2. Rutherford behandelt ausführlich die Gleichung

$$W \cdot X = 0,$$

worin W einen gegebenen Ausdruck im Gruppenring bedeuten soll. Es genügt hier, den Spezialfall anzunehmen, daß W idempotent ist, also $W^2 = W$. In diesem Fall ist

$$X = (\varepsilon - W) \cdot Y$$

die allgemeine Lösung der Gleichung, worin Y noch beliebig im Gruppenring gewählt werden kann.

Der Ra g der Lösungsschar hängt vom Rang ν der Matrix ab und ist $m! - \nu$.

Bei der idempotenten Matrix $[W]$ stimmen Rang und Spur überein. Nun ist aber die Spur der Matrix $[W]$ leicht zu berechnen. In der regulären Darstellung ist

$$\begin{aligned} s(\sigma_i) &= m! \qquad \text{für } \sigma_i = \varepsilon, \\ &= 0 \qquad \text{für } \sigma_i \neq \varepsilon, \end{aligned}$$

also nur die identische Permutation trägt einen Anteil zur Spur bei. Danach ist

$$\nu = w_1 \cdot m!,$$

wenn w_1 der Koeffizient von ε in W ist.

Das Bestehen der Gleichung $W \cdot X = 0$ hat zur Folge, daß in jeder Darstellung die Matrizengleichung

$$U_W^\alpha \, U_X^\alpha = 0$$

erfüllt sein muß. Ist ν^α der Rang von U_W^α, so ist die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen in der Darstellung

$$(f^\alpha)^2 - f^\alpha \, \nu^\alpha.$$

Da W idempotent ist, muß auch die Teilmatrix U_W^α idempotent sein. Spur und Rang stimmen wieder überein und lassen sich aus den Charakteren der symmetrischen Gruppe berechnen. Es ist

$$\nu^\alpha = \sum_{i=1}^{m!} w_i \, \chi_i^\alpha,$$

worin χ_i^α der Charakter der Permutation σ_i in der Darstellung zur Zerlegung α ist.

Bei der Anwendung der Youngschen Theorie auf die Behandlung der Lieschen Ringe tritt die Frage auf, wieviel linear unabhängige Ausdrücke ein Operator W erzeugen kann, also wieviel linear unabhängige Ausdrücke $WZ \neq 0$ existieren. Die Anzahl der Z ist ν bzw. $f^\alpha \, \nu^\alpha$ in der Darstellung zur Zerlegung α.

II. Permutationsoperatoren im Lieschen Ring.

3. Es soll nun gezeigt werden, wie man unter Anwendung von Operatoren aus dem Gruppenring der symmetrischen Gruppe beliebige Formen des Lieschen Rings Λ in $\mathfrak{L}$ darstellen kann.

Unter der Dimension eines Produktes im Lieschen Ring werde die Anzahl der Faktoren, also der Grad in den Erzeugenden $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ verstanden. Λ_m sei dann der Modul aller Formen der Dimension m. Ein Produkt, in dem sämtliche Klammern die beiden linken Variabeln umschließen, heiße linksnormiert. Sämtliche Formen in Λ_m können, wie lange bekannt ist, als Summe linksnormierter Formen geschrieben werden,

$$[[[[\cdots[[\xi\,\eta]\,\zeta]\cdots\varrho]\,\sigma]\,\tau]$$

ist eine solche Form und sie kann im assoziativen Ring durch eine linksnormierte Form

$$[[[[\cdots[[x\,y]\,z]\cdots]\,r]\,s]\,t]$$

dargestellt werden, wofür die abgekürzte Schreibweise

$$[x\,y\,z\ldots r\,s\,t)$$

gelten soll. Es sollen zunächst nur Formen betrachtet werden, in denen sämtliche Variablen verschieden sind.

Die Auflösung der eckigen Klammern in $\mathfrak{A}$ ergibt eine Folge von 2^{m-1} Produkten, die sich nur in der Reihenfolge der Faktoren unterscheiden. Sie werden aus der Grundanordnung $x\,y\,z\ldots t$ erzeugt durch einen Operator aus dem Gruppenring der symmetrischen Gruppe

$$\omega_m = (\varepsilon - \pi_m)(\varepsilon - \pi_{m-1})\cdots(\varepsilon - \pi_2). \tag{7}$$

Darin bedeutet π_k die zyklische Vertauschung der ersten k Stellen,

$$\pi_k = (1\ 2\ 3\ \ldots\ k)$$

unter Festlassung der Stellen $k+1, \ldots, m$. Die Auflösung der Klammern führt dann zu

$$[x\,y\,z\ldots r\,s\,t) = \omega_m\{x\,y\,z\ldots r\,s\,t\}.$$

Der Operator ω_m ist so für jede Dimension definiert. Er ist eine Summe von Permutationen, in der nur die Koeffizienten ± 1 vorkommen. Die Anwendung der Youngschen Theorie erfordert es nun, den Ausdruck in natürlichen Einheiten darzustellen. Dies soll an dem Beispiel der Dimension $m = 4$ erläutert werden. In diesem Fall ist

$$\begin{aligned}\omega_4 = &+ (1) && - (12) && - (123) && + (13)\\ &- (1234) && + (134) && + (1324) && - (14)\,(23).\end{aligned}$$

Danach ist
$$\begin{aligned}[x\,y\,z\,t) = \omega_4\{x\,y\,z\,t\} &= x\,y\,z\,t - y\,x\,z\,t\\ &- z\,x\,y\,t + z\,y\,x\,t\\ &- t\,x\,y\,z + t\,y\,x\,z\\ &+ t\,z\,x\,y - t\,z\,y\,x.\end{aligned}$$

In natürlichen Einheiten, gleich in Matrizenschreibweise, heißt der Operator

$$[\omega_4] = [0] \dotplus \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix} \dotplus \begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \dotplus \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1\\ 0 & 3 & -1\\ 0 & -3 & 1\end{bmatrix} \dotplus [0].$$

Die einzelnen Matrizen gehören der Reihe nach zu den Zerlegungen von 4: $\alpha = (4)$, (3,1), (2,2), (2, 1, 1) und (1, 1, 1, 1). Der Grad der Darstellungen ist $f^\alpha = 1, 3, 2, 3, 1$ und jede Darstellung ist so oft zu zählen, wie dieser Grad beträgt.

Sämtliche Formen in Λ_m lassen sich als Summe linksnormierter Formen schreiben, können also auch durch den Operator ω_m erzeugt werden, wenn dieser nur auf eine passend ausgewählte Anordnung der Variablen angewendet wird. Alle linksnormierten Formen, die durch Permutation der Variablen auseinander hervorgehen, sind

$$\omega_m\,\sigma_i\{x\,y\,z\ldots u\,v\,w\}, \quad i = 1, 2, \ldots, m!.$$

Eine Basis für diese Formen zu finden ist damit gleichbedeutend, eine Basis für das Rechtsideal (ω_m) im Gruppenring der symmetrischen Gruppe zu konstruieren.

Möge dies zunächst an dem Beispiel $m = 4$ erläutert werden. Die Matrix

$$[B_4(\mu_1, \ldots, \mu_6)] = [0] \dotplus \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3\end{bmatrix} \dotplus \begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \dotplus \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ \mu_4 & \mu_5 & \mu_6\end{bmatrix} \dotplus [0]$$

mit beliebig wählbaren μ_i wird durch $[\omega_4]$ nicht annulliert. Der Operator

$$\omega_4\,B_4(\mu_1, \ldots, \mu_6)$$

liefert bei passender Wahl der μ_i alle Formen des Moduls Λ_4, soweit sie aus lauter verschiedenen Erzeugenden bestehen. Λ_4 hat danach sechs linear unabhängige Basiselemente, je drei treten in den Darstellungen zu den Zerlegungen (3, 1) und (2, 1, 1) auf. In den Darstellungen zu (4), (2, 2) und (1, 1, 1, 1) kommen keine Formen vor, ein Sachverhalt, der für die Zerlegungen (m) und $(1, 1, \ldots, 1)$ bei jeder Dimension $m > 2$ richtig ist. Es ist dies gerade der Hilfssatz 1 einer früheren Arbeit[5]).

Für jede Dimension m lassen sich derartige Matrizen B_m herstellen und allgemein läßt sich in Λ_m dann jede Form, soweit sie aus verschiedenen Erzeugenden besteht, schreiben als

$$\omega_m\,B_m(\mu_1, \ldots, \mu_\nu)\{x\,y\,z\ldots r\,s\,t\}.$$

Setzen wir der Reihe nach $\mu_i = 1$ und $\mu_j = 0$ für $j \neq i$, so sind die

$$\omega_m\,B_m^{(i)} = \omega_m\,B_m(0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0)$$

---

[5]) F. Wever, Über Invarianten in Lieschen Ringen. Math. Ann. **120** (1949), 563—580.

eine Basis des Rechtsideals (ω_m) und alle

$$\omega_m B_m^{(i)} \{ x\, y\, z \ldots r\, s\, t \}$$

bilden eine Basis von Λ_m. B_m heiße deswegen Basisoperator.

4. Alle bisherigen Überlegungen befaßten sich nur mit Formen aus lauter verschiedenen Variablen. Diese Einschränkung soll jetzt fallen, es sollen auch solche Formen untersucht werden, in denen Variablen mehrfach auftreten. Es ist natürlich auch in diesem Fall möglich, den Operator ω_m zu benutzen. Dazu werden die mehrfach auftretenden Variablen durch einen Index unterschieden, alle Permutationen von ω_m ausgeübt und dann die Indizes wieder weggelassen. Danach sind etwa gleiche Produkte zusammenzufassen. Es ist ersichtlich, daß es im allgemeinen weniger linear unabhängige Formen geben wird und daß gewisse Ausdrücke durch ω_m annulliert werden.

Auch diese Verhältnisse können mit Hilfe der Youngschen Theorie dargestellt werden. Es sei in $\mathfrak{A}$ ein Produkt $x\, x \ldots y\, y \ldots z\, z \ldots$, das die Erzeugenden $x, y, z, \ldots$ je $\beta_1, \beta_2, \ldots$ mal enthalten soll mit $\beta_1 + \beta_2 + \cdots = m$. Wenn jetzt ohne Einschränkung der Allgemeinheit angenommen wird, daß die β_i mit steigendem Index nicht größer werden, also $\beta_1 \geq \beta_2 \cdots \geq \beta_k$, so gibt es eine Zerlegung β, die die Signatur von $x\, x \ldots y\, y \ldots z\, z \ldots$ heißen soll.

Satz 1. *Eine Basis für alle Formen gegebener Signatur β in Λ_m, dem Modul aller Formen der Dimension m, wird erhalten durch Anwendung des Operators*

$$\omega_m B_m (\mu_1 \ldots \mu_r) P_1^\beta$$

auf das Produkt $x_1 x_2 \ldots x_{\beta_1} y_1 y_2 \ldots y_{\beta_2} z_1 \ldots$. In $\omega_m B_m P_1^\beta \{ x_1 x_2 \ldots y_1 y_2 \ldots \}$ sind nach Anwendung der Operatoren alle Indizes wieder fortzulassen. (Die Indizes sind den Permutationen gegenüber nur Unterscheidungsmerkmale, permutiert werden die Variablen selbst.)

Darin bedeutet P_1^β einen Youngschen symmetrizer zum Schema β, der angehängte Index 1 gibt an, daß die Ziffern in dieses Schema in der natürlichen Reihenfolge einzutragen sind.

Der Beweis gestaltet sich folgendermaßen. Werden die gleichen Variablen mit einem Index versehen und auf das so bezeichnete Produkt der Operator P_1^β angewendet, dann ist der entstehende Ausdruck $P_1^\beta \{ x_1 x_2 \ldots y_1 y_2 \ldots \}$ invariant gegenüber allen Vertauschungen der ursprünglich gleichen Variablen. Diese Eigenschaft bleibt erhalten, wenn P_1^β noch von links her mit beliebigen Ausdrücken des Gruppenringes multipliziert wird. Damit lassen sich dann alle linksnormierten Formen der Signatur β in der Form $\omega_m \sigma_i P_1^\beta \{ x_1 x_2 \ldots y_1 y_2 \ldots \}$ schreiben. Zur Auswahl einer Basis ist es damit nur notwendig, diejenigen Operatoren des Rechtsideals (ω_m) zu finden, die gleichzeitig im Linksideal (P_1^β) liegen. Dies aber ist die Aussage von Satz 1.

Es kann der Fall eintreten, daß $B_m P_1^\beta = 0$, also Formen gewisser Signatur überhaupt nicht vorkommen können, weiter werden im allgemeinen nicht mehr alle $\omega_m B_m (\mu_1 \ldots \mu_r) P_1^\beta$ bei verschiedenen $\mu_1 \ldots \mu_r$ linear unabhängig sein.

Speziell für die Dimension $m = 4$ ist

$$[P_1^{(3,1)}] = [6] \dotplus \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dotplus \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dotplus \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dotplus [0]$$

und

$$[B_4 P_1^{(3,1)}] = [0] \dotplus \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6\mu_1 & -2\mu_1 & -2\mu_1 \end{bmatrix} \dotplus \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dotplus \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dotplus [0].$$

Es gibt damit im Modul Λ_4 nur eine linear unabhängige Form der Signatur (3, 1), sie liegt in der Darstellung zur Zerlegung (3, 1).

5. Produkte beliebiger Klammerung lassen sich in Summen linksnormierter entwickeln. Ihre Darstellung im assoziativen Ring $\mathfrak{A}$ ist daher auch mit dem Operator ω_m möglich, wenn auf die Variablen vorher ein geeigneter Operator angewendet wird, der allein von der Klammerung abhängt. In der Arbeit[5]) ist ein Satz bewiesen, der hier wiederholt werden möge.

Satz 2. *Sind* $[[\xi\,\eta]\ldots]$ *und* $[[\varrho\,\sigma]\ldots]$ *zwei linksnormierte Formen im Lieschen Ring* Λ *von den Dimensionen* h *und* $m-h$, *so erhält man die Darstellung ihres Produktes im assoziativen Ring* $\mathfrak{A}$ *durch Anwendung des Operators*

$$\omega_m \cdot \pi_m^{-h} \cdot \omega_{m-h} \cdot \pi_m^{h}$$

auf die in Grundreihenfolge hingeschriebenen Variablen.

Darin bedeutet $\pi_m = (1\,2\,3\ldots m)$ wie in Nr. **3** die zyklische Vertauschung der Variablen. Der Beweis soll hier nicht wiederholt werden.

Der Operator $K = \pi_m^{-h}\,\omega_{m-h}\,\pi_m^{h}$ bewirkt die Auflösung aller die Linksnormierung störenden Klammern, er heiße deswegen Klammeroperator. Durch mehrfache Anwendung des Satzes 2 läßt sich jedes beliebig geklammerte Produkt auflösen, zu jedem beliebig geklammerten Produkt kann also ein Klammeroperator bestimmt werden. Die Klammerung eines Produktes besteht aus je $m-1$ „linken" und „rechten" Klammern und ist eindeutig gekennzeichnet durch Angabe der Stellungen aller linken Klammern.

$$\varrho = [\varrho_1^{\nu_1}, \varrho_2^{\nu_2}, \ldots, \varrho_r^{\nu_r}]$$

bedeutet eine Klammerung, in der ν_i linke Klammern vor der ϱ_i-ten Stelle stehen mögen. Für die Dimension m ist $\Sigma\,\nu_i = m-1$. Dann gilt

Satz 3. *Ein Produkt der Dimension* m *im Lieschen Ring* Λ *mit der Klammerung* $\varrho = [\varrho_1^{\nu_1}, \ldots, \varrho_r^{\nu_r}]$ *wird im assoziativen Ring* $\mathfrak{A}$ *dargestellt durch Anwendung des Operators*

$$\omega_m\,K^{\varrho}$$

mit

$$K^{\varrho} = \prod_{\varrho_i > 1} (\pi_m^{-\varrho_i+1}\,\omega_{m-\varrho_i}\,\pi_m^{\varrho_i-1}).$$

Der Beweis ergibt sich sofort, wenn man überlegt, daß es in Satz 2 auf die Struktur des linken Produktes gar nicht ankommt. Die einzelnen Faktoren sind in der Reihenfolge der ϱ_i zu schreiben. Der am weitesten rechts stehende Teiloperator beseitigt die am weitesten rechts stehenden „linken" Klammern nach Satz 2. Der danach anzuwendende Operator trifft dann aber bereits auf ein bis zu seiner Stellenzahl ϱ_i schon normiertes Produkt. Die schrittweise Fortführung dieser Operation führt schließlich zur vollständigen Linksnormierung. Für $\varrho_1 = 1$ selbst ist kein Teiloperator zu bilden. Damit ist der Satz bewiesen.

Beispiel: Für die Klammerung $\varrho = [1^2, 3^1]$ also $[[\cdot\,\cdot][\cdot\,\cdot]]$ ist $K^{[1^2,3^1]} = \varepsilon - (34)$, also

$$[[\xi\,\eta]\,[\zeta\,\tau]] = [\xi\,\eta\,\zeta\,\tau) - [\xi\,\eta\,\tau\,\zeta).$$

In Matrizenschreibweise ist

$$[\omega_4\,K^{[1^2,3^1]}] = [0] \dotplus \begin{bmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{bmatrix} \dotplus \begin{bmatrix} 0&0\\0&0 \end{bmatrix} \dotplus \begin{bmatrix} 0&4&-4\\0&4&-4\\0&-4&4 \end{bmatrix} \dotplus [0].$$

Formen dieser Klammerung gibt es damit nur in der Darstellung zur Zerlegung (2, 1, 1).

III. Der Modul Λ_m.

6. Die Struktur des Moduls Λ_m, also des Moduls aller Formen der Dimension m in Λ, ist vollständig anzugeben aus den Eigenschaften des Operators ω_m. Es muß nur die Betrachtung der Darstellung der symmetrischen Gruppe erweitert werden auf die Darstellung der allgemeinen linearen Gruppe. Es werde zunächst der Fall betrachtet, daß die Dimension m und die Zahl k der Erzeugenden übereinstimmen. Aus den Formen, die jede Erzeugende genau einmal enthalten, lassen sich Teilmoduln bilden, die bei allen Permutationen der Erzeugenden in sich übergehen. Diese Teilmoduln sollen irreduzible Darstellungsmoduln heißen und durch Λ_m^α bezeichnet werden. Ein solcher Darstellungsmodul enthält f^α Basiselemente und tritt gerade ν^α mal auf, wenn ν^α der Rang der Matrix U_ω^α ist.

Werden jetzt die Erzeugenden nicht nur Permutationen, sondern auch allen nichtsingulären linearen Transformationen unterworfen, so entsteht eine Darstellung m-ter Stufe der allgemeinen linearen Gruppe [siehe van der Waerden[6])]. Hierbei bleiben die irreduziblen Darstellungsmoduln Λ_m^α erhalten, sie sind lediglich um solche Formen zu erweitern, in denen die Variablen auch mehrfach auftreten. In der Darstellung zur Zerlegung α kann höchstens die Signatur $\beta \leq \alpha$ vorkommen.

Die Anzahl der Darstellungen ändert sich nicht, wenn nun die Zahl der Erzeugenden auch noch größer als die Dimension wird. Ist dagegen die Zahl der Erzeugenden kleiner, $k < m$, dann treten nur noch solche Darstellungsmoduln auf, deren Zerlegung höchstens k Summanden hat.

7. Unter Anwendung der Youngschen Theorie läßt sich ν^α berechnen. Der Operator ω_m ist idempotent, wenn er mit einem geeigneten Faktor versehen wird. Nach Wever[5]) ist

$$\left(\frac{\omega_m}{m}\right)^2 = \frac{\omega_m}{m}. \tag{8}$$

Die Anzahl der linear unabhängigen Elemente X mit

$$\frac{\omega_m}{m} \cdot X \neq 0$$

ist dann gerade

$$\nu = \frac{1}{m} \cdot m! = (m-1)!,$$

denn in $\frac{\omega_m}{m}$ kommt ε mit dem Koeffizienten $\frac{1}{m}$ vor. Dieses Ergebnis ist in allgemeinerer Form zuerst von Witt[3]) gezeigt.

Der Operator ω_m hat nun folgende Eigenschaft:

Satz 4. *In ω_m ist die Summe der Koeffizienten der Permutationen einer Klasse C_γ*

$$\sum_{\sigma_i \subset C_\gamma} w_i = 0,$$

wenn die Klasse C_γ Permutationen aus Zyklen verschiedener Länge enthält, und es ist

$$\sum_{\sigma_i \subset C_\gamma} w_i = \mu(d),$$

wenn die Klasse aus Permutationen mit $\frac{m}{d}$ Zyklen der Länge d besteht.

Dieser Satz ist in seinem Inhalt gleichbedeutend mit dem

Satz 5. *Die Anzahl der irreduziblen Darstellungsmoduln zur Zerlegung α im Modul Λ_m aller Formen der Dimension m ist*

$$\nu^\alpha = \frac{1}{m} \sum_{d|m} \mu(d)\, \chi^\alpha_{(d,d,\cdots d)},$$

[6]) B. L. van der Waerden, Gruppen von linearen Transformationen. Ergebnisse d. Math. IV (1935), 2.

worin $\chi^{\alpha}_{(d,\ldots,d)}$ *den Charakter einer Permutation aus* $\frac{m}{d}$ *Zyklen der Länge d in der Darstellung* α *bedeutet.*

Satz 5 ergibt sich sofort aus einer Formel von Angeline Brandt[7]). Sie gibt für den Charakter des Moduls Λ_m an

$$\psi_m = \frac{1}{m} \sum_{d|m} \mu(d)\, s_d^{\frac{m}{d}},$$

wenn s_d die Spur der d-ten Potenz der allgemeinen linearen Transformation ist. Nach der Darstellungstheorie [siehe etwa van der Waerden[6])] können die s_γ ersetzt werden durch die Charaktere Φ^{α}_m der Darstellung m-ter Stufe

$$s_{\gamma_1} s_{\gamma_2} \cdots = \sum_{\alpha} \chi^{\alpha}_{\gamma} \Phi^{\alpha}_m.$$

Die Ersetzung und anschließende Aufspaltung in die einzelnen Darstellungen ergibt die Aussage des Satzes 5 und damit auch des Satzes 4.

IV. Gruppentheoretische Anwendungen.

8. Die Kenntnisse über die Struktur des Lieschen Ringes sollen nun auf die Theorie der freien Gruppen angewendet werden. Es sei $\mathfrak{F}$ eine freie Gruppe mit den freien Erzeugenden $a, b, \ldots$ Wird dieser Gruppe der assoziative Ring $\mathfrak{A}$ mit den Erzeugenden $x, y, \ldots$ und einem Einselement zugeordnet vermöge der Beziehungen

$$\begin{aligned} a &= 1 + x, & a^{-1} &= 1 - x + x^2 - + \cdots, \\ b &= 1 + y, & &\ldots, \end{aligned}$$

dann läßt sich jedes Wort $W(a, b, \ldots)$ in $\mathfrak{F}$ als Polynom in $\mathfrak{A}$ hinschreiben. In

$$W(a, b, \ldots) = 1 + d_m(x, y, \ldots) + d_{m+1}(x, y, \ldots) + \cdots$$

seien auf der rechten Seite Produkte gleicher Dimension h zusammengefaßt in die Glieder d_h, unter denen d_m das Glied mit der kleinsten Dimension sein möge. Dann kennzeichnet m genau die erste Gruppe der absteigenden Zentralreihe, in der W enthalten ist. Die Polynome kleinster Dimension können nun nur solche Elemente in $\mathfrak{A}$ sein, die in $\mathfrak{L}$ liegen, also gerade diejenigen, die die Darstellung des Lieschen Ringes Λ in $\mathfrak{A}$ vermitteln. Für genauere Angaben vergleiche Magnus[2]). Auf diese Weise ist die Gruppenmultiplikation in der freien Gruppe $\mathfrak{F}$ mit der Ringaddition in Λ, die Gruppenkommutatorbildung in $\mathfrak{F}$ mit der Multiplikation in Λ in Beziehung gesetzt. Der Modul Λ_m entspricht der abelschen Faktorgruppe $\mathfrak{F}_m/\mathfrak{F}_{m+1}$. Ist $\mathfrak{C}$ eine charakteristische Untergruppe zwischen $\mathfrak{F}_m$ und $\mathfrak{F}_{m+1}$, das heißt eine charakteristische Untergruppe, die ganz in $\mathfrak{F}_m$ enthalten ist und $\mathfrak{F}_{m+1}$ enthält, so entsprechen der Faktorgruppe $\mathfrak{C}/\mathfrak{F}_{m+1}$ eindeutig ein oder mehrere irreduzible Darstellungsmoduln in Λ_m. Es ist nicht bekannt, ob sich umgekehrt zu jedem irreduziblen Darstellungsmodul oder zu direkten Summen solcher Moduln charakteristische Untergruppen auffinden lassen. Jedenfalls ist die Anzahl der charakteristischen Untergruppen zwischen $\mathfrak{F}_m$ und $\mathfrak{F}_{m+1}$ begrenzt durch die endliche Anzahl der irreduziblen Darstellungsmoduln.

Eine Kette von charakteristischen Untergruppen bilden die Ableitungen, und es sollen die zu diesen Ableitungen gehörenden irreduziblen Darstellungsmoduln aufgesucht werden. $\mathfrak{D}^n$ sei die n-te Ableitung, also $\mathfrak{D}^0 = \mathfrak{F}$, $\mathfrak{D}^1 = [\mathfrak{F}, \mathfrak{F}]$ und $\mathfrak{D}^n = [\mathfrak{D}^{n-1}, \mathfrak{D}^{n-1}]$. Dann liegt $\mathfrak{D}^n$ frühestens in der 2^n-ten Untergruppe der absteigenden Zentralreihe, und der Faktorgruppe $\mathfrak{D}^n \cdot \mathfrak{F}_{2^n+1}/\mathfrak{F}_{2^n+1}$ entspricht in Λ_{2^n} ein Teilmodul Δ^n. Dieser Teilmodul

[7]) A. Brandt, The free Lie ring and Lie representations of the full linear group. Trans. Amer. Math. Soc. **56** (1944), 528—536.

soll nun als direkte Summe gewisser irreduzibler Darstellungsmoduln dargestellt werden. Alle Formen in Δ^n sind Produkte der Klammerung

$$[[[\cdot\,\cdot][\cdot\,\cdot]][[\cdot\,\cdot][\cdot\,\cdot]]][[[\cdot\,\cdot]\cdots$$

In diesem Fall wird zweckmäßig nicht der Klammeroperator für sich ausgerechnet, sondern gleich der Gesamtoperator $\omega_{2^n} K^\varrho = D^n$ hingeschrieben. Er besteht aus allen Permutationen einer Sylowgruppe $\mathfrak{P}_2$ zur Primzahl 2 in der symmetrischen Gruppe, und zwar gerade denjenigen, die in

$$\big((x_1\,x_2)\,(x_3\,x_4)\big)\,\big((x_5\,x_6)\,(x_7\,x_8)\big)\ldots$$

die Variablen innerhalb der Klammern vertauschen und die Klammern jeweils innerhalb der nächsthöheren Klammern vertauschen. Es ist

$$D^n = \omega_{2^n} K^\varrho = \sum_{\sigma_i \subset \mathfrak{P}_2} (-1)^{\varkappa_0 + \varkappa_1 + \cdots} \sigma_i. \tag{9}$$

Darin durchläuft σ_i alle Permutationen von $\mathfrak{P}_2$. $\varkappa_0$ ist die Zahl der Verstellungen der Variablen innerhalb der Klammern, allgemein $\varkappa_\nu$ die Zahl der Verstellungen der Klammern ν-ter Dimension.

Der so konstruierte Operator enthält alle Permutationen einer Untergruppe, ist also idempotent, wenn er durch die Ordnung der Gruppe dividiert wird. Diese ist 2^{2^n-1}. Die identische Permutation kommt in D^n nur einmal vor, unter Anwendung der Youngschen Theorie folgt also

Satz 6. *Der Modul Δ^n in Λ_{2^n} hat*

$$\nu' = \frac{(2^n)!}{2^{2^n-1}}$$

linear unabhängige Formen aus lauter verschiedenen Erzeugenden. Genau so viele Erzeugende hat die Faktorgruppe $\mathfrak{D}^n \cdot \mathfrak{F}_{2^n+1}/\mathfrak{F}_{2^n+1}$, wenn nur die Formen gezählt werden, die aus lauter verschiedenen Erzeugenden der freien Gruppe $\mathfrak{F}$ zusammengesetzt sind.

9. Die Anzahl aller Basiselemente in Δ^n überhaupt, also von beliebiger Signatur, ist sofort bekannt, wenn die Anzahl der ν'^α der Darstellungen zu jeder Zerlegung α in Δ^n berechnet ist. Dies ist genau wie in Nr. 7 möglich. Der Rang der Matrix U^α_Δ ist

$$\nu'^\alpha = \frac{1}{2^{2^n-1}} \cdot \sum_{\sigma_i \subset \mathfrak{P}_2} (-1)^{\varkappa_0 + \varkappa_1 + \cdots} \chi^\alpha_i. \tag{10}$$

Diese Formel wird erhalten, wenn in (9) die Permutationen durch ihre Charaktere χ^α_i in der Darstellung α ersetzt werden.

Für die ersten drei Ableitungen ist diese Rechnung ausgeführt. In der folgenden Zahlentafel bedeutet α die Zerlegung, ν^α die Anzahl der irreduziblen Darstellungsmoduln zu dieser Zerlegung im Dimensionsmodul Λ_{2^n} und ν'^α die Anzahl der Darstellungsmoduln, die in Δ^n enthalten sind.

	α	ν^α	ν'^α
1. Ableitung:	(2, 0)	0	0
	(1, 1)	1	1
2. Ableitung:	(4, 0)	0	0
	(3, 1)	1	0
	(2, 2)	0	0
	(2, 1, 1)	1	1
	(1, 1, 1, 1)	0	0

3. Ableitung:

α	ν^α	ν'^α
(8, 0)	0	0
(7, 1)	1	0
(6, 2)	2	0
(6, 1, 1)	3	0
(5, 3)	4	0
(5, 2, 1)	8	0
(5, 1, 1, 1)	4	0
(4, 4)	1	0
(4, 3, 1)	9	0
(4, 2, 2)	6	0
(4, 2, 1, 1)	12	1
(4, 1, 1, 1, 1)	4	0
(3, 3, 2)	6	1
(3, 3, 1, 1)	6	0
(3, 2, 2, 1)	9	1
(3, 2, 1, 1, 1)	8	1
(3, 1, 1, 1, 1, 1)	3	1
(2, 2, 2, 2)	1	0
(2, 2, 2, 1, 1)	4	1
(2, 2, 1, 1, 1, 1)	2	0
(2, 1, 1, 1, 1, 1, 1)	1	0
(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)	0	0

Die zweite Ableitung entspricht einem irreduziblen Darstellungsmodul in Λ_4. Dieser Sachverhalt gilt nicht mehr für die höheren Ableitungen.

V. Identitäten in Gruppen.

10. Nach der Darstellungstheorie der allgemeinen linearen Gruppe kann ein irreduzibler Darstellungsmodul Λ_m^α zur Zerlegung $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$, $\alpha_r > 0$ nur auftreten, wenn im Lieschen Ring Λ die Zahl der Erzeugenden k wenigstens gleich der Anzahl der positiven α_i in α ist, also $k \geq r$ ist. Die Existenz jedes Darstellungsmoduls setzt also eine Mindestzahl von Erzeugenden voraus. Alle Darstellungen in der Dimension m sind vertreten, wenn $k \geq m$. Es sei nun $\mathfrak{B}$ eine vollinvariante Untergruppe der freien Gruppe $\mathfrak{F}$. Eine solche kann nach B. H. Neumann[8]) definiert werden durch „Worte", das heißt durch folgende Vorschrift: Gegeben seien ein oder mehrere „Funktionen" $W_1(X, Y, \ldots)$, $W_2(X, Y, \ldots), \ldots$ von endlich vielen „variablen" Gruppenelementen; dann werde $\mathfrak{B}$ erzeugt von allen Elementen W von $\mathfrak{F}$, die man erhält, wenn für $X, Y, \ldots$ beliebige Elemente aus $\mathfrak{F}$ eingesetzt werden. $\mathfrak{B}$ ist auf diese Weise in allen freien Gruppen $\mathfrak{F}$ unabhängig von der Erzeugendenzahl, ja sogar für alle abzählbaren Gruppen $\mathfrak{G}$ überhaupt definiert, da alle Gruppen $\mathfrak{G}$ Faktorgruppen geeigneter freier Gruppen sind. Zum Beispiel liefert das Wort $W(X, Y) = X\,Y\,X^{-1}\,Y^{-1}$ die Kommutatorgruppe und $W(X) = X^2$ eine Untergruppe mit abelscher Faktorgruppe.

Es sei jetzt $\mathfrak{B}$ eine vollinvariante Untergruppe der freien Gruppe $\mathfrak{F}$. Es gibt dann eine Untergruppe $\mathfrak{F}_m$ der absteigenden Zentralreihe, in der $\mathfrak{B}$ frühestens enthalten ist. Die Stufe m ist nun nicht allein von der Konstruktion von $\mathfrak{B}$ abhängig, sondern auch noch von der Erzeugendenzahl k von $\mathfrak{F}$, denn nur bei genügend großer Erzeugendenzahl

[8]) B. H. Neumann, Identical relations in groups I. Math. Annalen 114 (1937), 506—525.

gibt es irreduzible Darstellungsmoduln Λ_m^α, Λ_m^β, ... die zu $\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{F}_{m+1}/\mathfrak{F}_{m+1}$ gehören. Besitzt $\mathfrak{F}$ weniger Erzeugende, dann muß $\mathfrak{B}$ ganz in $\mathfrak{F}_{m+1}$ liegen. Die Lage einer vollinvarianten Untergruppe $\mathfrak{B}$ in bezug auf die absteigende Zentralreihe kann also als Kriterium dafür angegeben werden, daß $\mathfrak{F}$ höchstens eine bestimmte beschränkte Anzahl von Erzeugenden besitzt. Entsprechend der von Relationen unabhängigen Definition von $\mathfrak{B}$ gilt dieses Kriterium dann in jeder abzählbaren Gruppe $\mathfrak{G}$.

Notwendige Bedingung, daß eine Gruppe $\mathfrak{G}$ von einem Element erzeugt wird, ist, daß ihre Kommutatorgruppe das Einselement ist. Eine notwendige Bedingung für die Erzeugbarkeit von $\mathfrak{G}$ durch zwei Elemente läßt sich sofort aus den Rechnungen der Nr. 9 herleiten. Danach ist die zweite Ableitung eine vollinvariante Untergruppe, frühestens enthalten in der vierten Untergruppe der absteigenden Zentralreihe. Ihr ist in Λ_4 ein irreduzibler Darstellungsmodul zur Zerlegung (2, 1, 1) zugeordnet, zu dessen Existenz wenigstens drei Erzeugende vorhanden sein müssen. Es gilt also

Satz 7. *Wenn eine Gruppe $\mathfrak{G}$ von nur zwei Elementen erzeugt wird, dann ist*

$$[[\mathfrak{G}\,\mathfrak{G}]\,[\mathfrak{G}\,\mathfrak{G}]] \subset \mathfrak{G}_5$$

das heißt: ihre zweite Ableitung muß frühestens in der fünften Untergruppe der absteigenden Zentralreihe liegen.

Dieses Ergebnis läßt sich sofort verallgemeinern. Es sei im Lieschen Ring Λ die Form $\Gamma(\xi, \eta, \ldots)$ eine Invariante der Dimension m aus k Erzeugenden. Die Dimension muß ein ganzzahliges Vielfaches der Erzeugendenzahl sein, $m = \nu \cdot k$, worin $\nu \geq 2$, wenn $k > 2$. Siehe die Arbeit von Wever[5]). Dies bedeutet, daß Γ in einem Lieschen Ring mit genau k Erzeugenden das einzige Basiselement eines irreduziblen Darstellungsmoduls zur Zerlegung $(\nu, \nu, \ldots, \nu)$ ist. In einem Lieschen Ring mit weniger Erzeugenden kann Γ nicht vorkommen. Hat Λ dagegen mehr als k Erzeugende, so ergeben sich durch Einsetzen von verschiedenen Kombinationen von je k Erzeugenden in Γ algebraisch unabhängige Ausdrücke.

Wenn es eine Invariante Γ der Dimension m gibt, gibt es immer solche mit rationalen Koeffizienten. Daher läßt sich in der freien Gruppe $\mathfrak{F}$ mindestens ein Wort $W(a, b, \ldots)$ in den Erzeugenden $a, b, \ldots$ bilden, dem im Sinne der Zuordnung nach Nr. 8 im Lieschen Ring Λ ein ganzzahliges Vielfaches von Γ entspricht. Werden in $W(a, b, \ldots)$ die Erzeugenden $a, b, \ldots$ durch beliebige Gruppenelemente $X, Y, \ldots$ ersetzt, so erzeugen alle $W(X, Y, \ldots)$ zusammen mit den Elementen von $\mathfrak{F}_{m+1}$ eine vollinvariante Untergruppe $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{F}$. Diese Untergruppe $\mathfrak{B}$ läßt sich nun in jeder beliebigen Gruppe $\mathfrak{G}$ konstruieren, da auch $\mathfrak{F}_{m+1}$ durch „Worte" definiert werden kann, und dann gilt der

Satz 8. *Zu Invarianten Γ im Lieschen Ring Λ von der Dimension m aus k Erzeugenden gibt es in einer Gruppe $\mathfrak{G}$ vollinvariante Untergruppen $\mathfrak{B}$ mit folgender Eigenschaft:*

$\mathfrak{B}$ *liegt in* $\mathfrak{G}_m$

$[\mathfrak{B}\,\mathfrak{B}]$ *liegt immer in* $\mathfrak{G}_{2m}$, *wenn* $\mathfrak{G}$ *mehr als* k *Erzeugende hat, und*

$[\mathfrak{B}\,\mathfrak{B}]$ *liegt sogar in* $\mathfrak{G}_{2m+1}$, *wenn* $\mathfrak{G}$ *genau* k *oder weniger Erzeugende hat.*

(*Hierbei ist* $\mathfrak{G}_h$ *die* h*-te Untergruppe der absteigenden Zentralreihe von* $\mathfrak{G}$.)

Im Falle von genau k Erzeugenden sind nämlich im Lieschen Ring Λ die den Elementen von $\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{F}_{m+1}/\mathfrak{F}_{m+1}$ zugeordneten Ausdrücke Vielfache von Γ. Im Lieschen Ring ist aber das Produkt zweier linear abhängiger Formen identisch Null. Damit ist ein Verfahren gefunden, notwendige Kriterien für die Erzeugbarkeit einer Gruppe durch eine beschränkte Anzahl von Erzeugenden aufzustellen.

Eingegangen 23. September 1948.

Reelle analytische Lösungen der Gleichung $\varphi(\varphi(x)) = e^x$ und verwandter Funktionalgleichungen.

Von *Hellmuth Kneser* in Tübingen.

Herrn Constantin Carathéodory
zu seinem siebzigsten Geburtstag am 13. 9. 1943 gewidmet[1]).

Im Oktober 1941, bei der damaligen Tagung der Deutschen Mathematikervereinigung in Jena, wurde die in der Überschrift angegebene Funktionalgleichung lebhaft besprochen. Die Aufgabe, sie durch eine „vernünftige" Funktion zu lösen, wurde aus der industriellen Praxis heraus den Mathematikern gestellt. Während es nun ziemlich leicht ist, eine stetige[2]) oder auch mehrmals differenzierbare[3]), für reelle Werte erklärte und dort reelle Lösung anzugeben, ja auch eine unbeschränkt differenzierbare[3]), gelingt es nicht ohne weiteres, eine überall im Reellen reelle und analytische Lösung zu finden. Dies Ziel erreiche ich hier auf dem folgenden Wege.

Aufgaben, in die wie hier die Aufstufung (Iteration) einer Funktion hineinspielt, kann man häufig mit Erfolg behandeln, wenn man geeignete Lösungen der Abelschen oder der Schröderschen Funktionalgleichung kennt (§ 1). Diese Gleichungen haben den Vorzug, in der gesuchten Funktion linear zu sein. Die Schrödersche Gleichung läßt sich nach G. Koenigs[4]) leicht lösen, wenn man sich auf die Umgebung eines Ruhewertes der gegebenen Funktion beschränkt (§ 2). Nun hat die Exponentialfunktion leider keinen reellen Ruhewert, wohl aber unendlich viele komplexe (§ 3). Benutzt man einen der beiden der reellen Achse nächstgelegenen unter diesen Ruhewerten, so erhält man eine Lösung der Schröderschen Funktionalgleichung, die in der Umgebung des Ruhewertes analytisch ist und sich bis an die reelle Achse heran analytisch fortsetzen läßt (§ 4). Sie ist aber in den Punkten $0, 1, e, e^e, \ldots$ singulär und auf der reellen Achse nicht reell. Beide Mängel zugleich werden durch eine geeignete konforme Abbildung behoben (§ 5). Einige Schlußbemerkungen gelten der Behandlung ähnlicher Aufgaben mit denselben Mitteln und anderen anschließenden Fragen.

---

[1]) Diese Arbeit, deren Veröffentlichung durch äußere Umstände verzögert wurde, erscheint hier in leicht überarbeiteter Gestalt.

[2]) G. H. Hardy, Orders of infinity (Cambridge Tracts in Mathematics No. 12), 2. Aufl. (1924), S. 31.

[3]) U. T. Bödewadt, Math. Zschr. **49** (1943), 497—516.

[4]) Annales sci. de l'École Normale Supérieure (3) **1** (1884), Supplément, 3—41.

§ 1. Die Funktionalgleichungen von Abel und Schröder.

Ist eine Funktion $f(x)$ gegeben und eine Funktion $\varphi(x)$ gesucht, die die Gleichung

$$\varphi(\varphi(x)) = f(x)$$

erfüllen soll, deren zweite Aufstufung also mit $f(x)$ übereinstimmen soll, so muß die $2n$-te Aufstufung von $\varphi(x)$ mit der n-ten von $f(x)$ übereinstimmen. Beliebige Aufstufungen von $f(x)$ sind leicht zu bilden, wenn man eine in einem genügend ausgedehnten Bereich erklärte Lösung $\psi(x)$ der Abelschen Funktionalgleichung

$$\psi\big(f(x)\big) = \psi(x) + \beta \tag{1}$$

— mit festem β — kennt; mehrmalige Anwendung von (1) ergibt nämlich

$$\psi\big(f^n(x)\big) = \psi(x) + n\,\beta,$$
$$f^n(x) = \psi^{-1}\big(\psi(x) + n\,\beta\big),$$

wenn $f^n(x)$ die n-te Aufstufung von $f(x)$ bedeutet:

$$f^0(x) = x,\ f^{n+1}(x) = f\big(f^n(x)\big),$$

und $\psi^{-1}(x)$ die Umkehrfunktion von $\psi(x)$ ist. Da liegt für die gesuchte Funktion der Ansatz

$$\varphi(x) = \psi^{-1}\left(\psi(x) + \frac{1}{2}\beta\right)$$

nahe, der sich sofort bestätigt:

$$\begin{aligned}\varphi(\varphi(x)) &= \psi^{-1}\left\{\psi\left[\psi^{-1}\left(\psi(x) + \frac{1}{2}\beta\right)\right] + \frac{1}{2}\beta\right\}\\ &= \psi^{-1}\left\{\left(\psi(x) + \frac{1}{2}\beta\right) + \frac{1}{2}\beta\right\}\\ &= \psi^{-1}\{\psi(x) + \beta\}\\ &= \psi^{-1}\{\psi\big(f(x)\big)\}\\ &= f(x).\end{aligned}$$

Dabei ist natürlich angenommen, daß die auftretenden Funktionen für die in sie eingesetzten Werte erklärt sind und dort die sie kennzeichnenden Eigenschaften haben; dies wird bei der späteren Anwendung der Fall sein.

Mit der Abelschen Funktionalgleichung hängt die Schrödersche

$$\chi\big(f(x)\big) = \gamma\,\chi(x) \tag{2}$$

— mit festem γ — eng zusammen: setzt man

$$\chi(x) = \exp\left[\frac{\ln\gamma}{\beta}\,\psi(x)\right],\quad \psi(x) = \frac{\beta}{\ln\gamma}\ln\chi(x),$$

so sind (1) und (2) unmittelbare Folgen voneinander.

§ 2. Lösung der Schröderschen Funktionalgleichung,

Das erste und grundlegende Ergebnis über die Lösbarkeit der Schröderschen Gleichung (2) ist der Satz von Koenigs[4]). Wir stellen seinen Beweis dar, einesteils weil er kurz ist und zur Bequemlichkeit des Lesers, anderenteils weil wir ohne Mehraufwand die von Koenigs gemachte Voraussetzung des analytischen Verhaltens der gegebenen Funktion durch eine geringere ersetzen können — wenn auch der Satz in dieser Arbeit nur auf analytische Funktionen angewandt wird.

Satz 1. *Es sei*

1. *die Funktion $f(x)$ in einer Umgebung der Stelle $x = c$ erklärt;*
2. *sei c ein Ruhewert von $f(x)$, d. h. $f(c) = c$;*

3. *sei $f(x)$ an der Stelle c etwas mehr als differenzierbar, nämlich*

$$|(f(x)-c)-a(x-c)| \leq M\,|x-c|^{\delta}$$

mit festem a, M und $\delta > 1$;

4. *sei der Ruhewert c ein einfacher anziehender, d. h.*

$$0 < |a| < 1.$$

Dann ist, wenn x hinreichend nahe bei c liegt, durch

$$\chi(x) = \lim_{n\to\infty} [a^{-n}(f^n(x)-c)]$$

eine Lösung der Schröderschen Gleichung (2) *mit $\gamma = a$ gegeben.*

Der Satz und der folgende Beweis gelten sowohl für beliebige komplexe Werte der auftretenden Veränderlichen und Funktionen, wie auch wenn man sie auf reelle Werte beschränkt. Im ersten Falle können auch c und a komplex sein; M und δ sind natürlich immer reell.

Nach den Voraussetzungen 3. und 4. können wir q gemäß

$$|a| < q < |a|^{1/\delta} \tag{3}$$

wählen; dann gilt nach der dritten Voraussetzung

$$\frac{f(x)-c}{x-c} \to a \text{ für } x \to c$$

und daher

$$|f(x)-c| \leq q\,|x-c| \tag{4}$$

in einer Umgebung von $x = c$, etwa für

$$|x-c| < r > 0. \tag{5}$$

Dabei sei r zugleich so klein gewählt, daß $f(x)$ im Bereiche (5) überall erklärt ist. In der Folge der Aufstufungen

$$x_0 = x,\ x_1 = f(x), \ldots,\ x_{n+1} = f(x_n), \ldots$$

gilt jetzt die Ungleichung

$$|x_n - c| < r\,q^n \tag{6}$$

nach (5) für $n = 0$. Gilt sie für einen Wert $n = m$, so ist $x_{m+1} = f(x_m)$ erklärt, und nach (4) gilt (6) auch mit $n = m+1$ und daher allgemein. Nach Koenigs bilden wir die Folge der Werte $a^{-n}(x_n - c)$; von ihren Differenzen gilt nach (3) und der dritten Voraussetzung

$$\begin{aligned} |a^{-n-1}(x_{n+1}-c) - a^{-n}(x_n-c)| &= |a|^{-n-1}\,|f(x_n) - c - a(x_n-c)| \\ &\leq |a|^{-n-1} M\,|x_n - c|^{\delta} \\ &\leq \frac{M r^{\delta}}{|a|}\left(\frac{q^{\delta}}{|a|}\right)^n. \end{aligned} \tag{7}$$

Damit ist für die Summe der Differenzen der Folge $\left(a^{-n}(x_n-c)\right)$ eine feste, wegen (3) konvergente Majorante hergestellt. Die Folge strebt also gleichmäßig einer Grenzfunktion $\chi(x)$ zu, und von dieser gilt

$$\begin{aligned} \chi(f(x)) &= \lim_{n\to\infty}\left(a^{-n}(x_{n+1}-c)\right) \\ &= a \lim_{n\to\infty}\left(a^{-n-1}(x_{n+1}-c)\right) \\ &= a\,\chi(x), \end{aligned}$$

wie behauptet war.

Zusatz. *Erfüllt die Funktion $f(x)$ die Voraussetzungen von Satz 1 und ist sie überdies bei $x = c$ analytisch — damit ist die Voraussetzung 2. als Voraussetzung unnötig und erklärt nur den Wert $a = f'(c)$ —, so ist auch die durch Satz 1 gegebene Funktion $\chi(x)$ bei $x = c$ analytisch mit dem Ableitungswert 1.*

In der Tat hängen die Werte $a^{-n}(x_n - c)$ analytisch von x ab, wenn $|x - c|$ hinreichend klein ist, und haben für $x = c$ den Ableitungswert 1. Aus der gleichmäßigen Konvergenz folgt die Behauptung.

Satz 2. *Die durch Satz 1 gegebene Funktion $\chi(x)$ ist bei $x = c$ differenzierbar mit dem Ableitungswert 1.*

Wir brauchen nur in der Darstellung

$$\chi(x) = x - c + \sum_{n=0}^{\infty} [a^{-n-1}(x_{n+1} - c) - a^{-n}(x_n - c)]$$

die Reihe mit Hilfe von (7) durch

$$|a^{-n-1}(x_{n+1} - c) - a^{-n}(x_n - c)| \leq \frac{M|x-c|^\delta}{|a|}\left(\frac{q^\delta}{|a|}\right)^n$$

abzuschätzen; so ergibt sich

$$|\chi(x) - (x - c)| \leq \frac{M|x-c|^\delta}{|a| - q^\delta},$$

$$\left|\frac{\chi(x)}{x-c} - 1\right| \leq \frac{M|x-c|^{\delta-1}}{|a| - q^\delta} \to 0 \quad (x \to c),$$

d. h. die Behauptung.

Satz 3. *Ist irgendeine Lösung $\chi_1(x)$ der Schröderschen Gleichung* (2) *— mit beliebigem γ — bei $x = c$ differenzierbar mit von Null verschiedenem Ableitungswert, so ist $\gamma = a$ und*

$$\chi_1(x) = \chi_1'(c)\,\chi(x).$$

Zunächst ist $\chi_1(x)$ bei $x = c$ stetig; unter n-maliger Anwendung von (2) erhalten wir daher

$$\gamma^n \chi_1(x) = \chi_1(x_n) \to \chi_1(c). \tag{8}$$

Da $\chi_1(x)$ wegen der Voraussetzung über die Ableitung in einer Umgebung des Punktes $x = c$ von Null verschieden ist, außer vielleicht bei $x = c$ selbst, kann $\chi_1(x) \neq 0$ angenommen werden. Daher strebt γ^n für $n \to \infty$ einem Grenzwert zu, d. h. es ist $\gamma = 1$ oder $|\gamma| < 1$. Der erste Fall kann nicht eintreten; denn dann wäre

$$\chi_1(x_n) = \chi_1(c), \quad \chi_1'(c) = \lim_{n\to\infty} \frac{\chi_1(x_n) - \chi_1(c)}{x_n - c} = 0.$$

Also ist $|\gamma| < 1$ und $\chi_1(c) = 0$ wegen (8). Weiter ist

$$\begin{aligned}\chi_1'(c) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\chi_1(x_n)}{x_n - c} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\chi_1(x_n)}{\chi(x_n)} \cdot \frac{\chi(x_n)}{x_n - c} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\gamma^n \chi_1(x)}{a^n \chi(x)}.\end{aligned}$$

Die von n unabhängigen Faktoren beiderseits sind von Null verschieden; also strebt $(\gamma/a)^n$ einem von Null verschiedenen Grenzwerte zu. Es ist daher $\gamma = a$, und damit ist die letzte Formel in den letzten Teil der Behauptung verwandelt.

§ 3. Ruhewerte der Exponentialfunktion.

Um die Ergebnisse des vorigen Paragraphen auf $f(x) = e^x$ anwenden zu können, suchen wir jetzt die Ruhewerte der Exponentialfunktion auf. Im Reellen sind keine vorhanden; wir setzen also $z = x + i\,y$ und haben die Gleichungen

$$e^x \cos y = x, \quad e^x \sin y = y$$

durch reelle x und y zu lösen. Umkehrung des Vorzeichens von y läßt beide Gleichungen bestehen, die Ruhewerte sind paarweise konjugiert komplex; also dürfen wir uns auf positive y beschränken. Nach der zweiten Gleichung ist dann auch

$$\sin y > 0. \tag{9}$$

Durch Division einerseits Bildung der Quadratsumme andrerseits folgern wir ferner

$$x = y \operatorname{ctg} y, \quad y^2 = e^{2x} - x^2. \tag{10}$$

Durch die erste dieser Gleichungen ist x in jeder Strecke $k\pi < y < (k+1)\pi$ $(k = 0, 1, \ldots)$ als eindeutige stetige Funktion, von y festgelegt und zwar als abnehmende Funktion, wie aus

$$\frac{d}{dy}(y \operatorname{ctg} y) = \frac{\sin 2y - 2y}{2 \sin^2 y} < 0$$

folgt. Sie durchläuft in der ersten Strecke die Werte von 1 bis $-\infty$, in allen anderen alle reelle Werte. Die dementsprechenden Kurvenzüge sind in Fig. 1 eingetragen, und zwar die durch (9) ausgeschlossenen gestrichelt.

Die zweite Gleichung (10) bestimmt y^2 als eindeutige stetige Funktion von x, und zwar als zunehmende; denn bei negativem x nimmt jeder der beiden Summanden zu, bei positivem x jedes Glied der Potenzreihe

$$e^{2x} - x^2 = 1 + 2x + x^2 + \frac{2^3}{3!}x^3 + \cdots.$$

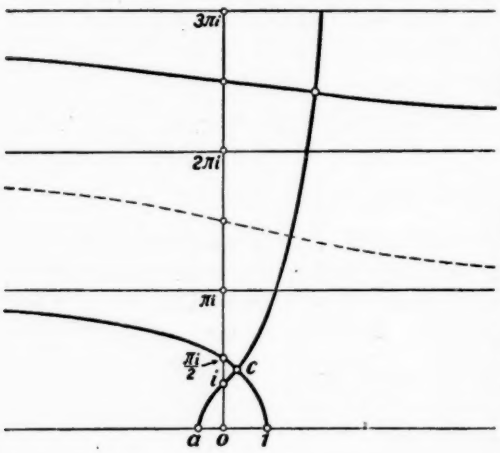


Fig. 1.

Den Wert 1 nimmt sie an bei $x = 0$, den Wert 0 bei der einzigen reellen Wurzel $\alpha \approx -0{,}5671433$ der Gleichung $e^x + x = 0$. Danach ist y als stetige Funktion von x bestimmt, die, bei $x = \alpha$ mit $y = 0$ beginnend, wachsend alle positiven Werte durchläuft und bei $x = 0$ den Wert 1 hat. Umgekehrt ist x für alle positiven y als stetige Funktion bestimmt, die, bei $y = 0$ mit $x = \alpha$ beginnend, wachsend alle größeren Werte durchläuft und bei $y = 1$ durch Null geht. Die entsprechende Kurve ist ebenfalls in Fig. 1 zu sehen. Aus der Betrachtung der Schnitte beider Kurven ergibt sich ohne weiteres

Satz 5. *In jedem der Halbstreifen*

$$x > 0, \; 2k\pi < y < \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

hat die Exponentialfunktion genau einen Ruhewert; diese und die konjugiert-komplexen sind die einzigen Ruhewerte.

Der reellen Achse am nächsten liegt der zu $k = 0$ gehörige Ruhewert (und der konjugiert komplexe). Ihn bezeichnen wir mit $c = a + i\,b$; zahlenmäßig ist

$$a \approx 0{,}3181315, \quad b = \arg c \approx 1{,}3372357 \approx 76^\circ\, 37'\, 4'',65, \quad |c| = e^a \approx 1{,}3745570.$$

Diese Werte wurden folgendermaßen gefunden. Da c für die Exponentialfunktion wegen $|e^c| = |c| > 1$ ein abstoßender, für die Umkehrfunktion $\ln z$ daher ein anziehender Ruhewert ist, muß bei geeignetem Ausgangswert x_0 die Folge der Werte x_0, $x_1 = \ln x_0$, $x_2 = \ln x_1, \ldots$ gegen c streben. Die Konvergenz — nach Art einer geometrischen Reihe mit dem Quotienten $1/c$ — ist aber praktisch unzureichend. Wendet man aber die regula falsi an, so erhält man in

$$x_0' = \frac{x_0\, x_2 - x_1^2}{x_0 - 2\, x_1 + x_2}$$

einen wesentlich verbesserten neuen Ausgangswert. Dies wurde nun nicht rechnerisch, sondern durch Zeichnung in großem Maßstabe durchgeführt. Es ist nämlich x_0' derjenige Punkt der komplexen Zahlenebene, der mit x_0 und x_1 einerseits, mit x_1 und x_2 andererseits zwei ähnliche Dreiecke bildet. Daraus ergibt sich die einfache Konstruktion der Fig. 2 mit vier Loten, zwei Zirkelschlägen und einer Streckenhalbierung statt der umständlichen Multiplikation und Division komplexer Zahlen. Das Verfahren geht natürlich bei jeder Gleichung $z = f(z)$ mit einer analytischen Funktion $f(z)$.

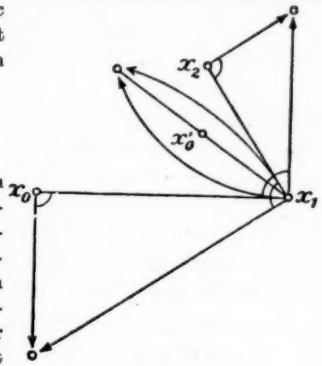


Fig. 2.

§ 4. Die Lösung der Schröderschen Gleichung und ihre analytische Fortsetzung.

Erklären wir die Funktion $\ln z$ in der oberen Halbebene zu ihrem Hauptwert, so ist c ein Ruhewert, und zwar wegen

$$0 < \left|\frac{d \ln z}{dz}\right|^{z=c} = \left|\frac{1}{c}\right| < 1$$

ein einfacher anziehender. Die Sätze 1 und 2 aus § 2 liefern eine Funktion $\chi(z)$, die in einer Umgebung $\mathfrak{U}$ von c, etwa für

$$|z - c| < \varrho > 0$$

analytisch ist, dort eine Entwicklung

$$\chi(z) = z - c + \alpha\,(z - c)^2 + \cdots$$

zuläßt und die Gleichung

$$\chi(\ln z) = c^{-1}\,\chi(z) \tag{11}$$

erfüllt. Liegt z in einer geeigneten engeren Umgebung $\mathfrak{U}'$ von c, so liegt e^z in $\mathfrak{U}$, und es ist

$$\chi(e^z) = c\,\chi(z). \tag{12}$$

Mit Hilfe von (12) läßt sich nun $\chi(z)$ analytisch fortsetzen in die ganze obere Halbebene und auf ihren Rand mit Ausnahme der Punkte

$$e_0 = 0, \quad e_1 = 1, \quad e_2 = e, \quad e_3 = e^e, \ldots, \quad e_{n+1} = e^{e_n}, \ldots$$

Diesen Bereich:

$$\operatorname{Im} z \geqq 0, \quad z \neq e_n \; (n = 0, 1, \ldots)$$

nennen wir $\mathfrak{H}$; erklären wir auf der negativen reellen Halbachse $\ln z$ mit dem Imaginärteil π, so ist $\ln z$ überall in $\mathfrak{H}$ analytisch und bildet $\mathfrak{H}$ ab auf den durch $y \leqq \pi$ ausgeschiedenen Teilbereich. Diese Abbildung, die jeweils z in $z_1 = \ln z$ überführt, z_1 in $z_2 = \ln z_1$ usw., wird durch den Veränderlichenwechsel

$$\zeta = \frac{z - c}{z - \bar{c}}, \qquad \zeta_n = \frac{z_n - c}{z_n - \bar{c}}$$

verwandelt in eine nullpunktstreue konforme Abbildung des Einheitskreises der ζ-Ebene auf ein echtes Teilgebiet. Nach dem Schwarzschen Lemma strebt ζ_n gegen 0 und daher z_n gegen c, wenn ζ im Innern des Einheitskreises, d. h. wenn z im Inneren der oberen Halbebene liegt. Liegt aber ein Punkt z von $\mathfrak{H}$ auf der reellen Achse, ist etwa $e_k < z < e_{k+1}$ (dabei sei $e_{-1} = -\infty$ gesetzt), so liegt z_{k+2} im Inneren der oberen Halbebene, und es strebt auch in diesem Falle z_n gegen c.

Die Teilmenge derjenigen Punkte z von $\mathfrak{H}$, für die z_n — und danach auch jedes z_m mit $m > n$ — in $\mathfrak{U}$ liegt, nennen wir $\mathfrak{G}_n$; dann ist $\mathfrak{H}$ die Vereinigungsmenge der wachsenden Folge $\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1, \ldots$ Ist nun schon bewiesen, daß sich die Funktion $\chi(z)$ in $\mathfrak{G}_n$ analytisch fortsetzen läßt und daß (11) auch in $\mathfrak{G}_n$ gilt — und das ist für $n = 0$ der Fall —, so erklären wir eine Funktion $\chi_1(z)$ für alle Werte z aus $\mathfrak{G}_{n+1}$ durch

$$\chi_1(z) = c\,\chi(\ln z). \tag{13}$$

Das ist möglich, weil für jedes z aus $\mathfrak{G}_{n+1}$ der Wert $\ln z$ in $\mathfrak{G}_n$ liegt. Liegt aber z schon in $\mathfrak{G}_n$, so zeigt der Vergleich von (11) und (13), daß $\chi_1(z)$ mit $\chi(z)$ übereinstimmt. Wir haben also in $\chi_1(z)$ die analytische Fortsetzung der Funktion $\chi(z)$ in den Bereich $\mathfrak{G}_{n+1}$ vor uns, und dürfen sie wieder mit $\chi(z)$ bezeichnen; die Gleichung (13) sagt dann aus, daß (11) auch in $\mathfrak{G}_{n+1}$ gilt. So wird $\chi(z)$ Schritt für Schritt in den ganzen Bereich $\mathfrak{H}$ analytisch fortgesetzt, und überall in $\mathfrak{H}$ gilt (11) und, soweit e^z auch in $\mathfrak{H}$ liegt, auch (12). Wir fassen zusammen:

Satz 6. *Es gibt eine in $\mathfrak{H}$ analytische Funktion $\chi(z)$ mit den Eigenschaften $\chi'(c) = 1$ und* (11). *Sie ist durch diese Eigenschaften vollkommen bestimmt.*

Wegen $\chi'(c) = 1$ läßt sich die Umkehrfunktion $\chi^{-1}(z)$ von $\chi(z)$ in einer Umgebung des Wertes $\chi(c) = 0$, etwa für $|z| < \sigma > 0$ als reguläre Funktion erklären, und sie erfüllt wegen (12) für $|z| < \sigma/|c|$ die Gleichung

$$\chi^{-1}(c\,z) = \exp\left(\chi^{-1}(z)\right). \tag{14}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung läßt sie sich aus jedem Kreise $|z| < r$ in den Kreis $|z| < |c|\,r$ analytisch fortsetzen unter Erhaltung der Gültigkeit von (14). Sie ist also eine ganze Funktion. Daraus folgt, daß die Funktion $\chi(z)$ in ihrem gesamten Regularitätsbereich, insbesondere in $\mathfrak{H}$ keinen Wert mehrmals annimmt und daß ihre Ableitung nirgends zu Null wird. Übrigens ist $\chi^{-1}(z)$, wie (14) zeigt, nicht nur eine Funktion unendlicher Ordnung in dem üblichen Sinne, sondern ihr Anwachsen übersteigt sogar jede Funktion der exponentiellen Wachstumsskala, d. h. jede endliche Aufstufung der Exponentialfunktion.

Als ganze Funktion nimmt $\chi^{-1}(z)$ in jedem beschränkten Bereich nur einen beschränkten Bereich von Werten an. Wächst also $|\chi^{-1}(z)|$ über alle Grenzen, so muß es auch $|z|$ tun. Auf die Funktion $\chi(z)$ übersetzt besagt das einfach

$$|\chi(z)| \to \infty, \quad \text{wenn} \quad |z| \to \infty.$$

Wenn nun z sich innerhalb des Bereiches $\mathfrak{H}$ einem der Werte e_k nähert, so geht $|\ln^{k+1} z|$ und daher auch $\chi(\ln^{k+1} z)$ ins Unendliche. Wegen

$$\chi(\ln^m z) = c^{-m}\,\chi(z)$$

gilt daher

$$|\chi(z)| \to \infty, \quad \text{wenn} \quad z \to e_k \text{ innerhalb } \mathfrak{H}.$$

Um den Verlauf der Funktion $\chi(z)$ so eingehend beschreiben zu können, wie es für uns erwünscht ist, beschränken wir uns auf den folgenden Teilbereich von $\mathfrak{H}$, den wir mit $\mathfrak{H}_0'$ bezeichnen:

$$y \geq 0, \quad x \geq a, \quad |z| \leq c, \quad z \neq 1.$$

Er ist also ein Kreisbogendreieck (s. Fig. 3), von dem der Punkt $z = 1$ abgetrennt ist. Für die Randteile von $\mathfrak{H}_0$ führen wir die folgenden Bezeichnungen ein: es sei

$\mathfrak{A}_0$ die Strecke $x = a$, $0 \leq y \leq b$,

$\mathfrak{A}_1$ der Kreisbogen $|z| = |c|$, $0 \leq \arg z \leq b$,

$\mathfrak{B}_0''$ die Strecke $a \leq x < 1$, $y = 0$,

$\mathfrak{B}_1'$ die Strecke $1 < x \leq |c|$, $y = 0$.

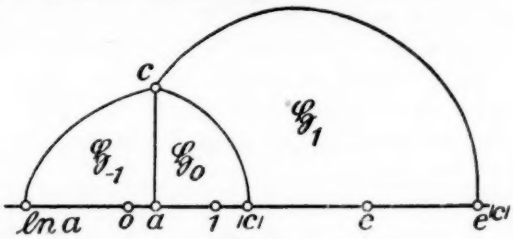


Fig. 3.

Ferner bezeichne derselbe Buchstabe mit um Eins erhöhtem bezw. vermindertem Zeiger die Punktmenge, die aus der ursprünglichen durch Übergang von z zu e^z bezw. zu $\ln z$ entsteht; dieser Grundsatz ist bei $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{A}_1$ schon befolgt. Schließlich sei $\mathfrak{B}_n$ die Vereinigung von $\mathfrak{B}_n'$ und $\mathfrak{B}_n''$, d. h. die Strecke $e_n < z < e_{n+1}$. Die drei Bereiche $\mathfrak{H}_{-1}$, $\mathfrak{H}_0$ und $\mathfrak{H}_1$ sind punktfremd bis auf die $\mathfrak{H}_{-1}$ und $\mathfrak{H}_0$ gemeinsame Randstrecke $\mathfrak{A}_0$ und auf den $\mathfrak{H}_0$ und $\mathfrak{H}_1$ gemeinsamen Randbogen $\mathfrak{A}_1$; denn aus den in $\mathfrak{H}_0$ gültigen Ungleichungen

$$|z| \leq |c|, \quad x \geq a, \quad 0 \leq y \leq b$$

folgt

$$x \leq \ln |c| = a \text{ in } \mathfrak{H}_{-1}, \quad |z| \geq |c|, \quad 0 \leq \arg z \leq b \text{ in } \mathfrak{H}_1.$$

Und wegen $b < \frac{1}{2}\pi$ folgt aus den beiden letzten Ungleichungen

$$x \geq a \text{ in } \mathfrak{H}_1,$$

worin das Gleichheitszeichen nur für $z = c$ gilt.

Wir bezeichnen jetzt die durch die Funktion $\chi(z)$ entworfenen Bilder von $\mathfrak{H}_n$, $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{B}_n$, $\mathfrak{B}_n'$ und $\mathfrak{B}_n''$ der Reihe nach mit $\mathfrak{K}_n$, $\mathfrak{C}_n$, $\mathfrak{D}_n$, $\mathfrak{D}_n'$ und $\mathfrak{D}_n''$ und fassen das bisher Bewiesene zusammen.

Satz 7. *Die Funktion $\chi(z)$ bildet den Bereich $\mathfrak{H}_n$ $(n = -1, 0, 1)$ ab auf einen Bereich $\mathfrak{K}_n$, der von den vier analytischen Bögen $\mathfrak{C}_n$, $\mathfrak{C}_{n+1}$, $\mathfrak{D}_n''$ und $\mathfrak{D}_{n+1}'$ berandet wird. $\mathfrak{C}_n$ und $\mathfrak{C}_{n+1}$ bilden im Nullpunkt einen Winkel der Größe b; die Bögen $\mathfrak{C}_0$ und $\mathfrak{D}_0''$ bilden im Punkte $\chi(a)$ einen rechten Winkel, $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{D}_1'$ im Punkte $\chi(|c|)$. Diese Winkel sind ausspringende Ecken von $\mathfrak{K}_0$. Die Bögen $\mathfrak{D}_n''$ und $\mathfrak{D}_{n+1}'$ erstrecken sich andererseits ins Unendliche. Die Strecken $\mathfrak{B}_n$ werden auf die beiderseits ins Unendliche sich erstreckenden analytischen Bögen $\mathfrak{D}_n$ abgebildet. Bedeutet $\mathfrak{U}$ eines der Zeichen $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$ oder $\mathfrak{D}''$, so geht $\mathfrak{U}_{n+1}$ aus $\mathfrak{U}_n$ durch die Drehstreckung $w \to c\,w$ hervor.*

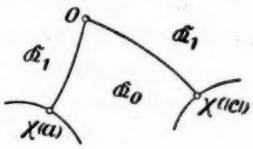


Fig. 4.

Die Gestalt der in Satz 7 vorkommenden Bereiche und Kurven ist — ohne Anspruch auf zahlenmäßige Richtigkeit — in Fig. 4 wiedergegeben.

§ 5. Reelle analytische Lösung der Abelschen Funktionalgleichung.

Zu einer Lösung der Abelschen Funktionalgleichung führt der am Schluß des § 1 angedeutete Ansatz; ihn wollen wir jetzt genauer verfolgen. Da der Bereich $\mathfrak{K}_{-1} + \mathfrak{K}_0 + \mathfrak{K}_1$ einfach zusammenhängend ist und den Nullpunkt nur als Randpunkt enthält, läßt sich in ihm der Logarithmus als eindeutige analytische Funktion festlegen. Damit ist in $\mathfrak{H}_{-1} + \mathfrak{H}_0 + \mathfrak{H}_1$ mit Ausnahme des Punktes $z = c$ eine eindeutige analytische Funktion

$$\psi(z) = \ln \chi(z)$$

bestimmt, sobald wir von den Zweigen des Logarithmus einen ausgewählt haben. Nun hat $\mathfrak{H}_{-1} + \mathfrak{H}_0 + \mathfrak{H}_1$ mit der vom Punkte $z = c$ nach links ausgehenden waagerechten Halbgeraden nur den Punkt $z = c$ gemein; daher kann in $\mathfrak{H}_{-1} + \mathfrak{H}_0 + \mathfrak{H}_1$ unter den Zweigen von $\ln(z-c)$ der Hauptwert ausgewählt werden. Wegen

$$\lim_{z \to c} \frac{\chi(z)}{z-c} = 1$$

können wir unter den Zweigen von $\ln \chi(z)$ durch die Forderung

$$\lim_{z \to c} [\psi(z) - \ln(z-c)] = 0 \tag{15}$$

einen auswählen, worin eben $\ln(z-c)$ den Hauptwert bedeute.

Die so bestimmte Funktion $\psi(z)$ genügt wegen (12) einer Abelschen Funktionalgleichung

$$\psi(e^z) = \psi(z) + \ln c.$$

Um zu ermitteln, welcher Wert von $\ln c$ zutrifft, lassen wir z innerhalb $\mathfrak{H}_0$ gegen c gehen. Die Differenz der Hauptwerte $\ln(e^z - c) - \ln(z-c)$ hat den Grenzwert c, wie man leicht feststellt; damit ist der Wert $\ln c$ in der letzten Gleichung zu c festgelegt, und es gilt

$$\psi(e^z) = \psi(z) + c. \tag{16}$$

Berücksichtigen wir jetzt die bekannten Eigenschaften des Logarithmus, besonders die, keinen Wert zweimal anzunehmen, so können wir die Aussagen von Satz 7 unmittelbar in solche über die Funktion $\psi(z)$ umsetzen. Zwecks kürzeren Ausdrucks wollen wir von allen vorkommenden Punktmengen der z-Ebene den Punkt $z = c$ wegnehmen und doch die bisherigen Bezeichnungen beibehalten. So erhalten wir

Satz 8. *Die Funktion $\psi(z)$ bildet den Bereich $\mathfrak{H}_n$ $(n = -1, 0, 1)$ der z-Ebene ab auf einen Bereich $\mathfrak{L}_n$, der von den vier analytischen Bögen $\mathfrak{E}_n$, $\mathfrak{E}_{n+1}$, $\mathfrak{F}''_n$ und $\mathfrak{F}'_{n+1}$ berandet wird. Diese sind der Reihe nach die Bilder von $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{A}_{n+1}$, $\mathfrak{B}''_n$ und $\mathfrak{B}'_{n+1}$. Die Bögen $\mathfrak{E}_n$ und $\mathfrak{F}''_n$ sowie $\mathfrak{E}_{n+1}$ und $\mathfrak{F}'_{n+1}$ haben je einen Endpunkt gemeinsam und bilden in ihm einen rechten Winkel, der ausspringende Ecke von $\mathfrak{L}_n$ ist. Die Bögen $\mathfrak{E}_n$ und $\mathfrak{E}_{n+1}$ erstrecken sich andererseits nach links ins Unendliche, der Imaginärteil von z hat auf ihnen den Grenzwert $-\frac{1}{2}\pi + n\,b$ bzw. $-\frac{1}{2}\pi + (n+1)\,b$. Die Bögen $\mathfrak{F}''_n$ und $\mathfrak{F}'_{n+1}$ erstrecken sich andrerseits nach rechts ins Unendliche. Die Bereiche $\mathfrak{L}_{-1}$, $\mathfrak{L}_0$ und $\mathfrak{L}_1$ sind punktfremd bis auf die gemeinsamen Randbögen. Die Bögen $\mathfrak{F}'_m$ und $\mathfrak{F}''_m$ $(m = 0,1)$ bilden zusammen einen analytischen, sich beiderseits nach rechts ins Unendliche erstreckenden Bogen $\mathfrak{F}_m$. Bedeutet $\mathfrak{B}$ eines der Zeichen $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$ oder $\mathfrak{F}''$, so geht $\mathfrak{B}_{m+1}$ aus $\mathfrak{B}_m$ durch Parallelverschiebung um die Strecke c hervor (soweit die Figuren erklärt sind).*

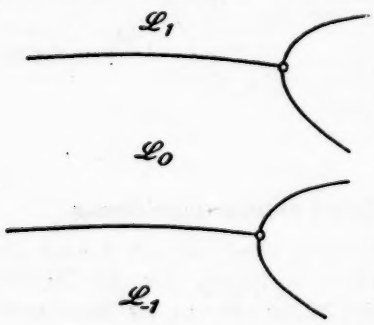


Fig. 5.

Fig. 5 zeigt — wieder ohne Anspruch auf zahlenmäßige Richtigkeit — die Gestalt der beschriebenen Bereiche und Kurven.

Wir bezeichnen jetzt allgemein mit $\mathfrak{B}_n$ die aus $\mathfrak{B}_0$ durch Parallelverschiebung um die Strecke $n\,c$ entstehende Figur. In der Folge der Bereiche $\mathfrak{L}_n$ haben dann zwei Nachbarn $\mathfrak{L}_n$ und $\mathfrak{L}_{n+1}$ genau den Randbogen $\mathfrak{E}_{n+1}$ gemeinsam, und zwei Bereiche $\mathfrak{L}_n$ und $\mathfrak{L}_{n+2}$ sind punktfremd. Legen wir jetzt im Innern von $\mathfrak{L}_0$ eine einfache Kurve $\mathfrak{M}_0$, die von links aus dem Unendlichen kommt und nach rechts ins Unendliche führt, so zerlegt sie

die Ebene in zwei Gebiete $\mathfrak{M}_0^+$ und $\mathfrak{M}_0^-$; dem einen, etwa $\mathfrak{M}_0^+$, gehört $\mathfrak{L}_1$ an, dem anderen $\mathfrak{L}_{-1}$. Ebenso gehört $\mathfrak{L}_0$ und daher $\mathfrak{M}_0$ dem Gebiet $\mathfrak{M}_1^-$ an. Also wird $\mathfrak{M}_1^+$ durch $\mathfrak{M}_0$ nicht zerlegt und gehört daher einem der Gebiete $\mathfrak{M}_0^+$ und $\mathfrak{M}_0^-$ an, und zwar $\mathfrak{M}_0^+$, da dieses mit $\mathfrak{M}_1^+$ Punkte, z. B. die von $\mathfrak{E}_2$ gemeinsam hat. Ebenso liegt $\mathfrak{M}_{n+1}^+$ in $\mathfrak{M}_n^+$ für jedes n, und $\mathfrak{M}_m^+$ in $\mathfrak{M}_n^+$, wenn $m > n$ ist. Daraus folgt, daß $\mathfrak{L}_m$ und $\mathfrak{L}_n$ punktfremd sind, wenn $m > n+1$ ist; denn $\mathfrak{L}_n$ liegt in $\mathfrak{M}_{n+1}^-$ und $\mathfrak{L}_m$ in $\mathfrak{M}_{m-1}^+$ und daher in $\mathfrak{M}_{n+1}^+$. Also haben in der Folge der Bereiche $\mathfrak{L}_n$ nur Nachbarn $\mathfrak{L}_n$ und $\mathfrak{L}_{n+1}$ gemeinsame Punkte, und zwar jeweils genau den Bogen $\mathfrak{E}_{n+1}$. Daher hat die Vereinigung $\mathfrak{L}$ aller Bereiche $\mathfrak{L}_n$ zu Randpunkten genau die Randpunkte aller Bereiche $\mathfrak{L}_n$ mit Ausnahme der inneren Punkte der Bögen $\mathfrak{E}_n$, d. h. genau die Gesamtheit der paarweise punktfremden, beiderseits nach rechts ins Unendliche führenden analytischen Bögen $\mathfrak{F}_n$.

Wir bilden jetzt den Bereich $\mathfrak{L}$ der w-Ebene konform ab auf eine Kreisscheibe $\mathfrak{S}$ der v-Ebene. Der Parallelverschiebung um die Strecke c, die $\mathfrak{L}$ in sich verwandelt, entspricht eine konforme Abbildung der Kreisscheibe $\mathfrak{S}$ auf sich, die keinen Ruhepunkt im Innern hat. Sie ist daher linear gebrochen, und zwar parabolisch oder hyperbolisch und hat ihren Ruhepunkt bzw. ihre beiden Ruhepunkte auf dem Rande der Scheibe $\mathfrak{S}$. Wir wollen zuerst zeigen, daß der hyperbolische Fall nicht in Betracht kommt. Zu dem Zwecke betrachten wir die Funktion $e^{i\,w/c}$. Sie ist beschränkt links von jeder Graden, die unter dem Winkel b ansteigt; die Schranke liegt beliebig nahe an Null, wenn die Grade hinreichend weit links liegt. In die v-Ebene übertragen liefert die Grade eine Kurve von Rand zu Rand in der Kreisscheibe $\mathfrak{S}$, die durch die hyperbolische Substitution in sich übergeführt wird. Daher wird aus $e^{i\,w/c}$ eine in $\mathfrak{S}$ reguläre, nicht identisch verschwindende Funktion, die bei Annäherung an einen der beiden Bögen zwischen den beiden Ruhepunkten gegen Null strebt. Da es eine solche nicht gibt, muß die Substitution parabolisch sein.

Wählen wir jetzt $\mathfrak{S}$ als die obere Halbebene, so können wir durch geeignete Wahl der konformen Abbildung den Ruhepunkt ins Unendliche werfen. Ein positiver Maßstabsfaktor bleibt dabei noch verfügbar. Die parabolische Substitution wird eine Parallelverschiebung längs der reellen Achse. Über den Maßstabsfaktor verfügen wir so, daß die Verschiebungsstrecke gleich ± 1 wird. Um über das Vorzeichen zu entscheiden, verbinden wir einen Punkt A im Innern von $\mathfrak{L}$ mit einem Punkt auf $\mathfrak{F}_0$ und mit dem um c verschobenen Punkt auf $\mathfrak{F}_1$, und ziehen von A nach links ins Unendliche eine dritte Linie. Wenn diese drei sich sonst nicht treffen, ist der durch sie — in der hier gewählten Reihenfolge — bestimmte Umlaufssinn um A der positive. Dasselbe gilt von ihren Bildern in der v-Ebene. Dies sind aber drei Linien von einem inneren Punkt der oberen Halbebene nach einem Punkt der reellen Achse, nach dem um ± 1 verschobenen Punkt und ins Unendliche, die sich sonst nicht treffen und in der oberen Halbebene verlaufen. Sie folgen nur dann im positiven Drehsinn aufeinander, wenn die Verschiebung die um $+1$ ist.

Durch die Zusammensetzung der Funktion $w = \psi(z)$ mit der konformen Abbildung in die v-Ebene ist, wie wir jetzt zeigen wollen, eine Funktion $v = \Psi(z)$ gegeben, die längs der ganzen reellen Achse analytisch und reell ist und die Abelsche Funktionalgleichung erfüllt. Zunächst ist sie längs des auf der reellen Achse gelegenen Randteils der Bereiche $\mathfrak{H}_{-1}$, $\mathfrak{H}_0$ und $\mathfrak{H}_1$, d. h. längs der Strecke von $\ln a$ bis $e^{|c|}$ erklärt und in einem dieser Strecke anliegenden Streifen in der oberen Halbebene analytisch. Da sie aber diesen Streifen auf einen einer reellen Strecke anliegenden Streifen der oberen Halbebene der v-Ebene abbildet, ist $\Psi(z)$ nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip auch auf der genannten Strecke selbst regulär. Dem Übergang von z zu e^z entsprach bei den Werten von $\psi(z) = w$ der Übergang von w zu $w + c$; nach den oben festgestellten Eigenschaften

der benutzten Abbildung von $\mathfrak{L}$ auf die obere Halbebene $\mathfrak{S}$ entspricht bei den Werten von $v = \Psi(z)$ der Übergang von v zu $v + 1$, d. h. es gilt die Abelsche Funktionalgleichung

$$\Psi(e^z) = \Psi(z) + 1 \tag{16}$$

zunächst, solange z und e^z der Strecke von $\ln a$ bis $e^{|c|}$ angehören. Die Funktionalgleichung (17) liefert aber sofort die analytische Fortsetzung längs der ganzen reellen Achse nach demselben Verfahren, das schon in § 4 angewandt wurde. Ist nämlich $0 \leq \alpha < \beta$ und $\Psi(z)$ für $\alpha < z \leq e^\beta$ als reguläre Funktion erklärt und gilt (16) für $\alpha < z \leq \beta$, so erklären wir

$$\Psi_1(z) = \Psi(\ln z) + 1 \text{ für } e^\alpha < z \leq \exp(e^\beta).$$

Nach (17) stimmt diese Funktion für $e^\alpha < z \leq e^\beta$ mit $\Psi(z)$ überein und liefert daher ihre analytische Fortsetzung bis zum Wert $\exp(e^\beta)$. Ebenso erklären wir

$$\Psi_2(z) = \Psi(e^z) - 1 \text{ für } \ln \alpha < z \leq \beta.$$

(worin natürlich $\ln 0 = -\infty$ zu setzen ist) und sehen aus (17), daß diese Funktion für $\alpha < z \leq \beta$ mit der Funktion $\Psi(z)$ übereinstimmt und daher ihre analytische Fortsetzung nach links bis zum Werte $\ln \alpha$ liefert. So gelingt die analytische Fortsetzung längs der ganzen reellen Achse. Dasselbe Ergebnis hätten wir natürlich auch erhalten, wenn wir die Funktionen $\psi(z)$ und $\Psi(z)$ von vornherein hinsichtlich ihres Verlaufes längs der ganzen reellen Achse untersucht hätten. Die Funktion $\Psi(z)$ bildet ein an die Strecke von $\ln a$ bis $e^{|c|}$ anstoßendes Gebiet der oberen Halbebene ab auf ein an eine Strecke (der Länge 3) anstoßendes Gebiet der oberen Halbebene. Sie hat daher auf der erstgenannten Strecke eine positive Ableitung. Da die bei ihrer analytischen Fortsetzung eingreifenden Funktionen ebenfalls positive Ableitung haben, gilt daselbe auch von der fortgesetzten Funktion, d. h. von der Funktion $\Psi(z)$ längs der ganzen reellen Achse. Nach rechts hin wächst sie über alle Grenzen, da sie nach (17) zu jedem Wert, den sie annimmt, auch den um 1 größeren annimmt. Nach links hin aber nähert sie sich dem Wert $\Psi(0) - 1$, wie man erkennt, wenn man in (17) den Grenzübergang $z \to -\infty$ vollzieht. Da bei $\Psi(z)$ noch eine additive Konstante verfügbar ist, können wir diesen Grenzwert zu Null machen.

Zur besseren Übersicht fassen wir noch einmal zusammen:

Satz 9. *Die Funktion $\Psi(z)$ ist in dem aus $\mathfrak{H}_{-1}$, $\mathfrak{H}_0$ und $\mathfrak{H}_1$ (mit Ausschluß des Punktes $z = c$) und aus der ganzen reellen Achse bestehenden Bereich regulär. Auf der reellen Achse hat sie positive Ableitungen und nimmt wachsend alle positiven Werte an. In $\mathfrak{H}_{-1}$ und $\mathfrak{H}_0$ (ohne Punkt $z = c$) und auf der reellen Achse erfüllt sie die Abelsche Funktionalgleichung* (17).

§ 6. Lösung der im Titel genannten Aufgabe. Schlußbemerkungen.

Nach den in Satz 9 zusammengefaßten Ergebnissen über $\Psi(z)$ ist die Umkehrfunktion $\Psi^{-1}(z)$ für alle positiven z erklärt, dort analytisch und reell mit positiver Ableitung. Daher läßt sich der in § 1 gegebene Ansatz durchführen: die Funktion

$$\Phi(z) = \Psi^{-1}\left[\Psi(z) + \frac{1}{2}\right]$$

ist längs der ganzen reellen Achse analytisch und reell mit positiver Ableitung und erfüllt dort die Funktionalgleichung

$$\Phi\big(\Phi(z)\big) = e^z.$$

Damit ist die gestellte Aufgabe gelöst.

Die hier angewandten Mittel lassen sich natürlich auf manche ähnliche Aufgabe anwenden. Beispiele will ich nicht aufzählen; man bedenke nur, daß von der Exponentialfunktion, die in der Aufgabe auftritt, nur einige wenige Eigenschaften benutzt wurden, die sie mit mancher anderen Funktion gemeinsam hat. Auch bei diesen Funktionen werden sich daher in ähnlicher Weise reelle analytische Lösungen der Schröderschen oder Abelschen Funktionalgleichung herstellen und mit ihrer Hilfe Aufstufungsfragen behandeln lassen.

Ferner läßt sich die gewonnene Funktion noch genauer untersuchen, und dies wird nötig sein, wenn man sie durch ihre funktionentheoretischen Eigenschaften vor anderen Lösungen derselben Aufgabe auszeichnen oder sie zahlenmäßig berechnen will. In dieser Richtung sei nur ohne Beweis ein Ergebnis angegeben. Die Funktion $\Psi(z)$ ist ja im Bereiche $\mathfrak{H}_0$ und auf seinem Rande bis auf den Punkt $z = c$ regulär. Bei diesem Punkte läßt sie sich aber durch eine Reihe der Form

$$\Psi(z) = \frac{1}{c} \ln(z-c) + \sum_{0 \leq m \leq n} c_{mn} (z-c)^{m + \frac{2n\pi i}{c}}$$

darstellen, die in einem Kreis um $z = c$ gleichmäßig und absolut konvergiert, wenn man die Potenzen durch den Hauptwert von $\ln(z-c)$ erklärt.

Eingegangen 1. November 1948

Über eine untere Abschätzung der n-ten Kreisteilungspolynome $g_n(z) = \prod_{d/n} (z^d - 1)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)}$.

Von *W. Klobe* in Erfurt.

In dem Wittschen Beweis[1]) für den Satz von Wedderburn, daß jeder endliche Schiefkörper kommutativ ist, wird nach einem eleganten rein-algebraischen Verfahren die Behauptung auf den Nachweis zurückgeführt, daß das n-te Kreisteilungspolynom $g_n(z)$ für $n > 1$ und natürliches $z > 1$ die Eigenschaft $g_n(z) > z - 1$ hat. Dieser letztere Nachweis wird von Witt auf einfachste Art durch untere Abschätzung der komplexen Linearfaktoren $z - \zeta$ erbracht. Es dürfte nicht ohne Interesse sein, diese analytische Schlußweise durch eine rein-arithmetische zu ersetzen und damit den Wittschen Beweis völlig frei von Analysis zu machen. Dies kann auf folgende einfache Weise geschehen:

Satz. *Ist $n\,(>1)$ eine natürliche Zahl mit $r\,(\geq 1)$ verschiedenen Primfaktoren und $g_n(z)$ das n-te Kreisteilungspolynom, so gilt*

$$g_n(z) > (z-1)^{2^{r-1}}$$

für reelles $z > 1$.

Beweis. Bekanntlich ist

$$g_n(z) = \prod_{d/n} (z^d - 1)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)} = \frac{\prod\limits_{d'/n,\, \mu\left(\frac{n}{d'}\right) = 1} (z^{d'} - 1)}{\prod\limits_{d''/n,\, \mu\left(\frac{n}{d''}\right) = -1} (z^{d''} - 1)}.$$

Entsprechend den geradzahligen und ungeradzahligen Kombinationen $\frac{n}{d'}$ und $\frac{n}{d''}$ der r verschiedenen Primteiler von n stehen hier im Zähler und Nenner jeweils 2^{r-1} Faktoren $z^{d'} - 1$ und $z^{d''} - 1$. Nun ist

$$z^{d'} - 1 \geq z^{d'} - z^{d'-1} = \frac{z-1}{z} z^{d'} \text{ (wegen } z > 1) \text{ und } z^{d''} - 1 < z^{d''}.$$

Daraus folgt

$$g_n(z) > \left(\frac{z-1}{z}\right)^{2^{r-1}} \frac{\prod\limits_{d'/n,\, \mu\left(\frac{n}{d'}\right) = 1} z^{d'}}{\prod\limits_{d''/n,\, \mu\left(\frac{n}{d''}\right) = -1} z^{d''}} = \left(\frac{z-1}{z}\right)^{2^{r-1}} \cdot \prod_{d/n} z^{d \cdot \mu\left(\frac{n}{d}\right)}$$

$$= \frac{(z-1)^{2^{r-1}}}{z^{2^{r-1}}} \cdot z^{\sum\limits_{d/n} d \cdot \mu\left(\frac{n}{d}\right)} = (z-1)^{2^{r-1}} \cdot z^{\varphi(n) - 2^{r-1}}.$$

---

[1]) E. Witt, Über die Kommutativität endlicher Schiefkörper. Abh. Math. Sem. Hamburg 8 (1931), 413.

Nun ist aber

$$\varphi(n) \geq \prod_{p/n} (p-1) \geq 2^{r-1},$$

da

$$p-1 \begin{cases} = 1 \text{ für } p = 2 \\ \geq 2 \text{ für } p \neq 2 \end{cases}$$

ist. Wegen $z > 1$ folgt daraus die Behauptung.

Für $z \geq 2$ folgt aus diesem Satz unmittelbar $g_n(z) > z - 1$. Diese Ungleichung gilt jedoch auch für

$$1 \leq z < 2.$$

Beweis. Für $r = 1$ ist dies unmittelbar einzusehen:

$$g_n(z) = \frac{z^{p^\nu} - 1}{z^{p^{\nu-1}} - 1} = z^{p^\nu - p^{\nu-1}} + z^{p^\nu - 2p^{\nu-1}} + \cdots + 1 > z - 1.$$

Für $r > 1$ gilt $g_n(1) = 1$. Also ist in der hinsichtlich des Faktors $z - 1$ reduzierten Bruchdarstellung von $g_n(z)$ die Koeffizientensumme im Zähler gleich der im Nenner. Alle Koeffizienten sind außerdem > 0 und symmetrisch angeordnet. Da der Grad des Zählers größer ist als der des Nenners, kann man jedem Einzelsummanden des Nenners einen solchen des Zählers von gleichem oder höherem Grade zuordnen. Für $z > 1$ folgt daraus

$$g_n(z) > 1,$$

also für $1 \leq z \leq 2$

$$g_n(z) > z - 1.$$

Eingegangen 23. Dezember 1948.

Beweis eines von I. Schur in der Theorie der C-Summierbarkeit aufgestellten Satzes.

Von *K. Knopp* in Tübingen.

In Band 151 dieses Journals hat I. Schur einen sehr allgemeinen und schönen Satz in der Theorie der Cesàroschen oder C-Summierbarkeit der Reihen aufgestellt, aber über den Beweis nur hinzugefügt, daß er eine recht umständliche Rechnung erfordere. In der vorliegenden Note wird dieser Satz unter erweiterten Voraussetzungen ziemlich einfach bewiesen. An besonderen Hilfsmitteln werden dabei nur zwei von Schur gleichfalls in jener Arbeit aufgestellte und bewiesene Sätze über konvergenztreue und konvergenzerzeugende Matrixtransformationen benutzt.

Es handelt sich dabei um die Frage, was aus dem Konvergenz- oder Summierbarkeitsverhalten einer Reihe $\sum a_\nu$ auf das einer anderen, die in der Form $\sum a_\nu b_\nu$ geschrieben werden soll, auf Grund bestimmter Annahmen über die hinzutretenden Faktoren b_ν geschlossen werden kann. Um die Dinge bequem formulieren zu können, soll mit Schur eine Folge $\{b_\nu\}$ vom Typus (C_l, C_k) heißen, wenn sie *jede C_l-summierbare*, und vom Typus (C_l', C_k), wenn sie *jede C_l-beschränkte* Reihe $\sum a_\nu$ in eine *C_k-summierbare* Reihe $\sum a_\nu b_\nu$ überführt. Benutzt man diese Bezeichnungen, so lautet der zu beweisende

Satz: *Die Faktorenfolge $\{b_\nu\}$ ist dann und nur dann vom Typus (C_l, C_k), $(0 \leq k \leq l$, k beliebig reell, l ganz), wenn*

$$b_\nu = O(\nu^{k-l}) \tag{1}$$

und

$$\sum_\nu \nu^l |\Delta^{l+1} b_\nu| < +\infty \tag{2}$$

ist. Sie ist dann und nur dann vom Typus (C_l', C_k), wenn

$$b_\nu = o(\nu^{k-l}) \tag{1'}$$

und (2) *erfüllt sind.*

Für $0 \leq l < k$ sind die Bedingungen die gleichen wie für $k = l$.

Der Schursche Satz ist der gleiche, nur daß in ihm auch k als ganz vorausgesetzt wird. Von diesem Schurschen Satz gab L. S. Bosanquet[1]) einen ersten Beweis. In seiner Note findet man auch genaue Literaturangaben über ältere Teilantworten. Für $k = l = 0$ erkennt man im hinreichenden Teil des Satzes die bekannten auf Abel und Dirichlet zurückgehenden Konvergenzkriterien von Dedekind und Du Bois-Reymond. Für $k = l \geq 0$ ebenso die Sätze von Hardy und Bohr, nach denen die Fragestellung gewöhnlich benannt wird. Der folgende Beweis dürfte nach Anlage und Durchführung nicht unerheblich einfacher sein als der von Bosanquet. Auch macht es bei

[1]) L. S. Bosanquet, Note on convergence and summability factors, Journ. London Math. Soc. 20 (1945), 39–48.

ihm keinen Unterschied, ob k ganz oder beliebig reell ist[2]), während der Beweis von Bosanquet die Ganzzahligkeit von k wesentlich benutzt. Dagegen muß l auch hier als ganzzahlig vorausgesetzt werden[3]).

1. Wir stellen zunächst die Hilfsmittel des Beweises zusammen.

1. 1. Die eingangs erwähnten Sätze über konvergenztreue und konvergenzerzeugende Matrizen lauten:

Eine lineare Transformation $\sigma_n = \sum a_{n\nu} s_\nu$ ist dann und nur dann konvergenztreu, wenn die Matrix $(a_{n\nu})$ die folgenden, als Zeilennorm-, Zeilensummen- und Spalten-Bedingung bezeichneten Beziehungen erfüllt:

$$(Zn) \qquad \sum_\nu |a_{n\nu}| \leq M \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$(Zs) \qquad \sum_\nu a_{n\nu} \to a \quad \text{für } n \to \infty,$$

$$(Sp) \qquad a_{n\nu} \to a_\nu^* \quad \text{für } n \to \infty \text{ und } \nu = 0, 1, 2, \ldots.$$

Sie ist dann und nur dann konvergenzerzeugend, wenn sie überdies noch die Bedingung erfüllt:

$$(Ez) \qquad \sum_\nu |a_{n\nu}| \to \sum_\nu |a_\nu^*| \quad \text{für } n \to \infty.$$

1. 2. Wir setzen das n-te Glied der durch k-maliges Aufsummieren aus $\{s_\nu\}$ entstehenden Folge, d. h. den Ausdruck

$$(3) \qquad \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu+k-1}{n-\nu} s_\nu = S^k(n, s_\nu)$$

und definieren hierdurch die $S^k(n, s_\nu)$ auch für beliebige reelle k. Dann ist

$$(4) \qquad \frac{1}{\binom{n+k}{n}} S^k(n, s_\nu) = C_k(n, s_\nu)$$

das n-te Glied der C_k-Transformation von $\{s_\nu\}$. Sind die s_ν die Teilsummen der Reihe $\sum a_\nu$, so ist

$$(5) \qquad S^k(n, s_\nu) = S^{k+1}(n, a_\nu).$$

Und $\sum a_\nu$ heißt *C_k-beschränkt* bzw. *C_k-summierbar* (zum Werte s), je nachdem $C_k(n, s_\nu)$ beschränkt ist oder $(\to s)$ konvergiert für $n \to \infty$.

1. 3. Für ganzes $q \geq 0$ soll $\Delta^q s_\nu = \sum_{\lambda=0}^{q} (-1)^\lambda \binom{q}{\lambda} s_{\nu+\lambda}$ die q-te Differenz von s_ν sein, so daß auch

$$(6) \qquad \Delta^q s_n = (-1)^q S^{-q}(n+q, s_\nu)$$

ist. Es ist bekanntlich für ganzes $q \geq 0$

$$(7) \qquad \Delta^q (x_\nu y_\nu) = \sum_{\lambda=0}^{q} \binom{q}{\lambda} \Delta^\lambda x_\nu \Delta^{q-\lambda} y_{\nu+\lambda}$$

und, wie man leicht verifiziert,

$$(8) \qquad \Delta_\nu^q \binom{n-\nu+k}{n-\nu} = \binom{n-\nu+k-q}{n-\nu},$$

wenn sich die Differenzenbildung auf ν bezieht und die auftretenden Binomialkoeffizienten für $\nu > n$ gleich 0 gesetzt werden.

---

[2]) Hierauf machte mich Herr G. Lorentz nach Durchsicht des Manuskriptes aufmerksam.

[3]) Während der Korrektur der vorliegenden Note ist eine weitere Arbeit von L. S. Bosanquet, Note on convergence and summability factors (III), Proc. London Math. Soc. (2) **50** (1949), 482—496, erschienen, in der der vorstehende Satz ganz allgemein, d. h. auch ohne die Annahme der Ganzzahligkeit von l, bewiesen wird. Der Beweis geht einen ganz anderen Weg als der unsere.

1. 4. Schließlich schicken wir noch den folgenden *Hilfssatz* voraus, der im wesentlichen von A. F. Andersen[4]) herrührt:

Ist $b_\nu = O(1)$ und erfüllt $\{b_\nu\}$ für ein ganzes $l \geqq 0$ die Bedingung (2), so ist

$$\Delta^q b_\nu = o(\nu^{-q}) \text{ für } q = 1, 2, \ldots, l \text{ und } \Delta^0 b_\nu = b_\nu \to b. \tag{9}$$

$$\sum_\nu \nu^q |\Delta^{q+1} b_\nu| < +\infty \text{ für } q = 1, 2, \ldots, l. \tag{10}$$

Beweis. Ist $l = 0$, so folgt aus (2) die Konvergenz von $\sum_\nu (b_\nu - b_{\nu+1})$ also die Existenz von $\lim b_\nu = b$. Es sei weiterhin $l \geqq 1$. Dann ist

$$|\Delta^l b_n - \Delta^l b_{n+r}| \leqq \sum_{\nu=n}^{n+r-1} |\Delta^{l+1} b_\nu| \leqq n^{-l} \sum_{\nu=n}^{\infty} \nu^l |\Delta^{l+1} b_\nu| = o(n^{-l}) = o(1). \tag{11}$$

Also hat $\Delta^l b_n$ einen Grenzwert. Wäre er $\neq 0$, so würde (da $l \geqq 1$)

$$\Delta^{l-1} b_0 - \Delta^{l-1} b_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} \Delta^l b_\nu \to \infty$$

streben. Mit $\{b_n\}$ ist aber bei festem q auch $\{\Delta^q b_n\}$ beschränkt. Es ist also $\lim \Delta^l b_n = 0$, und (11) liefert daher für $r \to \infty$ zunächst $\Delta^l b_n = o(n^{-l})$ und dann weiter

$$|\Delta^l b_n| \leqq \sum_{\nu=n}^{\infty} |\Delta^{l+1} b_\nu|. \tag{12}$$

Daher ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{l-1} |\Delta^l b_n| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} n^{l-1} \sum_{\nu=n}^{\infty} |\Delta^{l+1} b_\nu| = \sum_{\nu=1}^{\infty} |\Delta^{l+1} b_\nu| \cdot \sum_{n=1}^{\nu} n^{l-1} \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^l |\Delta^{l+1} b_\nu| < +\infty.$$

Also gilt (9) für $q = l$ und (10) außer für $q = l$ (nach Voraussetzung) auch für $q = l - 1$. Durch Wiederholung der Schlüsse folgt (9) für $q = l - 1, \ldots, 2, 1$ und (10) für $q = l - 2, \ldots, 1, 0$. Für $q = 0$ schließlich liefert (10), wie oben, daß $\lim b_n = b$ existiert.

2. *Beweis des Satzes.* Die Teilsummen der Reihen $\sum a_\nu$ und $\sum a_\nu b_\nu$ seien s_n bzw. t_n, die zugehörigen Mittel seien

$$C_l(n, s_\nu) = \sigma_n, \quad C_k(n, t_\nu) = \tau_n.$$

Dann ist zunächst[5])

$$a_n = S^{-l-1}\left(n, \binom{\nu+l}{\nu} \sigma_\nu\right) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu-l-2}{n-\nu} \binom{\nu+l}{\nu} \sigma_\nu = \sum_{\nu=n-l-1}^{n} (-1)^{n-\nu} \binom{l+1}{n-\nu} \binom{\nu+l}{\nu} \sigma_\nu$$

und also

$$\tau_n = \frac{1}{\binom{n+k}{n}} \sum_{\mu=0}^{n} \binom{n-\mu+k}{n-\mu} b_\mu \cdot \sum_{\nu=\mu-l-1}^{\mu} (-1)^{\mu-\nu} \binom{l+1}{\mu-\nu} \binom{\nu+l}{\nu} \sigma_\nu$$

$$= \frac{1}{\binom{n+k}{n}} \sum_{\nu=0}^{n} \left\{ \binom{\nu+l}{\nu} \sum_{\mu=\nu}^{\nu+l+1} (-1)^{\mu-\nu} \binom{l+1}{\mu-\nu} \binom{n-\mu+k}{n-\mu} b_\mu \right\} \sigma_\nu$$

oder

$$\tau_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} \sigma_\nu \tag{13}$$

mit

$$a_{n\nu} = \frac{\binom{\nu+l}{\nu}}{\binom{n+k}{n}} \sum_{\lambda=0}^{l+1} (-1)^\lambda \binom{l+1}{\lambda} \binom{n-\nu-\lambda+k}{n-\nu-\lambda} b_{\nu+\lambda} \tag{14}$$

oder

$$a_{n\nu} = \begin{cases} \dfrac{\binom{\nu+l}{\nu}}{\binom{n+k}{n}} \Delta^{l+1}_\nu \left[\binom{n-\nu+k}{n-\nu} b_\nu\right] & \text{für } 0 \leqq \nu \leqq n, \\ 0 \text{ für } \nu > n. \end{cases}$$

---

[4]) A. F. Andersen, Studier over Cesàros Summabilitetsmethode, Kopenhagen 1921.

[5]) Für ganzes $\varrho < 0$ ist in den folgenden Formeln $\sigma_\varrho = 0$ und ebenso $\binom{p}{\varrho} = 0$ zu setzen.

Hiernach ist der Beweis der beiden ersten Teile des Satzes erbracht, wenn gezeigt wird, daß für $0 \leq k \leq l$ diese Matrix $(a_{n\nu})$ dann und nur dann konvergenztreu ist, wenn die Bedingungen (1) und (2), dann und nur dann konvergenzerzeugend ist, wenn (1′) und (2) erfüllt sind.

2. 1. *Aus* (Zn) *und* (Sp) *folgen* (1) *und* (2). Aus (Zn) folgt, daß $a_{nn} = O(1)$ ist. Das bedeutet aber, daß $b_n = O(n^{k-l})$, also (1) erfüllt ist. Das a_ν^* der Bedingung (Sp) hat in unserem Falle nach (14) den Wet

$$a_\nu^* = \binom{\nu+l}{\nu} \Delta^{l+1} b_\nu, \tag{15}$$

und da aus (Zn) und (Sp) sich sofort ergibt, daß $\sum |a_\nu^*|$ konvergiert, so folgt, daß auch (2) erfüllt ist.

2. 2. *Aus* (1) *und* (2) *folgen* (Zn), (Zs) *und* (Sp). Daß (Sp) mit den Grenzwerten (15) erfüllt ist, wurde eben festgestellt. Die Zeilensummen $\sum_\nu a_{n\nu}$ erhält man, wenn man in (13) alle $\sigma_\nu = 1$, d. h. $\sum a_\nu = 1 + 0 + 0 + \cdots$ setzt. Dann ist $\sum a_\nu b_\nu = b_0 + 0 + 0 + \cdots$. Somit sind jetzt alle $t_n = b_0$, ebenso alle τ_n, d. h. alle Zeilensummen; (Zs) ist erfüllt.

Für die Zeilennormen setzen wir $l - k = p$ und schreiben $a_{n\nu}$ nach (7) und (8) in der Form

$$a_{n\nu} = \frac{\binom{\nu+l}{\nu}}{\binom{n+k}{n}} \sum_{\lambda=0}^{l+1} \binom{l+1}{\lambda} \Delta^\lambda b_\nu \Delta_\nu^{l+1-\lambda} \binom{n-\nu-\lambda+k}{n-\nu-\lambda} = \frac{\binom{\nu+l}{\nu}}{\binom{n+k}{n}} \sum_{\lambda=0}^{l+1} \binom{l+1}{\lambda} \binom{n-\nu-p-1}{n-\nu-\lambda} \Delta^\lambda b_\nu. \tag{16}$$

Bilden wir nun die Zeilennorm $\Sigma |a_{n\nu}|$, so zerfällt sie gemäß den Werten von λ in $l + 2$ getrennte Summanden, die wir einzeln abschätzen.

a) Ist $0 \leq \lambda \leq p$, so ist der λ-te dieser Summanden

$$\leq \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\binom{\nu+l}{\nu}}{\binom{n+k}{n}} \binom{l+1}{\lambda} |\Delta^\lambda b_\nu| \cdot \left|\binom{n-\nu-p-1}{n-\nu-\lambda}\right|.$$

Ist $\lambda = p$ (also auch k ganz), so kann von den Summanden dieser Summe nur der für $\nu = n - p$ sich ergebende von 0 verschieden sein, und dieser ist dann $= O(n^{l-k} \cdot n^{k-l}) = O(1)$ Ist $\lambda < p$, so ist $\sum_\nu \left|\binom{\nu-p-1}{\nu-\lambda}\right| \equiv \sum_\nu c_\nu = c$ konvergent und unsere Summe ist bei passendem K

$$\leq K (n+1)^{-k} \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)^l \cdot (\nu+1)^{k-l} c_{n-\nu} \leq K \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu \leq K c.$$

In beiden Fällen ist also der betrachtete Teil der Zeilennorm $= O(1)$.

b) Ist $p < \lambda \leq k + p = l$, so ist der λ-te der erwähnten Summanden nach (9)

$$\leq O\left(\frac{1}{n^k} \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)^l \frac{1}{(\nu+1)^\lambda} (n-\nu+1)^{\lambda-p-1}\right)$$

$$= O\left(\frac{1}{n^k} \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu^{l-\lambda} (n-\nu)^{\lambda-p-1}\right) = O(1).$$

c) Für $\lambda = l + 1$ (in welchem Falle der in b) benutzte Weg nur $O(\log n)$ ergeben würde) ist dieser Summand gleich

$$\frac{1}{\binom{n+k}{n}} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{\nu+l}{\nu} |\Delta^{l+1} b_\nu| \cdot \binom{n-\nu-p-1}{n-\nu-l-1}. \tag{17}$$

Wegen

$$\binom{n-\nu-p-1}{n-\nu-l-1} = \binom{n-l-1-\nu+k}{n-l-1-\nu} \text{ und weil } \binom{n+k}{n} \text{ und } \binom{n-l-1+k}{n-l-1}$$

asymptotisch gleich sind, strebt der Ausdruck (17) für $n \to \infty$ gegen die C_k-Summe der nach Voraussetzung konvergenten Reihe $\sum \binom{\nu+l}{\nu} |\Delta^{l+1} b_\nu|$, hat also jedenfalls einen Grenzwert und ist darum $= O(1)$. Also ist die ganze Zeilennorm $= O(1)$. Die Bedingung (Zn) ist auch erfüllt und somit der erste Teil des Satzes bewiesen.

2. 3. Ist die Matrix konvergenz*erzeugend*, so ist sie auch konvergenz*treu*, also gilt (2). Aus (Ez) aber folgt jetzt $a_{nn} = o(1)$, d. h. (1'); denn für festes ν_0 strebt wegen (Sp)

$$\sum_{\nu > \nu_0} |a_{n\nu}| \to \sum_{\nu > \nu_0} |a_\nu^*|,$$

so daß für alle hinreichend großen n also $|a_{nn}| < \sum_{\nu > \nu_0} |a_\nu^*| + \varepsilon$ sein und, weil ν_0 beliebig war, $a_{nn} \to 0$ streben muß.

2. 4. Sind umgekehrt (1') und (2) erfüllt, so sind es auch (1) und (2) und also die Bedingungen (Zn), (Zs), (Sp). Und daß auch (Ez) erfüllt ist, erkennt man so: Trennt man in (16) den für $\lambda = l + 1$ sich ergebenden letzten Summanden der Summe ab und setzt demgemäß $a_{n\nu} = a'_{n\nu} + a''_{n\nu}$, so lehren die Schlüsse in **2. 2,** a) und b), daß jetzt sogar $\sum_\nu |a'_{n\nu}| = o(1)$ ist. Denn in a) darf nun $\Delta^\lambda b_\nu$ durch $o(\nu^{k-l})$ und in b) durch $o(\nu^{-l})$ abgeschätzt werden. Die Betrachtung in c) aber lehrt, daß (den Fall $\lambda = l + 1$ betreffend) $\sum_\nu |a''_{n\nu}| \to \sum_\nu |a_\nu^*|$ strebt für $n \to \infty$. Wegen $\big||a_{n\nu}| - |a''_{n\nu}|\big| \leq |a'_{n\nu}|$ strebt also auch $\sum_\nu |a_{n\nu}| \to \sum_\nu |a_\nu^*|$, d. h. die Bedingung (Ez) ist erfüllt.

2. 5. Ist schließlich $k > l \geq 0$, so ist nur zu zeigen, daß jede Faktorenfolge $\{b_\nu\}$, die vom Typ (C_l, C_k) bzw. (C'_l, C_k) ist, schon vom Typ (C_l, C_l) bzw. (C'_l, C_l) ist, daß für sie also die Bedingungen $b_\nu = O(1)$ bzw. $o(1)$ und (2) gelten. In engem Anschluß an den Beweis von Bosanquet erkennt man dies so:

Daß (2) gelten muß, ist schon durch **2. 1** bewiesen, da dort von der Annahme $k \leq l$ kein Gebrauch gemacht wurde. Für den Typ (C_l, C_k) ist ferner $b_\nu = O(1)$ notwendig; denn sonst gäbe es eine Folge natürlicher Zahlen $n_1 < n_2 < \cdots$ mit $|b_{n_\nu}| > \nu^2$, und die Reihe $\sum a_n$, für die $a_n = \frac{1}{\nu^2} \operatorname{sign} b_{n_\nu}$ für $n = n_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ und sonst $a_n = 0$ ist, wäre konvergent, während $\sum a_\nu b_\nu = +\infty$ von keiner Ordnung C_k-summierbar wäre.

Für den Typ (C'_l, C_k) aber ist sogar $b_\nu = o(1)$ notwendig. Denn nach dem eben Gesagten gelten $b_\nu = O(1)$ und (2). Nach dem Hilfssatz in **1. 4** ist also $\lim b_n = b$ vorhanden. Es ist nur noch zu zeigen, daß $b = 0$ sein muß: Die Folge $\{b_\nu - b\}$ erfüllt die für den Typ (C'_l, C_k) hinreichenden Bedingungen. Mit ihr ist dann auch die konstante Folge mit den Gliedern $b = b_\nu - (b_\nu - b)$ vom Typ (C'_l, C_k). Für $b \neq 0$ würde dies aber der Tatsache widersprechen, daß es zu jedem $k > l \geq 0$ C_l-beschränkte, jedoch nicht C_k-limitierbare Folgen gibt. Eine solche Folge erhalten wir z. B., wenn wir

$$C_l(n, s_\nu) = n^{i\alpha} \; (\alpha \gtrless 0, \text{ reell})$$

setzen und hieraus die s_ν bestimmen. Denn die Folge $\{n^{i\alpha}\}$ ist bekanntlich von keiner Ordnung C-limitierbar.

Damit ist der Satz in allen Teilen bewiesen.

Eingegangen 14. Januar 1949.

Klassifikation der Gruppenerweiterungen[1]).

Von *Reinhold Baer* in Urbana, Illinois (USA.).

Unter einer Erweiterung der Gruppe U werden wir irgendeine Gruppe E verstehen, die U als Untergruppe enthält. Wir werden i. a. nicht verlangen, daß U ein Normalteiler von E ist; und wir werden infolgedessen auch keine beschränkenden Annahmen über die Struktur von E modulo U machen.

Betrachten wir die Gesamtheit der Erweiterungen der ein für allemal gegebenen Gruppe U, so hängt die Art der Untersuchung dieser Struktur wesentlich davon ab, welche Erweiterungen von U als „nicht wesentlich verschieden" erachtet werden. In dieser Hinsicht gibt es eine Reihe verschiedener Möglichkeiten. Wir werden im § 1 eine Reihe von recht natürlichen Klassifikationsprinzipien formulieren; und im § 2 werden die zwischen ihnen bestehenden Beziehungen erörtert werden. Die bei dem umfassendsten Klassifikationsprinzip entstehenden Klassen besitzen eine natürliche teilweise Ordnung. Die durch Einführung dieser teilweisen Ordnung entstehende Struktur wird dann in den §§ 3–5 untersucht.

Bezeichnungen. Als Komposition der Gruppenelemente wählen wir Addition $a + b$; und die Operatoren m in M werden als Linksmultiplikatoren angesehen, so daß das Produkt $m\,g$ für jeden Operator m in M und jedes Gruppenelement g in G ein wohlbestimmtes Gruppenelement ist. Addition und Multiplikation genügen den üblichen Postulaten für Operatorgruppen. Es sei nur bemerkt, daß die Addition nicht kommutativ zu sein braucht.

Von Beispielen abgesehen, werden alle betrachteten Gruppen Operatorgruppen über ein und demselben Operatorensystem M sein. Dies ermöglicht es, abgesehen von einigen Gruppenkonstruktionen, ausdrückliche Hinweise auf M zu unterlassen, da es sich von selbst verstehen wird, daß die betrachteten Gruppen und ihre Abbildungen hinsichtlich M zulässig sein werden.

$A \cap B =$ Durchschnitt von A und B.

$A \oplus B =$ direkte Summe von A und B.

$A \sim B =$ Isomorphie von A und B.

$\{S\}$ = von S erzeugte zulässige Untergruppe.

$K(\eta) =$ Kern des Homomorphismus $\eta =$ Gesamtheit der von η auf 0 abgebildeten Elemente.

S-Homomorphismus ist ein Homomorphismus, der alle Elemente in der Teilmenge S zu Fixelementen hat; und S-Isomorphismen und S-Automorphismen werden entsprechend definiert.

Normale Homomorphismen der Gruppe G auf einen Teil der Gruppe H bilden Normalteiler von G auf Normalteiler von H ab. Dieser Begriff des normalen Homomorphismus ist etwas allgemeiner als manche in der Literatur gebräuchlichen Definitionen (siehe Baer [4], p. 68 für eine Diskussion). Eine hinreichende Bedingung für Normalität des Homomorphismus η von G auf einen Teil von H ist $H = G\eta + Z$, wo Z der Zentralisator von $G\eta$ in H ist.

[1]) Der Verfasser hat über diese Arbeit auf der gruppentheoretischen Konferenz in Columbus, Ohio im Dezember 1948 vorgetragen.

§ 1. Die Klassifikationsprinzipien.

In diesem Abschnitt werden wir die für unsere Untersuchung wichtigen Möglichkeiten der Klassifikation von Erweiterungen aufzählen und die elementaren Beziehungen zwischen ihnen erörtern.

Definition 1. *Die Erweiterungen E und F von U sind äquivalent, wenn es einen U-Isomorphismus von E auf F gibt.*

Es ist klar, daß Äquivalenz reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. So natürlich dieses Klassifikationsprinzip auch erscheinen mag — es ist durch direkte Übertragung des in der Galoisschen Theorie üblichen Begriffs auf unsere Verhältnisse entstanden — so darf man doch nicht vergessen, daß das in der Theorie der Gruppenerweiterungen bisher gebräuchliche Prinzip erheblich enger ist. (Siehe z. B. Baer [1], p. 380, Definition 5).

Definition 2. *Die Erweiterungen E und F von U sind fast-äquivalent, wenn es direkte Summanden E' von E und F' von F gibt, die äquivalente Erweiterungen ihrer gemeinsamen Untergruppe U sind.*

Man wird zu dieser Definition durch die Bemerkung geführt, daß die fast-äquivalenten Erweiterungen E' und $E = E' \oplus E''$ von U sich nur durch den trivialen Bestandteil E'' unterscheiden, während sie in dem wirklich problematischen Bestandteil E' übereinstimmen. — Es ist klar, daß äquivalente Erweiterungen auch fast-äquivalent sind, und daß Fast-Äquivalenz reflexiv und symmetrisch ist. Doch ist, wie wir weiter unten sehen werden (siehe insbesondere § 2, Beispiel 1), Fast-Äquivalenz i. a. nicht transitiv; und dies führt zur Einführung des folgenden Begriffs.

Definition 3. *Die Erweiterungen E und F von U sind verwandt, wenn sie direkte Summanden äquivalenter Erweiterungen von U sind.*

Es ist klar, daß Verwandtschaft reflexiv und symmetrisch ist. Um die Transitivität dieser Beziehung zu erweisen, betrachten wir Paare E, F und F, G verwandter Erweiterungen von U. Dann existieren direkte Summen $E \oplus E'$ und $F \oplus F'$, die äquivalente Erweiterungen von U sind; und es existieren direkte Summen $F \oplus F''$ und $G \oplus G''$, die äquivalente Erweiterungen von U sind. Wir bilden dann direkte Summen $E \oplus E' \oplus E''$ und $G \oplus G'' \oplus G'$ mit $E'' \sim F''$ und $G' \sim F'$. Dann sieht man sofort ein, daß $E \oplus E' \oplus E''$, $F \oplus F' \oplus F''$ und $F \oplus F'' \oplus F'$, $G \oplus G'' \oplus G'$ Paare äquivalenter Erweiterungen von U sind. Also folgt die Transitivität der Verwandtschaft aus der Transitivität der Äquivalenz.

Es ist klar, daß $E = E' \oplus E''$ und E' verwandte Erweiterungen von U sind; und ebenso sind F' und $F = F' \oplus F''$ verwandte Erweiterungen von U. Sind außerdem noch E' und F' äquivalente Erweiterungen von U, so sind sie verwandt; und aus der Transitivität der Verwandtschaft folgern wir, daß E und F verwandte Erweiterungen von U sind. Damit haben wir aber gezeigt, daß fast-äquivalente Erweiterungen verwandt sind. § 2, Beispiel 1 zeigt, daß verwandte Erweiterungen nicht fast-äquivalent zu sein brauchen.

Diese Betrachtungen können in gewissem Sinne umgekehrt werden. Sei nämlich P ein Einteilungsprinzip für Erweiterungen von U, das die folgenden beiden Eigenschaften hat:

(a) P ist reflexiv, symmetrisch und transitiv;

(b) fast-äquivalente Erweiterungen gehören zur gleichen P-Klasse.

Sind dann E und F verwandte Erweiterungen von U, so gibt es direkte Summen $E \oplus E' = E^*$ und $F \oplus F' = F^*$, die äquivalente Erweiterungen von U sind. Dann sind aber E, E^* und E^*, F^* und F, F^* Paare fast-äquivalenter Erweiterungen von U, die also wegen (a) und (b) sämtlich zur gleichen P-Klasse gehören. Also gehören verwandte Erweiterungen zur gleichen P-Klasse; und wir haben gezeigt, daß Verwandtschaft das engste Klassifikationsprinzip mit den obigen Eigenschaften (a) und (b) ist.

Definition 4. *Die Erweiterungen E und F von U sind normal-ähnlich, wenn es normale U-Homomorphismen von E auf einen Teil von F und von F auf einen Teil von E gibt.*

Es ist klar, daß normale Ähnlichkeit reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. — Im § 2 werden wir ein Verwandtschaftskriterium beweisen, aus dem hervorgeht, daß verwandte Erweiterungen normal-ähnlich sind (was sich auch leicht direkt erweisen läßt), und daß normale Ähnlichkeit eine natürliche Erweiterung des Verwandtschaftsbegriffs ist. Aus § 2, Beispiel 2 geht hervor, daß normal-ähnliche Erweiterungen nicht verwandt zu sein brauchen.

Definition 5. *Die Erweiterungen E und F von U sind ähnlich, wenn es U-Homomorphismen von E auf einen Teil von F und von F auf einen Teil von E gibt.*

Es ist klar, daß Ähnlichkeit reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, und daß aus normaler Ähnlichkeit von Erweiterungen auch deren Ähnlichkeit folgt. — Was die direkten Summanden für Verwandtschaft bedeuten, bedeuten die Retrakten für Ähnlichkeit. Diese definieren wir, wie üblich:

Definition 6. *Die Untergruppe R der Gruppe G ist eine Retrakte von G, wenn es einen R-Homomorphismus von G auf R gibt.*

Jede der folgenden beiden Eigenschaften ist charakteristisch für Retrakten:

(6′) Es gibt einen idempotenten Endomorphismus von G auf R.

(6″) Es gibt einen Normalteiler N von G derart, daß jede Restklasse von G/N ein und nur ein Element von R enthält.

Ist E eine Erweiterung der Gruppe U, und enthält die Retrakte F von E die Untergruppe U, so sieht man sofort ein, daß E und F ähnliche Erweiterungen von U sind. Daß umgekehrt ähnliche Erweiterungen von U Retrakten äquivalenter Erweiterungen von U sind, werden wir später (§ 3, Satz 3) zeigen.

Sind insbesondere die (triviale) Erweiterung U von U und die Erweiterung E von U ähnlich, so ist U eine Retrakte von E. Wären nun U und E normal-ähnliche Erweiterungen von U, so wäre insbesondere U Normalteiler von E und also auch ein direkter Summand von E [siehe (6″)]. Es ist aber ganz einfach, Erweiterungen einer jeden von Null verschiedenen Gruppe U derart zu konstruieren, daß U Retrakte, aber nicht direkter Summand ist. Dies zeigt, daß Ähnlichkeit und normale Ähnlichkeit verschiedene Begriffe sind.

§ 2. Verwandtschaft.

In diesem Abschnitt wollen wir vor allem die Stellung des Verwandtschaftsbegriffs zwischen Fast-Äquivalenz und normaler Ähnlichkeit präzisieren. Der folgende Satz ist die Grundlage unserer Betrachtungen.

Verwandtschafts-Kriterium. *Die Erweiterungen E und F von U sind dann und nur dann verwandt, wenn es U-Homomorphismen σ von E auf einen Teil von F und τ von F auf einen Teil von E gibt, die durch folgende Bedingungen verknüpft sind:*

$$(*)\qquad \left.\begin{aligned} e\sigma + (f - f\tau\sigma) &= (f - f\tau\sigma) + e\sigma \\ f\tau + (e - e\sigma\tau) &= (e - e\sigma\tau) + f\tau \end{aligned}\right\} \text{ für jedes } e \text{ in } E \text{ und } f \text{ in } F.$$

Beweis. Sind E und F verwandte Erweiterungen von U, so gibt es direkte Summen $E \oplus E'$ und $F \oplus F'$, die äquivalente Erweiterungen von U sind. Es existieren also ein U-Isomorphismus α von $E \oplus E'$ auf $F \oplus F'$ und Endomorphismen β, β' von $E \oplus E'$, γ, γ' von $F \oplus F'$, die folgenden Bedingungen genügen:

$$x\beta = x \text{ für } x \text{ in } E,\ E'\beta = 0,\ y\beta' = y \text{ für } y \text{ in } E',\ E\beta' = 0;$$

$$x\gamma = x \text{ für } x \text{ in } F,\ F'\gamma = 0,\ y\gamma' = y \text{ für } y \text{ in } F',\ F\gamma' = 0.$$

Dann induziert $\alpha\gamma$ einen Homomorphismus σ von E auf einen Teil von F; $\alpha^{-1}\beta$ induziert einen Homomorphismus τ von F auf einen Teil von E. Es ist klar, daß σ und τ U-Homomorphismen sind, da α, β, γ ebenfalls U-Homomorphismen sind. Ist nun e ein Element in E und f ein Element in F, so verifiziert man leicht, daß

$$\begin{aligned} e\sigma + (f - f\tau\sigma) &= e\alpha\gamma + f - f\alpha^{-1}\beta\alpha\gamma = (e\alpha + f - f\alpha^{-1}\beta\alpha)\gamma \\ &= (e + f\alpha^{-1} - f\alpha^{-1}\beta)\alpha\gamma = (e\beta + f\alpha^{-1}\beta')\alpha\gamma \\ &= (f\alpha^{-1}\beta' + e\beta)\alpha\gamma = \cdots = (f - f\tau\sigma) + e\sigma \end{aligned}$$

gilt; und die Gültigkeit der zweiten Bedingung (*) folgt ebenso. Damit ist die Notwendigkeit unserer Bedingung erwiesen.

Nehmen wir nun umgekehrt an, daß es U-Homomorphismen σ und τ gibt, die den Bedingungen (*) genügen, so setzen wir

$$e\varrho = e - e\sigma\tau \text{ für } e \text{ in } E \text{ und } f\delta = f - f\tau\sigma \text{ für } f \text{ in } F.$$

Dann zeigt man leicht.

(**) *ϱ ist ein Endomorphismus von E und δ ist ein Endomorphismus von F; und es gilt* $0 = U\varrho = U\delta$.

Wir bilden nun die Gruppe W aller Paare $(e, f\delta)$ mit e in E und f in F. Dies ist möglich, da δ ein zulässiger Endomorphismus von F ist. Das Element u in U und das Element $(u, 0)$ in W können wir identifizieren.

Bezeichnen wir mit E^* die Untergruppe aller Paare $(e, 0)$ und mit E^{**} die Untergruppe aller Paare $(0, f\delta)$, so ist $W = E^* \oplus E^{**}$. Bilden wir e in E auf $(e, 0)$ in E^* ab, so erhalten wir einen U-Isomorphismus von E auf E^*. Wir bemerken noch, daß E^{**} und $F\delta$ isomorph sind.

Weiter bezeichnen wir mit F^* die Menge aller Paare $(f\tau, f\delta)$ und mit F^{**} die Menge aller Paare $(e\varrho, -e\sigma\delta)$. Da $\sigma, \tau, \varrho, \delta$ Homomorphismen sind, so sind F^* und F^{**} Untergruppen von W. Es ist klar, daß die Abbildung von f in F auf $(f\tau, f\delta)$ einen Homomorphismus von F auf F^* darstellt. Ist u ein Element in U, so ist $(u\tau, u\delta) = (u, 0)$, so daß dieser Homomorphismus sogar ein U-Homomorphismus ist, da wir ja u und $(u, 0)$ identifiziert haben. Ist $(f\tau, f\delta) = 0$, so ist $0 = f\tau$ und $0 = f\delta = f - f\tau\sigma = f$, so daß unsere Abbildung sogar ein U-Isomorphismus zwischen F und F^* ist. Also sind F und F^* äquivalente Erweiterungen von U.

Ist $(f\tau, f\delta) = (e\varrho, -e\sigma\delta)$, so ist $f\tau = e - e\sigma\tau$ und

$$\begin{aligned} 0 = (f + e\sigma)\delta &= f + e\sigma - (f + e\sigma)\tau\sigma = f + e\sigma - e\sigma\tau\sigma - f\tau\sigma \\ &= f + (e - e\sigma\tau)\sigma - f\tau\sigma = f. \end{aligned}$$

Also ist $F^* \cap F^{**} = 0$. — Weiter ist

$$(e, 0) = (e\varrho, -e\sigma\delta) + (e\sigma\tau, e\sigma\delta),$$

so daß $E^* \subseteq F^* + F^{**}$ ist. Ferner ist

$$(0, f\delta) = (f\tau, f\delta) + (-f\tau, 0),$$

so daß $E^{**} \subseteq F^* + E^* \subseteq F^* + F^{**}$ gilt. Mithin wird W durch F^* und F^{**} erzeugt. — Schließlich folgt aus (*), daß

$$f\tau + e\varrho = e\varrho + f\tau$$

und daß

$$f\delta - e\sigma\delta = f\delta - (e\sigma - e\sigma\tau\sigma) = f\delta - e\varrho\sigma = -e\varrho\sigma + f\delta = -e\sigma\delta + f\delta$$

ist. Also ist jedes Element in F^* mit jedem Element in F^{**} vertauschbar; und damit haben wir vollständig bewiesen, daß

$$E^* \oplus E^{**} = W = F^* \oplus F^{**}$$

ist. Bedenken wir noch, daß wir die Äquivalenz der Erweiterungen E und E^* von U sowie der Erweiterungen F und F^* von U bereits erwiesen haben, so ist es klar, wie man jetzt den Beweis der Verwandtschaft der Erweiterungen E und F von U zu beenden hat.

Folgerung 1. *Verwandte Erweiterungen sind normal-ähnlich.*

Um dies zu erweisen, haben wir nur zu zeigen, daß U-Homomorphismen σ, τ, die durch Bedingung (*) verknüpft sind, notwendig normal sind; und dies folgt aus den leicht verifizierbaren Formeln:

$$-f + e\sigma + f = (-f\tau + e + f\tau)\sigma, \qquad -e + f\tau + e = (-e\sigma + f + e\sigma)\tau$$

für e in E und f in F.

Folgerung 2. *Abelsche Erweiterungen (einer abelschen Gruppe) sind dann und nur dann verwandt, wenn sie ähnlich sind.*

Dies ist eine triviale Folgerung aus dem Verwandtschaftskriterium. Wir bemerken, daß aus dem Beweis des Verwandtschaftskriteriums hervorgeht, daß die Folgerung 2 in etwas verschärfter Form gilt, nämlich: Sind E und F ähnliche abelsche Erweiterungen von U, so sind sie direkte Summanden äquivalenter abelscher Erweiterungen von U. — Für eingehendere Diskussion abelscher Erweiterungen, siehe unten § 5 und Baer [6].

Beispiel 1. Es sei $U = \{u\}$ eine zyklische Gruppe der Primzahlordnung p. Wir erhalten die abelsche Gruppe E, indem wir zu U Elemente $e(i)$ adjungieren, die den Relationen $p^{2i}\, e(i) = u$ genügen; und wir erhalten die abelsche Gruppe F, indem wir zu U Elemente $f(i)$ adjungieren, die den Relationen $p^{2i+1} f(i) = u$ genügen.

Man folgert aus Ulms Satz, daß kein direkter Summand $\neq 0$ von E einem direkten Summanden von F isomorph ist; und hieraus folgt insbesondere, daß E und F nicht fast-äquivalente Erweiterungen von U sind.

Andererseits existiert ein und nur ein Isomorphismus α von E, der $e(i)$ auf $pf(i)$ abbildet; und es existiert ein und nur ein Isomorphismus β von F, der $f(i)$ auf $p\,e(i+1)$ abbildet. Es ist klar, daß α und β U-Isomorphismen sind. Damit haben wir die Ähnlichkeit der abelschen Erweiterungen E und F von U erwiesen; und ihre Verwandtschaft folgt nun aus Folgerung 2.

Damit haben wir gezeigt, daß verwandte Erweiterungen nicht fast-äquivalent zu sein brauchen. Hieraus können wir auch folgern, daß Fast-Äquivalenz i. a. nicht transitiv ist. Denn wir haben schon im § 1 darauf hingewiesen, daß aus Transitivität der Fast-Äquivalenz die Identität von Fast-Äquivalenz und Verwandtschaft folgen würde.

Beispiel 2. $U = \{u\}$ sei eine unendliche zyklische Gruppe. Die abelsche Gruppe A sei die direkte Summe von abzählbar unendlich vielen zyklischen Gruppen der Ordnung p^2; und diese Summanden und ihre Erzeugenden seien folgendermaßen bezeichnet:

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j} \{a_{ij}\},$$

wo j alle ganzzahligen Werte (positiv, negativ und null) annehmen kann. Die Gruppe E entsteht aus A durch Adjunktion des Elementes u, das nur folgenden Bedingungen unterworfen ist:

$$-u + a_{ij} + u = a_{i\,j+1} \text{ für } 0 < i \text{ und alle } j.$$

Der Normalteiler A von E ist vollinvariant, da er alle Elemente endlicher Ordnung enthält. Wir bemerken, daß $A \cap \{u\} = 0$ ist, und daß der kleinste $\{u\}$ enthaltende Normalteiler M von E von den Elementen u und $a_{i\,j+1} - a_{ij}$ (für $0 < i$ und alle j) erzeugt wird.

Die abelsche Gruppe B sei ebenfalls die direkte Summe abzählbar unendlich vieler zyklischer direkter Summanden, nämlich:

$$B = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j} \{b_{ij}\},$$

wo wieder j alle ganzzahligen Werte annehmen kann. Doch sei diesmal die Ordnung eines jeden b_{1j} gleich p, während die Ordnung aller b_{ij} mit $1 < i$ wieder p^2 sein möge. Die Gruppe F entsteht aus B durch Adjunktion des Elementes u, das nur folgenden Bedingungen unterworfen ist:

$$-u + b_{ij} + u = b_{ij+1} \text{ für } 0 < i \text{ und alle } j.$$

Der Normalteiler B von F ist vollinvariant, da er aus den Elementen endlicher Ordnung besteht. Wir bemerken, daß $B \cap \{u\} = 0$ ist, und daß der kleinste $\{u\}$ enthaltende Normalteiler N von F von den Elementen u und $b_{ij+1} - b_{ij}$ (für $0 < i$ und alle j) erzeugt wird.

Man überzeugt sich weiter leicht davon, daß die Identifikation des zu A (bzw. B) adjungierten Elementes mit u erlaubt war, da dieses Element unendliche Ordnung hat.

Es existiert ein und nur ein Homomorphismus α von E auf F, der folgenden Bedingungen genügt:

$$u\,\alpha = u,\ a_{ij}\,\alpha = b_{ij} \text{ für } 0 < i \text{ und alle } j.$$

Da $E\,\alpha = F$ ist, so sieht man leicht ein, daß α ein normaler U-Homomorphismus von E auf F ist. — Weiter existiert ein und nur ein Homomorphismus β von F auf E derart, daß

$$u\,\beta = u,\ b_{1j}\,\beta = 0,\ b_{ij}\,\beta = a_{i-1j} \text{ für } 1 < i \text{ und alle } j \text{ ist.}$$

Wieder sieht man ein, daß β ein normaler U-Homomorphismus von F auf E ist. Damit haben wir gezeigt, daß E und F normal-ähnliche Erweiterungen von U sind.

Nehmen wir nun an, daß E und F verwandte Erweiterungen von U sind. Dann gibt es normale U-Homomorphismen σ von E auf einen Teil von F und τ von F auf einen Teil von E derart, daß

$$(*) \qquad \left.\begin{aligned} e\,\sigma + (f - f\tau\sigma) &= (f - f\tau\sigma) + e\,\sigma \\ f\tau + (e - e\,\sigma\tau) &= (e - e\sigma\tau) + f\,\tau \end{aligned}\right\} \text{ für jedes } e \text{ in } E \text{ und } f \text{ in } F.$$

Aus der Normalität von σ folgern wir, daß $E\,\sigma$ ein Normalteiler von F ist. Aus $U \subseteq E\,\sigma$ folgt also $N \subseteq E\,\sigma$. Folglich ist der Zentralisator von $E\,\sigma$ in F ein Teil des Zentralisators von N in F. Man überzeugt sich leicht, daß der Zentralisator von N in F (und also auch der von $E\,\sigma$ in F) 0 ist. Da aber wegen (*) alle Elemente der Form $f - f\tau\sigma$ dem Zentralisator von $E\,\sigma$ in F angehören, so haben wir gezeigt, daß diese Elemente alle gleich null sind. Also ist

$$f = f\tau\sigma \text{ für } f \text{ in } F;$$

und

$$e = e\,\sigma\tau \text{ für } e \text{ in } E$$

zeigt man ebenso. Folglich sind σ und τ zueinander reziproke Isomorphismen zwischen E und F. Diese Isomorphismen müßten eine Isomorphie zwischen A und B vermitteln, da dies die aus allen Elementen endlicher Ordnung in E bzw. F bestehenden vollinvarianten Untergruppen sind. Aber diese beiden abelschen Gruppen sind nicht isomorph, da A keine zyklischen direkten Summanden der Ordnung p besitzt, während B unendlich viele derartige direkte Summanden aufweist. Damit haben wir gezeigt:

E und F sind normal-ähnliche, aber nicht verwandte Erweiterungen von U.

Wir bemerken noch, daß diese Beispiele normal-ähnlicher, aber nicht verwandter Erweiterungen einer großen Klasse angehören, die man etwa folgendermaßen charakterisieren kann: Es sei G eine (Operator-) Gruppe mit Normalteilern V und W derart, daß $V \subset W$, $G \sim G/W$, aber G nicht isomorph zu G/V. Weiter sei U eine Untergruppe von G mit folgenden Eigenschaften: $W \cap U = 0$ und der Zentralisator des kleinsten U enthaltenden Normalteilers N von G ist auch 0. Dann kann man G und G/V als Erweiterungen von U auffassen, die normal-ähnlich, aber nicht verwandt sind.

Für unsere nächste Anwendung des Verwandtschaftskriteriums müssen wir an einige Begriffe erinnern.

1. Das M-Zentrum einer M-Gruppe. Ist G eine M-Gruppe und $Z(G)$ das Zentrum der Gruppe G (im üblichen Sinne), so braucht $Z(G)$ keine M-zulässige Untergruppe von G zu sein. Doch enthält $Z(G)$ solche Untergruppen, z. B. 0; und die Summe aller dieser Untergruppen ist eine zulässige Untergruppe von $Z(G)$, das M-Zentrum $Z_M(G)$ von G [Kořinek].

2. Das Radikal eines Endomorphismus. Wenn η ein zulässiger Endomorphismus der M-Gruppe G ist, so sind auch alle Potenzen η^i zulässige Endomorphismen von G. Jeder dieser Endomorphismen hat einen Kern $K(\eta^i)$; und diese Kerne bilden eine aufsteigende Kette von zulässigen Normalteilern von G. Die Summe aller $K(\eta^i)$ ist wieder ein zulässiger Normalteiler von G, das Radikal $R(\eta)$ von η. (Für elementare Eigenschaften des Radikals, siehe Baer [3].)

3. Zerfällende Endomorphismen. Der zulässige Endomorphismus η der M-Gruppe G zerfällt G, wenn eine zulässige Untergruppe C mit folgenden Eigenschaften existiert:

$$G = R(\eta) + C, \qquad 0 = R(\eta) \cap C, \qquad C = C\eta.$$

Dann enthält jede Restklasse von $G/R(\eta)$ ein und nur ein Element in C, und η induziert einen Automorphismus in C. (Für Zerfällungskriterien, siehe Baer [3].)

4. Zerfällende Zentral-Endomorphismen. Ist η ein zulässiger Endomorphismus der M-Gruppe G, so daß $Z_M(G)\,\eta \subseteq Z_M(G)$, so induziert η im M-Zentrum von G einen zulässigen Endomorphismus. Das Radikal dieses Endomorphismus ist $R(\eta) \cap Z_M(G)$. Ist der von η im M-Zentrum induzierte Endomorphismus ein zerfällender Endomorphismus, so existiert eine M-Untergruppe C des M-Zentrums, so daß

$$Z_M(G) = [R(\eta) \cap Z_M(G)] + C, \qquad 0 = R(\eta) \cap Z_M(G) \cap C = R(\eta) \cap C, \qquad C\eta = C.$$

Als Untergruppe des Zentrums ist C sogar ein Normalteiler von G. In diesem Falle werden wir sagen, daß *η das M-Zentrum von G zerfällt.*

Der zulässige Endomorphismus η von G heiße *Zentralendomorphismus von G*, wenn $G\eta \subseteq Z_M(G)$. Da alle Untergruppen des Zentrums Normalteiler von G sind, ist ein derartiger Endomorphismus sicher normal. Weiter induziert er einen Endomorphismus im Zentrum.

Es sei schließlich η ein Zentralendomorphismus von G, der das Zentrum zerfällt. Dann existiert eine M-Untergruppe C des M-Zentrums mit folgenden Eigenschaften:

$$Z_M(G) = [R(\eta) \cap Z_M(G)] + C, \qquad 0 = R(\eta) \cap C, \qquad C\eta = C.$$

Ist nun x irgendein Element in G, so ist $x\eta$ ein Element in $Z_M(G)$. Also existieren Elemente r und c mit folgenden Eigenschaften: $x\eta = r + c$, c gehört zu C und r zu $R(\eta)$. Da $C\eta = C$, so gibt es ein Element z in C, so daß $c = z\eta$. Dann ist $(x - z)\eta = x\eta - c = r$ ein Element im Radikal von η; und daraus folgt, daß $x - z$ selbst zum Radikal gehört. Also gehört $x = (x - z) + z$ zu $R(\eta) + C$; und nun sieht man leicht ein, daß

$$G = R(\eta) \oplus C, \quad C = C\eta$$

ist. Dieses Resultat formulieren wir folgendermaßen.

Lemma. *Ist η ein Zentralendomorphismus von G, der das Zentrum von G zerfällt, so ist η ein zerfällender Endomorphismus von G; und das Radikal von η ist ein direkter Summand von G.*

Man folgert aus diesem Lemma auch, daß ein Zentralendomorphismus von G dann und nur dann G zerfällt, wenn er das Zentrum zerfällt.

Zusatz. *Es seien E und F verwandte Erweiterungen ihrer gemeinsamen Untergruppe U. Dann gilt:*

(a) *Es existiert ein U enthaltender Normalteiler M von E und ein U enthaltender Normalteiler N von F, so daß M und N äquivalente Erweiterungen von U sind.*

(b) *Wenn Zentralendomorphismen von E und F das Zentrum zerfällen, dann sind E und F fast-äquivalente Erweiterungen von U.*

Beweis. Da E und F verwandte Erweiterungen ihrer gemeinsamen Untergruppe U sind, so folgern wir aus dem Verwandtschaftskriterium die Existenz von U-Homomorphismen σ von E auf einen Teil von F und τ von F auf einen Teil von E, so daß

$$(*)\quad \left.\begin{aligned} e\,\sigma + (f - f\,\tau\,\sigma) &= (f - f\,\tau\,\sigma) + e\,\sigma \\ f\,\tau + (e - e\,\sigma\,\tau) &= (e - e\,\sigma\,\tau) + f\,\tau \end{aligned}\right\} \text{ für jedes } e \text{ in } E \text{ und } f \text{ in } F.$$

Es ist klar, daß $\sigma\tau$ ein U-Endomorphismus von E ist, und daß $\tau\sigma$ ein U-Endomorphismus von F ist. Setzen wir $e\,\eta = e - e\,\sigma\tau$ für e in E und $f\,\varkappa = f - f\tau\sigma$ für f in F, so folgt aus (*), daß η ein Endomorphismus von E und $\varkappa$ ein Endomorphismus von F ist. Es ist klar, daß $\varkappa\tau\sigma = \tau\sigma\varkappa$ und $\eta\sigma\tau = \sigma\tau\eta$ ist, und daß weiter $e = e\,\eta + e\,\sigma\tau$ für e in E und $f = f\,\varkappa + f\tau\sigma$ für f in F ist. Für solche Paare von Endomorphismen gilt (siehe Baer [4], p. 72, Lemma 2):

(2. 1) $R(\eta\sigma\tau) = R(\eta) \oplus R(\sigma\tau)$, $R(\varkappa\tau\sigma) = R(\varkappa) \oplus R(\tau\sigma)$, *$\sigma\tau$ induziert einen Automorphismus in $R(\eta)$ und $\tau\sigma$ induziert einen Automorphismus in $R(\varkappa)$.*

Es ist klar, daß $R(\eta)$ ein U enthaltender Normalteiler von E und $R(\varkappa)$ ein U enthaltender Normalteiler von F ist.

(2. 2) *$R(\eta)$ und $R(\varkappa)$ sind äquivalente Erweiterungen von U.*

Ist x ein Element in $R(\eta)$, so gibt es eine ganze Zahl n, so daß $x\,\eta^n = 0$ ist. Ist e ein Element in E, so ist $e\,\eta\sigma = (e - e\,\sigma\tau)\,\sigma = e\,\sigma - e\,\sigma\tau\sigma = e\,\sigma\varkappa$. Also wird $x\,\sigma\varkappa^n = x\,\eta^n\sigma = 0$, so daß $x\,\sigma$ zu $R(\varkappa)$ gehört. Damit haben wir gezeigt, daß $R(\eta)\,\sigma \subseteq R(\varkappa)$ ist; und ebenso sieht man, daß $R(\varkappa)\tau \subseteq R(\eta)$ gilt. Nun folgt aber aus (2. 1), daß

$$R(\eta) = R(\eta)\,\sigma\tau \subseteq R(\varkappa)\tau \subseteq R(\eta) \text{ oder } R(\eta) = R(\varkappa)\tau$$

gilt. Ebenso zeigt man $R(\varkappa) = R(\eta)\,\sigma$. Da aber $\sigma\tau$ einen Automorphismus in $R(\eta)$ und $\tau\sigma$ einen Automorphismus in $R(\varkappa)$ induziert, so folgt nun auch, daß σ einen Isomorphismus von $R(\eta)$ auf $R(\varkappa)$ und τ einen Isomorphismus von $R(\varkappa)$ auf $R(\eta)$ induziert. Damit haben wir (2. 2) und (a) bewiesen.

(2. 3) *$\eta\sigma\tau$ ist ein Zentralendomorphismus von E und $\varkappa\tau\sigma$ ist ein Zentralendomorphismus von F.*

Sind x und y Elemente in E, so folgern wir aus (*) und $\eta\sigma\tau = \sigma\tau\eta$, $1 = \eta + \sigma\tau$, daß

$$\begin{aligned} x + y\,\eta\sigma\tau &= x\,\eta + x\,\sigma\tau + y\,\sigma\tau\eta = x\,\eta + y\,\sigma\tau\eta + x\,\sigma\tau = x\,\eta + y\,\eta\sigma\tau + x\,\sigma\tau \\ &= y\,\eta\sigma\tau + x\,\eta + x\,\sigma\tau = y\,\eta\sigma\tau + x \end{aligned}$$

ist. Also gehört $y\,\eta\sigma\tau$ zum Zentrum von E und $\eta\sigma\tau$ ist ein Zentralendomorphismus von E. Ebenso sieht man, daß $\varkappa\tau\sigma$ ein Zentralendomorphismus von F ist.

Wir machen jetzt die weitere Annahme, daß Zentralendomorphismen E und F zerfällen. Dann folgt aus dem Lemma, daß $R(\eta\sigma\tau)$ ein direkter Summand von E und $R(\varkappa\tau\sigma)$ ein direkter Summand von F ist. Also gibt es Normalteiler E' und F', so daß (nach (2. 1))

$$\begin{aligned} E &= R(\eta\sigma\tau) \oplus E' = R(\eta) \oplus R(\sigma\tau) \oplus E', \\ F &= R(\varkappa\tau\sigma) \oplus F' = R(\varkappa) \oplus R(\tau\sigma) \oplus F' \end{aligned}$$

wird. Da aber $R(\eta)$ und $R(\varkappa)$ nach (2. 2) äquivalente Erweiterungen ihrer gemeinsamen Untergruppe U sind, so haben wir damit die Fast-Äquivalenz der Erweiterungen E und F von U erwiesen.

Bemerkung. Daß man häufig aus normaler Ähnlichkeit auf Fast-Äquivalenz schließen kann, ist in Baer-Williams [1] ausgeführt worden. Die benötigten Voraussetzungen sind den im Zusatz (b) gemachten ähnlich, wenn auch etwas schärfer.

§ 3. Der Verband der Klassen ähnlicher Erweiterungen.

Da Ähnlichkeit reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, so können wir die Erweiterungen der Gruppe U in Klassen ähnlicher Erweiterungen einteilen. Insbesondere bezeichnen wir die durch die Erweiterung G von U repräsentierte Klasse ähnlicher Erweiterungen von U durch das Symbol $[U \subset G]$. *Die Gesamtheit der Klassen ähnlicher Erweiterungen von U werde $\Phi(U)$ genannt,* obgleich diese Gesamtheit i. a. keine Menge sein wird, vielmehr, um einen von Menger geprägten glücklichen Ausdruck zu gebrauchen, eine Unmenge. Wir werden dies weiter unten durch Beispiele belegen.

In $\Phi(U)$ führen wir eine *teilweise Ordnung* durch folgende Regel ein:

(O) $[U \subset E] \leq [U \subset F]$ *dann und nur dann, wenn es einen U-Homomorphismus von E auf einen Teil von F gibt.*

Man überzeugt sich sofort, daß diese Regel von der Auswahl der Repräsentanten E und F in ihren Klassen unabhängig ist, daß die durch (O) definierte Ordnungsbeziehung transitiv ist, und daß aus der gleichzeitigen Gültigkeit von $[U \subset E] \leq [U \subset F]$ und $[U \subset F] \leq [U \subset E]$ auch $[U \subset E] = [U \subset F]$, d. h. die Ähnlichkeit der Erweiterungen E und F von U folgt.

Satz 1. *Jede Menge von Klassen ähnlicher Erweiterungen von U besitzt eine kleinste gemeinschaftliche obere Grenze und eine größte gemeinschaftliche untere Grenze in $\Phi(U)$.*

Der Beweis dieses Satzes beruht auf zwei voneinander unabhängigen Konstruktionen, die auch für anderweitige Anwendungen von Interesse sind.

1. A. Direkte Summen von Erweiterungen.

Es sei Θ eine Menge von Erweiterungen der Gruppe U. Dann bilden wir die sog. große direkte Summe der Gruppen in Θ. Dies ist die Menge $\overline{D(\Theta)}$ aller Funktionen f mit folgenden Eigenschaften:

$f(G)$ ist für jedes G in Θ ein eindeutig bestimmtes Element in G. Sind f' und f'' Elemente in $\overline{D(\Theta)}$, so definieren wir, wie üblich, ihre Summe durch die Formel

$$(f' + f'')(G) = f'(G) + f''(G) \text{ für } G \text{ in } \Theta;$$

und das Produkt eines Elements f in $\overline{D(\Theta)}$ mit einem Element m in M wird durch die Formel

$$(mf)(G) = m\,[f(G)] \text{ für } G \text{ in } \Theta$$

erklärt. Damit haben wir $\overline{D(\Theta)}$ zu einer M-Gruppe gemacht.

Ist u ein Element in U, so gibt es eine und nur eine Funktion f_u in $\overline{D(\Theta)}$, die $f_u(G) = u$ für jedes G in Θ erfüllt. Die Abbildung von u in U auf f_u in $\overline{D(\Theta)}$ ist natürlich ein zulässiger Isomorphismus; und wir können infolgedessen die Elemente u und f_u miteinander identifizieren. Haben wir dies ausgeführt, so ist U eine zulässige Untergruppe von $\overline{D(\Theta)}$; und diese soeben konstruierte *Erweiterung $\overline{D(\Theta)}$ von U* werden wir stets als *die (große) direkte Summe der in Θ enthaltenen Erweiterungen von U* bezeichnen.

Besteht insbesondere Θ nur aus zwei Erweiterungen E und F von U, so wird ihre direkte Summe $E \oplus F$ genannt. Sie besteht aus allen Paaren (e, f) mit e in E und f in F; und das Element u in U wird mit dem Paar (u, u) identifiziert.

1. B. Freie U-Summen von Erweiterungen von U.

Ist wieder Θ eine Menge von Erweiterungen der Gruppe U, so bilden wir zunächst nach O. Schreier die freie Summe der Gruppen in Θ mit der einen vereinigten Untergruppe U (O. Schreier [1], Baer [5]). Dies ist eine im wesentlichen eindeutig bestimmte Gruppe $F_U(\Theta)$ mit den folgenden charakteristischen Eigenschaften:

(1) *Jede Gruppe in Θ ist eine Untergruppe von $F_U(\Theta)$ und $F_U(\Theta)$ wird von den Untergruppen in Θ erzeugt.*

(2) *Sind E und F zwei verschiedene Gruppen in Θ, so ist ihr Durchschnitt $E \cap F = U$.*

(3) *Ist für jedes G in Θ ein (nicht notwendig zulässiger) Homomorphismus $\eta(G)$ von G auf einen Teil der (von G unabhängigen) Gruppe H gegeben, und ist*

$$u\,\eta(E) = u\,\eta(F) \text{ für } u \text{ in } U \text{ und } E,\ F \text{ in } \Theta,$$

so gibt es einen und nur einen Homomorphismus η von $F_U(\Theta)$ auf einen Teil von H, der

$$g\,\eta = g\,\eta(G) \text{ für } g \text{ in } G \text{ und } G \text{ in } \Theta$$

erfüllt.

Diese Gruppe $F_U(\Theta)$ muß noch zur M-Gruppe gemacht werden, was aber auf Grund von (3) ganz einfach ist. Ist nämlich m ein Element in M, G in Θ, so ist die Abbildung von g auf mg ein wohldefinierter Endomorphismus $\varkappa(G)$ von G. Ist u ein Element in U, und sind G', G'' Gruppen in Θ, so gilt natürlich $u\,\varkappa(G') = m\,u = u\,\varkappa(G'')$. Da die Gruppen Θ nach (1) Untergruppen von $F_U(\Theta)$ sind, so sind ihre Endomorphismen gleichzeitig Homomorphismen auf einen Teil von $F_U(\Theta)$. Es existiert also nach (3) ein und nur ein Endomorphismus $\varkappa$ von $F_U(\Theta)$, der

$$g\,\varkappa = g\,\varkappa(G) = m\,g \text{ für } g \text{ in } G \text{ und } G \text{ in } \Theta$$

erfüllt. Wir können also den Effekt des Elements m in M auf das Element x in $F_U(\Theta)$ durch

$$m\,x = x\,\varkappa \text{ für } m \text{ in } M \text{ und } x \text{ in } F_U(\Theta)$$

erklären. Damit ist aber $F_U(\Theta)$ zur M-Gruppe gemacht; und es ist klar, daß diese wohlbestimmte M-Gruppe $F_U(\Theta)$ eine Erweiterung von U ist. Man sieht leicht ein, daß diese Erweiterung von U die folgenden Eigenschaften hat:

(1′) *Jede Gruppe in Θ ist eine zulässige Untergruppe von $F_U(\Theta)$.*

(3′) *Ist für jedes G in Θ ein zulässiger U-Homomorphismus $\eta(G)$ von G auf einen Teil der (von G unabhängigen) M-Gruppe H gegeben, so gibt es einen und nur einen zulässigen U-Homomorphismus η von $F_U(\Theta)$ auf einen Teil von H, der $g\,\eta = g\,\eta(G)$ für g in G und G in Θ erfüllt.*

Diese M-Gruppe $F_U(\Theta)$, als Erweiterung von U betrachtet, werden wir als die *freie U-Summe der Erweiterungen in Θ* bezeichnen. — Besteht insbesondere Θ nur aus zwei Gruppen E und F, so werden wir statt $F_U(\Theta)$ wohl auch $E \underset{U}{*} F$ schreiben.

Wir können nun den Satz 1 in der folgenden verschärften Form aussprechen:

Satz 1*. *Ist Θ eine Menge von Erweiterungen von U, so ist $[U \subset \overline{D(\Theta)}]$ die größte gemeinschaftliche untere Grenze und $[U \subset F_U(\Theta)]$ die kleinste gemeinschaftliche obere Grenze der Menge Θ^* aller $[U \subset G]$ mit G in Θ.*

Beweis. Ist T eine Gruppe in Θ, so ist T eine Untergruppe von $F_U(\Theta)$. Weiter können wir die Funktion f in $\overline{D(\Theta)}$ auf das Element $f(T)$ in T abbilden. Dabei geht die mit u in U identifizierte Funktion f_u in das Element $f_u(T) = u$ über. Also ist die Abbildung von f auf $f(T)$ ein U-Homomorphismus von $\overline{D(\Theta)}$ auf T. Damit haben wir gezeigt:

(a) $$[U \subset \overline{D(\Theta)}] \leq [U \subset T] \leq [U \subset F_U(\Theta)] \text{ für jedes } T \text{ in } \Theta.$$

Es sei nun H eine Erweiterung von U derart, daß $[U \subset H] \leq [U \subset G]$ für jedes G in Θ gilt. Dann existiert zu jedem G in Θ ein U-Homomorphismus $\eta(G)$ von H auf einen Teil von G. Ist x ein Element in H, so wird durch

$$\bar{x}(G) = x\,\eta(G) \text{ für } G \text{ in } \Theta$$

eine Funktion x in $\overline{D(\Theta)}$ definiert. Da die $\eta(G)$ sämtlich zulässige Homomorphismen von H sind, so ist auch die Abbildung von x auf $\bar{x}$ ein zulässiger Homomorphismus von H auf einen Teil von $\overline{D(\Theta)}$. Ist u ein Element in U, so wird

$$\bar{u}(G) = u\,\eta(G) = u,$$

da $\eta(G)$ ein U-Homomorphismus ist. Also ist $u = f_u$; und diese Funktion haben wir mit u identifiziert. Die Abbildung von $\bar{x}$ auf x stellt folglich einen U-Homomorphismus von H auf einen Teil von $\overline{D(\Theta)}$ dar. Also ist $[U \subset H] \leq [U \subset \overline{D(\Theta)}]$; und damit haben wir gezeigt, daß $[U \subset \overline{D(\Theta)}]$ die größte gemeinschaftliche untere Grenze von Θ^* ist.

Es sei schließlich E eine Erweiterung von U derart, daß $[U \subset G] \leq [U \subset E]$ für jedes G in Θ gilt. Dann existiert für jedes G in Θ ein U-Homomorphismus $\varkappa(G)$ von G auf einen Teil von E. Wir folgern aus der obigen Eigenschaft (3′) die Existenz eines U-Homomorphismus $\varkappa$ von $F_U(\Theta)$ auf einen Teil von E, der $g\,\varkappa = g\,\varkappa(G)$ für G in Θ und g in G erfüllt. Dann ist aber $[U \subset F_U(\Theta)] \leq [U \subset E]$; und damit haben wir gezeigt, daß $[U \subset F_U(\Theta)]$ die kleinste gemeinschafliche obere Grenze von Θ^* ist.

Bemerkung 1. Während die Konstruktion von $\overline{D(\Theta)}$ sehr einfach ist, ist der Existenzbeweis für die Gruppe $F_U(\Theta)$ bekanntlich erheblich schwieriger. Man könnte infolgedessen versucht sein, aus der Existenz der größten gemeinschaftlichen unteren Grenze in bekannter Weise auf die Existenz der kleinsten gemeinschaftlichen oberen Grenze zu schließen, indem man die größte gemeinschaftliche untere Grenze aller gemeinschaftlichen oberen Grenzen bildet. Dies kann aus zwei Gründen nicht getan werden:

(a) Es gibt keine trivale obere Grenze, da es i. a. keine Erweiterung W von U derart gibt, daß $[U \subset G] \leq [U \subset W]$ für alle Erweiterungen G von U gilt (siehe Beispiel 2 unten). Dies ist um so bemerkenswerter, als $[U \subset U] \leq [U \subset G]$ für jede Erweiterung G von U gilt.

(b) Wäre $[U \subset T]$ eine gemeinschaftliche obere Grenze der $[U \subset G]$ mit G in Θ, so werden i. a. noch nicht einmal die gemeinschaftlichen oberen Grenzen g der $[U \subset G]$ mit G in Θ, die überdies $g \leq [U \subset T]$ erfüllen, eine Menge bilden (siehe Beispiel 1 unten); und wir können natürlich nur die größte gemeinschaftliche untere Grenze von Mengen in $\Phi(U)$ bilden. — Ein zu (b) analoger Grund macht es übrigens auch unmöglich, den üblichen Schluß anzuwenden, wenn man aus der Existenz der kleinsten gemeinschaftlichen oberen Grenze auf die Existenz der größten gemeinschaftlichen unteren Grenze schließen will.

Bemerkung 2. Wir können, wie dies anderwärts (Baer-Williams [1]) geschehen ist, die Erweiterungen von U in Klassen normal-ähnlicher Erweiterungen einteilen und im Bereich dieser Klassen eine teilweise Ordnung einführen. Bezeichnen wir die E enthaltende Klasse normal-ähnlicher Erweiterungen von U mit $[U \subset E]_N$, so ist $[U \subset \overline{D(\Theta)}]_N$ *die größte gemeinschaftliche untere Grenze aller* $[U \subset G]_N$ *mit* G *in* Θ, da ja, wie wir beim Beweis von Satz 1* gezeigt haben, ein U-Homomorphismus von $\overline{D(\Theta)}$ auf jedes G in Θ existiert. Dagegen werden i. a. überhaupt keine gemeinschaftlichen oberen Grenzen existieren. Um dies einzusehen, beweisen wir das folgende

Äquivalenz-Kriterium. *Sind die einfachen Gruppen* E *und* F *Erweiterungen von* $U \neq 0$, *und besitzen* $[U \subset E]_N$ *und* $[U \subset F]_N$ *eine gemeinschaftliche obere Grenze, so sind* E *und* F *äquivalente Erweiterungen von* U.

Beweis. Existieren nämlich normale U-Homomorphismen α und β von E resp. F auf einen Teil der Erweiterung H von U, so sind α und β Isomorphismen, da sie $U \neq 0$ nicht auf Null abbilden. Weiter sind $E\,\alpha$ und $F\,\beta$ Normalteiler von H. Folglich ist auch ihr Durchschnitt ein Normalteiler von H. Wegen $0 \subset U \subseteq E\,\alpha \cap F\,\beta$ ist damit dieser Durchschnitt als gemeinsamer, von 0 verschiedener Normalteiler von $E\,\alpha$ und $F\,\beta$ erwiesen. Da α und β Isomorphismen der einfachen Gruppen E und F sind, so sind auch

$E\alpha$ und $F\beta$ einfache Gruppen. Also wird $E\alpha = E\alpha \cap F\beta = F\beta$, womit die Äquivalenz der Erweiterungen E und F von U erwiesen ist.

Da aber nicht-isomorphe, einfache Erweiterungen operator-freier Gruppen $U \neq 0$ stets existieren, so werden i. a. Klassen normal-ähnlicher Erweiterungen keine gemeinschaftliche obere Grenze besitzen.

Bemerkung 3. Die Vererbung von Eigenschaften von Θ auf die Gruppen $\overline{D(\Theta)}$ und $F_U(\Theta)$ wird durch die folgenden leicht zu beweisenden Aussagen beschrieben, bei denen wir der Bequemlichkeit halber annehmen, daß Θ wenigstens zwei von U verschiedene Gruppen enthält.

(a) U ist dann und nur dann ein Normalteiler von $F_U(\Theta)$, wenn U ein Normalteiler einer jeden Gruppe in Θ ist.

(b) Die folgenden Eigenschaften von U und Θ sind miteinander äquivalent:

(b. 1) U ist ein Normalteiler von $\overline{D(\Theta)}$.

(b. 2) U ist im Zentrum aller Gruppen in Θ enthalten.

(b. 3) U ist ein Teil des Zentrums von $\overline{D(\Theta)}$.

(b. 4) U ist ein Teil des Zentrums von $F_U(\Theta)$.

(c) Dann und nur dann ist $\overline{D(\Theta)}$ abelsch, wenn alle Gruppen in Θ abelsch sind.

(d) $F_U(\Theta)$ ist nie abelsch.

Satz 2. *Die folgenden Eigenschaften der Erweiterungen E und F von U sind miteinander äquivalent:*

(1) $[U \subset E] \leq [U \subset F]$.

(2) *Es existiert eine Erweiterung von E, die sich U-homomorph auf F abbilden läßt.*

(3) *Es existiert eine Erweiterung von E, die E zur Retrakte hat und die sich U-homomorph auf F abbilden läßt.*

(4) *Es existiert eine Erweiterung von E, die F zur Retrakte hat.*

Beweis. Es ist klar, daß (2) sowohl eine Folge von (3) als auch eine Folge von (4) ist. Ist G eine Erweiterung von E, die sich U-homomorph auf F abbilden läßt, so gilt $[U \subset E] \leq [U \subset G] \leq [U \subset F]$. Also ist (1) eine Folge von (2). Erfüllen schließlich E und F Bedingung (1), so existiert ein U-Homomorphismus η von E auf einen Teil von F. Wir bemerken zunächst, daß die aus allen Paaren (e, f) mit e in E und f in F bestehende direkte Summe $E \oplus F$ zur Erweiterung von U wird, wenn wir das Element u in U mit dem Paar (u, u) in $E \oplus F$ identifizieren. Bilden wir das Element e in E auf das Paar $(e, e\eta)$ ab, so erhalten wir einen U-Isomorphismus von E auf die Untergruppe E' von $E \oplus F$, die aus allen Paaren $(e, e\eta)$ mit e in E besteht. Die Abbildung des Paares (e, f) in $E \oplus F$ auf das Paar $(e, e\eta)$ in E' bewirkt einen E'-Homomorphismus von $E \oplus F$ auf E', so daß E' eine Retrakte von $E \oplus F$ ist; und die Abbildung des Paares (e, f) in $E \oplus F$ auf das Element f in F bewirkt einen U-Homomorphismus von $E \oplus F$ auf F. Da E und E' äquivalente Erweiterungen von U sind, haben wir damit die Gültigkeit von (3) erwiesen. — Die freie U-Summe $E \underset{U}{*} F$ ist natürlich eine Erweiterung von E. Aus der charakteristischen Eigenschaft (3′) von freien U-Summen folgern wir die Existenz eines U-Endomorphismus $\varkappa$ von $E \underset{U}{*} F$, der jedes Element in F invariant läßt, und der in E mit η übereinstimmt. Es ist klar, daß $\varkappa$ die Gruppe $E \underset{U}{*} F$ auf F abbildet und also ein F-Homomorphismus von $E \underset{U}{*} F$ auf F ist. Also ist F eine Retrakte von $E \underset{U}{*} F$. Damit haben wir die Gültigkeit von (4) erwiesen. Also sind die Eigenschaften (1) und (4) miteinander äquivalent.

Satz 3. *Dann und nur dann sind E und F ähnliche Erweiterungen von U, wenn E und F Retrakten einer gemeinsamen Erweiterung sind.*

Beweis. Ist die Erweiterung G von U Retrakte der Erweiterung H von U, so sind G und H ähnliche Erweiterungen von U. Hieraus folgt die Ähnlichkeit der Erweiterungen E und F von U, wenn sie Retrakten einer gemeinsamen Erweiterung sind.

Sind umgekehrt E und F ähnliche Erweiterungen von U, so existiert ein U-Homomorphismus η von E auf einen Teil von F und ein U-Homomorphismus $\varkappa$ von F auf einen Teil von E. Wir bezeichnen mit E' die Untergruppe aller Paare $(e, e\,\eta)$ mit e in E und mit F' die Untergruppe aller Paare $(f\,\varkappa, f)$ mit f in F. Die Abbildung von e in E auf $(e, e\,\eta)$ in E' ist ein U-Isomorphismus von E auf E', so daß E und E' äquivalente Erweiterungen von U sind; und die Abbildung von (e, f) in $E \oplus F$ auf $(e, e\,\eta)$ in E' ist ein E'-Homomorphismus von $E \oplus F$ auf E', so daß die Erweiterung E' von U eine Retrakte von $E \oplus F$ ist. Ebenso sieht man ein, daß F' eine zu F äquivalente Erweiterung von U ist, die eine Retrakte von $E \oplus F$ ist. Damit haben wir gezeigt, daß sich $E \oplus F$ als gemeinsame Erweiterung von E und F auffassen läßt, die E und F zu Retrakten hat.

Bemerkung 4. Ist R eine Retrakte der Gruppe G, so gibt es einen Normalteiler N von G derart, daß die Untergruppe R von G ein vollständiges Repräsentantensystem der Restklassen von G/N darstellt. Die Struktur von G ist also vollständig durch die Struktur von N, die Struktur von R und durch die von R in N induzierten Automorphismen bestimmt. — Ist insbesondere R eine Erweiterung der Gruppe U, so kann man also den Schritt von der Erweiterung R von U zu der Erweiterung G von U als einfach genug ansehen, um ihn vernachlässigen zu können. Im Sinne dieser Bemerkung kann man Satz 3 als Rechtfertigung der Ähnlichkeitsdefinition ansehen.

Bemerkung 5. Haben die Erweiterungen E und F von U beide die Eigenschaft, daß sie von ihren U-Endomorphismen zerfällt werden (siehe § 2, 3), so sind sie dann und nur dann ähnlich, wenn sie äquivalente Retrakten besitzen. — Wir übergehen den Beweis dieses Satzes, da er ganz ähnlich geführt werden kann wie der Beweis eines analogen Satzes bei Baer-Williams [1].

Bemerkung 6. Man könnte versucht sein, auf ein Ähnlichkeitskriterium folgender Art zu hoffen: Die Erweiterungen E und F der Gruppe U sind dann und nur dann ähnlich, wenn sie freie Summanden einer gemeinsamen Erweiterung sind. Dies wäre deshalb wünschenswert, da Erweiterungen sich gewiß dann nur trivial unterscheiden, wenn die eine aus der anderen durch freie Addition einer beliebigen Gruppe entstanden ist. Ein solches Ähnlichkeitskriterium kann aber nur für sehr enge Erweiterungsklassen gelten, wie aus folgender einfacher Erörterung hervorgeht: Es sei G eine operatorfreie Erweiterung der Gruppe U; und die freien Summanden E und F von G mögen beide U enthalten. Dann ist nach einem bekannten Satz (Baer-Levi [1], Folgerung 2, p. 396) der Durchschnitt $E \cap F$ ein freier Summand von E und von F, der naturgemäß U enthält. Aber häufig werden weder E noch F echte freie Summanden besitzen, so daß dann $E = E \cap F = F$ wird und also frei unzerlegbare Erweiterungen von U nur dann einem solchen Ähnlichkeitskriterium genügen können, wenn sie äquivalent sind.

Beispiel 1. Da wir zur Konstruktion dieses Beispiels der Permutationsgruppen bedürfen, werden wir ausnahmsweise uns hier der multiplikativen Schreibweise bedienen. Wir bezeichnen allgemein mit $S(\nu)$ die Gruppe aller Permutationen einer Menge von $\aleph_\nu$ Elementen; unter $E(\nu)$ verstehen wir die Gruppe aller endlichen Permutationen in $S(\nu)$, d. h. aller der Permutationen, die alle Elemente mit endlich vielen Ausnahmen invariant lassen; und $A(\nu)$ ist die Gruppe der endlichen geraden Permutationen in $S(\nu)$ und $E(\nu)$. Es ist bekannt, daß $E(\nu)$ und $A(\nu)$ Normalteiler von $S(\nu)$ sind, daß $E(\nu)/A(\nu)$ die Ordnung 2 hat, daß $A(\nu)$ in jedem von 1 verschiedenen Normalteiler von $S(\nu)$ enthalten ist, und daß $E(\nu)$ in jedem von 1 und $A(\nu)$ verschiedenen Normalteiler von $S(\nu)$ enthalten ist. Weiter ist bekannt, daß $S(0)/E(0)$ und $A(\nu)$ einfach sind. Schließlich bemerken wir, daß $E(\nu)$ und $A(\nu)$ genau $\aleph_\nu$ Elemente enthalten, während $S(\nu)$ genau $2^{\aleph_\nu}$ Elemente enthält. (Für diese und andere benötigte Tatsachen über unendliche Permutationsgruppen vergl. Schreier-Ulam [1] und Baer [2]).

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß

$$S(\varrho) \subset S(\sigma) \text{ für } \varrho < \sigma$$

gilt. Dann haben wir

$$S(0) \subset S(1) \subset \ldots \subset S(\nu) \subset S(\nu+1) \subset \ldots$$

und

$$E(\varrho) = S(\varrho) \cap E(\sigma),\ A(\varrho) = S(\varrho) \cap A(\sigma) = E(\varrho) \cap A(\sigma) \text{ für } \varrho < \sigma.$$

Zwecks Konstruktion der Gruppe U müssen wir noch $S(0)$ ein wenig genauer betrachten. Wir nehmen an, daß $S(0)$ aus allen Permutationen der ganzen Zahlen $0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm i, \ldots$ besteht. Es sei α die Permutation der ganzen Zahlen, die $10\,i$ auf $10\,(i+1)$ abbildet und alle anderen Zahlen invariant läßt; und die übliche Zyklenschreibweise benutzend, setzen wir

$$\beta = \alpha^2\,(1, 2, 3, 4)\,(5, 6).$$

Wir bemerken, daß $(1, 2, 3, 4)\,(5, 6)$ eine gerade, endliche Permutation ist, so daß

$$(1') \qquad \beta \equiv \alpha^2 \text{ modulo } A(0).$$

Da das Quadrat eines endlichen Zyklus ungerader Länge $2\,i+1$ ein Zyklus gleicher Länge $2\,i+1$ ist, während das Quadrat eines Zyklus gerader oder unendlicher Länge das Produkt zweier Zyklen gleicher Länge ist, die zueinander fremd sind, so folgert man leicht, daß

(1″) β kein Quadrat einer Permutation in $S(0)$ oder $S(\nu)$ ist.

Wir definieren jetzt U als die von β und $(7, 8)$ erzeugte Untergruppe von $S(0$ Dann ist U das direkte Produkt der unendlichen zyklischen Gruppe $\{\beta\}$ mit der zyklischen Gruppe $\{(7, 8)\}$ der Ordnung 2.

Wir setzen weiter $G(\nu) = S(0)\,A(\nu)$. Dies ist eine wohldefinierte Untergruppe von $S(\nu)$, die genau $2^{\aleph_0}\,\aleph_\nu$ Elemente enthält. Es ist klar, daß

$$U \subseteq G(0) \subseteq G(1) \subseteq \ldots \subseteq G(\nu) \subseteq G(\nu+1) \subseteq \ldots;$$

und hieraus folgt, daß die $G(\nu)$ Erweiterungen von U sind, die

$$(2') \qquad [U \subset G(\varrho)] \leq [U \subset G(\sigma)] \text{ für } \varrho < \sigma$$

erfüllen.

Schließlich definieren wir $G = S(0)/A(0)$. Wir bemerken, daß

$$U \cap E(0) = \{(7, 8)\} \quad \text{und} \quad U \cap A(0) = 1$$

ist. Also können wir jedes Element in U mit seiner Restklasse modulo $A(0)$ identifizieren und G als Erweiterung von U auffassen. Dann gilt:

$$(3) \qquad [U \subset G(\nu)] < [U \subset G] \text{ für jedes } \nu.$$

Um dies zu zeigen, konstruieren wir zunächst einen U-Homomorphismus von $G(\nu)$ auf G. Um dies zu tun, setzen wir

$$x^\gamma = A(\nu)\,x \cap S(0) \text{ für } x \text{ in } G(\nu).$$

Da $A(\nu)\,x$ eine Restklasse von $G(\nu) = A(\nu)\,S(0)$ modulo $A(\nu)$ ist, so ist x^γ für jedes x in $G(\nu)$ eine Restklasse von $S(0)$ modulo $S(0) \cap A(\nu) = A(0)$, also ein Element in G. Nun ist es ziemlich klar, daß γ ein Homomorphismus von $G(\nu)$ auf G ist. Ist weiter u ein Element in U, so ist $u^\gamma = A(\nu)\,u \cap S(0) = A(0)\,u$, da u in $S(0)$ liegt; und das Element $A(0)\,u$ in G hatten wir vorher mit u identifiziert. Also ist $u^\gamma = u$ für u in U. Damit haben wir gezeigt, daß γ ein U-Homomorphismus von $G(\nu)$ auf G ist; oder

$$(3') \qquad [U \subset G(\nu)] \leq [U \subset G] \text{ für jedes } \nu.$$

Wäre nun (3) für irgendein ν falsch, so existierte ein U-Homomorphismus η von G auf einen Teil von $G(\nu)$. Aus (1′) folgern wir, daß das Element β in U Quadrat eines Elements in G ist, während wir aus (1″) folgern, daß es kein Quadrat eines Elementes in $G(\nu)$ ist. Aber U-Homomorphismen von G bilden Quadrate auf Quadrate ab und lassen β unverändert. Das ist ein Widerspruch, der den Beweis von (3) abschließt.

(2) $\quad [U \subset G(\varrho)] < [U \subset G(\sigma)]$ für alle $\varrho < \sigma$, die $2^{\aleph_0} < \aleph_\varrho$ erfüllen.

Wäre dies nicht wahr, so gäbe es wegen (2′) ein ϱ und ein σ derart, daß $\varrho < \sigma$, $2^{\aleph_0} < \aleph_\varrho$ und $[U \subset G(\varrho)] = [U \subset G(\sigma)]$. Wir bemerken daß $G(\varrho)$ genau $\aleph_\varrho$ und $G(\sigma)$ genau $\aleph_\sigma$ Elemente enthält, und daß weiter ein U-Homomorphismus η von $G(\sigma)$ auf einen Teil von $G(\varrho)$ existiert. Sei K der Kern dieses Homomorphismus. Dann ist $G(\sigma)/K$ einer Untergruppe von $G(\varrho)$ isomorph und enthält also höchstens $\aleph_\varrho$ Elemente. Wäre $K \cap A(\sigma) = 1$, so würde $G(\sigma)/K$ eine zu $A(\sigma)$ isomorphe Untergruppe enthalten, die aber $\aleph_\sigma$ Elemente enthielte, was unmöglich ist, da $G(\sigma)/K$ höchstens $\aleph_\varrho < \aleph_\sigma$ Elemente enthält. Also ist $A(\sigma) \cap K$ ein von 1 verschiedener Normalteiler von $A(\sigma)$. Da aber $A(\sigma)$ als die Gruppe aller endlichen, geraden Permutationen einfach ist, so folgt, daß $A(\sigma) = A(\sigma) \cap K$ ist. Also ist $A(\sigma) \subseteq K$. Nun verifiziert man ohne Schwierigkeit, daß man $G(\sigma)/A(\sigma) = [A(\sigma)\, S(0)]/A(\sigma)$ als eine zu G äquivalente Erweiterung von U auffassen kann (siehe den ersten Teil des Beweises von (3)); und aus $A(\sigma) \subseteq K$ folgert man, daß η einen U-Homomorphismus von $G(\sigma)/A(\sigma)$ auf einen Teil von $G(\varrho)$ induziert. Damit hätten wir gezeigt, daß $[U \subset G] \leq [U \subset G(\varrho)]$. Dies widerspricht aber (3); und damit haben wir (2) bewiesen.

Aus (2) und (3) ersehen wir, daß es in $\Phi(U)$ Elemente gibt, die alle „kleiner" als $[U \subset G]$ sind (und die alle $[U \subset U]$ oder $[U \subset G(0)]$ enthalten), während diese Elemente in $\Phi(U)$ wohlgeordnet vom Ordnungstypus *aller* Ordinalzahlen sind. Diese Elemente in $\Phi(U)$ können also keine Menge bilden, wie wir zeigen wollten.

Beispiel 2. Es sei U eine von 0 verschiedene Gruppe; und es sei G irgendeine Erweiterung von U. Von Operatoren werde abgesehen. Wir bezeichnen mit m eine unendliche Kardinalzahl, die größer ist als die Anzahl der Elemente in G. Weiter sei S die (additiv geschriebene) Gruppe aller Permutationen einer m-elementigen Menge. Ist dann T die Untergruppe aller der Permutationen in S, die weniger als m Elemente nicht invariant lassen, so ist T eindeutig durch die folgenden Eigenschaften charakterisiert: (a) T ist ein Normalteiler von S und S/T ist eine einfache Gruppe, die 2^m Elemente enthält; (b) jeder von S verschiedene Normalteiler von S ist in T enthalten. (Siehe Baer [2].) Da jede Gruppe, die nicht mehr als m Elemente enthält, mit einer Untergruppe von S isomorph ist, so können wir annehmen, daß G irgendwie in S (sogar in T) eingebettet ist. Dann haben wir $U \subseteq G \subseteq S$. Wir behaupten nun, daß

$$(*) \qquad [U \subset G] < [U \subset S]$$

ist. Wäre dies nicht wahr, so würde wegen $G \subseteq S$ ein U-Homomorphismus η von S auf einen Teil von G existieren. Sei K der Kern von η. Da $0 \subset U \subseteq S\,\eta \subseteq G$ ist, so folgt zunächst $K \subset S$ und also, da K ein Normalteiler von S ist, sogar $K \subseteq T$. Dann folgt aber, daß S/K wenigstens 2^m Elemente enthält; und dies ist unmöglich, da die zu S/K isomorphe Untergruppe $S\,\eta$ von G höchstens m Elemente enthält. Damit haben wir (*) bewiesen.

Aus (*) folgt sofort, daß $\Phi(U)$ kein maximales Element enthalten kann; denn (*) besagt, daß es zu jedem Element in $\Phi(U)$ ein größeres Element in $\Phi(U)$ gibt. Hieraus folgt auch, daß $\Phi(U)$ keine Menge sein kann, da man mit Hilfe dieser Bemerkung leicht ein Teilsystem von $\Phi(U)$ konstruieren kann, das den Ordnungstypus der Gesamtheit der Ordinalzahlen hat.

§ 4. Normale Erweiterungen.

Ist N ein Normalteiler der Gruppe G, so nennen wir G eine *normale Erweiterung von* N. Der Zentralisator von N in G besteht dann aus allen mit N elementweise vertauschbaren Elementen in G. Man sieht leicht ein, daß er zwar ebenfalls ein Normalteiler von G ist, aber i. a. keine zulässige Untergruppe von G sein wird, da aus der Zugehörigkeit von z zum Zentralisator von N nur auf die Zugehörigkeit von $m\,z$ zum Zentralisator von $m\,N$ geschlossen werden kann. Bilden wir nun, was leicht möglich ist, die größte zulässige Untergruppe des Zentralisators von N, so wird diese i. a. kein Normalteiler von G sein, da innere Automorphismen nicht hinsichtlich M zulässige Automorphismen zu sein brauchen. Wir definieren deshalb N_G als *den größten zulässigen Normalteiler von G, der im Zentralisator von N liegt.* Dann ist N_G die Summe aller zulässigen Normalteiler von G, deren sämtliche Elemente mit N elementweise vertauschbar sind.

Lemma. *Ist G eine normale Erweiterung von N, und ist η ein N-Endomorphismus von G, so ist $R(\eta) \subseteq N_G$ und $G = G\,\eta + N_G$.*

Beweis. Aus $x = x\,\eta$ für x in N folgt sofort $N \cap R(\eta) = 0$. (Für die Definition des Radikals $R(\eta)$ des Endomorphismus η vgl. § 2.) Da N und $R(\eta)$ beide Normalteiler von G sind, so folgt hieraus, daß jedes Element in N mit jedem Element in $R(\eta)$ vertauschbar ist. Also ist der zulässige Normalteiler $R(\eta)$ von G Teil des Zentralisators von N in G, so daß $R(\eta) \leq N_G$ Folge der Definition von N_G ist.

Sei nun S die von allen Elementen der Form $x - x\,\eta$ (für x in G) erzeugte Untergruppe von G. Aus $m\,(x - x\,\eta) = (m\,x) - (m\,x)\,\eta$ für m in M folgt die Zulässigkeit der Untergruppe S von G; und aus

$$-y + (x - x\,\eta) + y = [(-y + x) - (-y + x)\,\eta] - [(-y) - (-y)\,\eta]$$

folgt weiter, daß S ein zulässiger Normalteiler von G ist. — Ist g ein Element in G und t ein Element in N, so gehört auch $-g + t + g$ zu N, so daß t und $-g + t + g$ beide Fixelemente von η sind. Also wird

$$\begin{aligned}(g - g\,\eta) + t &= g - g\,\eta + t\,\eta + g\,\eta - g\,\eta = g + (-g + t + g)\,\eta - g\,\eta \\ &= g + (-g + t + g) - g\,\eta = t + (g - g\,\eta),\end{aligned}$$

so daß jedes $g - g\,\eta$ dem Zentralisator von N in G angehört. Daraus folgt aber, daß jedes Element des zulässigen Normalteilers S von G dem Zentralisator von N angehört. Also ist $S \subseteq N_G$; und folglich finden wir, daß $G = G\,\eta + S = G\,\eta + N_G$ ist.

Satz 1. *E und F seien normale Erweiterungen der Gruppe N.*

(a) *Dann und nur dann sind E und F äquivalente Erweiterungen von N, wenn es N-Homomorphismen η von E auf einen Teil von F und $\varkappa$ von F auf einen Teil von E gibt, die Isomorphismen zwischen N_E und N_F induzieren.*

(b) *Sind E und F äquivalente Erweiterungen von N, und ist η ein N-Homomorphismus von E auf einen Teil von F, der einen Isomorphismus von N_E auf N_F induziert, so ist η ein N-Isomorphismus von E auf F.*

Beweis. Betrachten wir irgendwelche N-Homomorphismen η und $\varkappa$, die den unter (a) ausgesprochenen Bedingungen genügen. Dann ist $\eta\,\varkappa$ ein N-Endomorphismus von E, der einen Automorphismus in N_E induziert. Dann folgt aus dem vorhergehenden Lemma sofort, daß $\eta\,\varkappa$ ein N-Automorphismus von E ist; und ebenso sieht man ein, daß $\varkappa\,\eta$ ein N-Automorphismus von F ist. Daraus folgert man, daß η und $\varkappa$ N-Isomorphismen zwischen E und F sind; und jetzt ist es klar, wie man den Beweis zu beendigen hat.

Folgerung. *Sind E und F normale Erweiterungen von N derart, daß N_E und N_F beide in N enthalten sind, so sind die Erweiterungen E und F von N dann und nur dann ähnlich, wenn sie äquivalent sind.*

Dies ist eine direkte Folge aus Satz 1, (a).

Wir bezeichnen jetzt mit $\Phi_N(U)$ die Gesamtheit der Erweiterungsklassen $[U \subset G]$, die durch normale Erweiterungen G von U repräsentiert werden können. Ist Θ eine Menge normaler Erweiterungen von U, so ist auch $F_U(\Theta)$ eine normale Erweiterung von U. Daraus folgt, daß die Menge Θ^* aller $[U \subset E]$ mit E in Θ dieselbe kleinste gemeinschaftliche obere Grenze $[U \subset F_U(\Theta)]$ in $\Phi(U)$ wie in $\Phi_N(U)$ hat. (Siehe § 3, Satz 1* und § 3, Bemerkung 3, (a).) Dagegen folgt aus § 3, Bemerkung 3, (b), daß $\overline{D(\Theta)}$ i. a. keine normale Erweiterung von U ist. Doch gilt:

Satz 2. *Ist Θ eine Menge normaler Erweiterungen von U, und ist $N(\Theta)$ der Normalisator von U in $\overline{D(\Theta)}$, so ist $[U \subset N(\Theta)]$ die größte gemeinschaftliche, in $\Phi_N(U)$ enthaltene untere Grenze der Menge Θ^* aller $[U \subset E]$ mit E in Θ.*

Hier verstehen wir unter dem Normalisator der Untergruppe S der Gruppe G die Summe (und also die umfassendste) aller zulässigen Untergruppen von G, deren sämtliche Elemente S in sich transformieren.

Beweis. Aus $U \subseteq N(\Theta) \subseteq \overline{D(\Theta)}$ und § 3, Satz 1* folgern wir

$$[U \subset N(\Theta)] \leq [U \subset \overline{D(\Theta)}] \leq [U \subset E] \text{ für } E \text{ in } \Theta;$$

und wir bemerken, daß wegen der Definition von $N(\Theta)$ diese Gruppe eine normale Erweiterung von U ist. — Sei nun H eine normale Erweiterung von U derart, daß

$$[U \subset H] \leq [U \subset E] \text{ für jedes } E \text{ in } \Theta$$

gilt. Dann folgt aus § 3, Satz 1*, daß $[U \subset H] \leq [U \subset \overline{D(\Theta)}]$ gilt. Folglich existiert ein U-Homomorphismus η von H auf $H\eta \subseteq \overline{D(\Theta)}$. Da U ein Normalteiler von H ist, so ist $U\eta = U$ ein Normalteiler von $H\eta$. Folglich ist $H\eta$ Teil des Normalisators von U in $\overline{D(\Theta)}$. Also ist η ein U-Homomorphismus von H auf einen Teil von $N(\Theta)$, d. h.

$$[U \subset H] \leq [U \subset N(\Theta)];$$

und daraus folgt unsere Behauptung.

§ 5. Abelsche Erweiterungen Abelscher Gruppen.

Es sei U eine abelsche Gruppe, die auch wieder über dem Operatorenbereich M definiert sei. Im folgenden werden nur solche Erweiterungen von U betrachtet werden, die abelsche M-Gruppen sind. Unter $\Phi_A(U)$ verstehen wir dann die Gesamtheit aller Klassen ähnlicher Erweiterungen $[U \subset G]$ mit abelschem G. Diese bildet einen Teil von $\Phi(U)$, und damit ist auch in $\Phi_A(U)$ eine teilweise Ordnung definiert.

Wir haben schon früher darauf hingewiesen, daß für abelsche Erweiterungen die Begriffe Verwandtschaft, normale Ähnlichkeit und Ähnlichkeit zusammenfallen (§ 2, Folgerung 2). Ist Θ eine Menge abelscher Erweiterungen, so wird die größte gemeinschaftliche untere Grenze der Elemente $[U \subset G]$ mit G in Θ durch die (große) direkte Summe $\overline{D(\Theta)}$ der Gruppen in Θ repräsentiert (§ 3, Satz 1*). Aber die direkte Summe abelscher Gruppen ist selbst eine abelsche Gruppe; und es folgt, daß Teilmengen von $\Phi_A(U)$ dieselbe größte gemeinschaftliche untere Grenze in $\Phi(U)$ und in $\Phi_A(U)$ haben. Die Situation ist offenbar anders für die kleinste gemeinschaftliche obere Grenze, da freie Summen von Erweiterungen praktisch nie abelsch sind. Wir führen deshalb folgenden neuen Begriff ein.

Direkte Summen abelscher Erweiterungen von U.

Es sei Θ eine Menge abelscher Erweiterungen der abelschen Gruppe U. Dann bilden wir zunächst die (kleine) direkte Summe $D(\Theta)$ der Gruppen in Θ. Diese besteht aus allen Funktionen f mit folgenden beiden Eigenschaften:

(a) $f(G)$ ist für jedes G in Θ ein Element in G.

(b) Es gibt nur endlich viele G in Θ mit $f(G) \neq 0$.

Addition von Elementen in $D(\Theta)$ und Multiplikation mit Elementen in M werden wie üblich definiert. Dann ist $D(\Theta)$ eine abelsche M-Gruppe.

Es sei weiter $V(\Theta)$ die Untergruppe all der Funktionen f in $D(\Theta)$, die folgende weitere Bedingung erfüllen.

(c) $f(G)$ ist in U für jedes G in Θ.

Ist f ein Element in $V(\Theta)$, so ist die über alle G in Θ erstreckte Summe $\sum f(G)$ ein wohlbestimmtes Element $\bar{f}$ in U. Man vergewissert sich ohne Mühe, daß die Abbildung von f in $V(\Theta)$ auf $\bar{f}$ in U einen zulässigen Homomorphismus von $V(\Theta)$ auf U darstellt, dessen Kern $W(\Theta)$ aus allen Funktionen f besteht, die außer (a), (b), (c) auch noch die folgende Bedingung erfüllen:

(d) $$\sum_G f(G) = 0.$$

Da $W(\Theta)$ eine zulässige Untergruppe von $D(\Theta)$ ist, so können wir $D_U(\Theta) = D(\Theta)/W(\Theta)$ bilden. Da die Abbildung des Elementes $W(\Theta) + f$ in $V(\Theta)/W(\Theta)$ auf das Element $\bar{f}$ in U ein zulässiger Isomorphismus von $V(\Theta)/W(\Theta)$ auf U ist, so können wir das Element $W(\Theta) + f$ mit $\bar{f}$ und $V(\Theta)/W(\Theta)$ mit U identifizieren. Tun wir dies, so haben wir $D_U(\Theta)$ zu einer abelschen Erweiterung von U gemacht; und diese wohlbestimmte Erweiterung von U bezeichnen wir als *die direkte U-Summe der in Θ enthaltenen abelschen Erweiterungen von U.*

Satz 1. *Wenn Θ eine Menge abelscher Erweiterungen von U ist, so ist $[U \subset D_U(\Theta)]$ die kleinste gemeinschaftliche obere Grenze in $\Phi_A(U)$ der $[U \subset G]$ mit G in Θ.*

Beweis. Ist g ein Element in der Gruppe G in Θ, so gibt es eine und nur eine Funktion g^* in $D(\Theta)$ derart, daß $g^*(G) = g$ und $g^*(X) = 0$ für $X \neq G$ ist. Da $u^* = u$ für u in U gilt, und da g^* dann und nur dann in $W(\Theta)$ liegt, wenn $g = 0$ ist, so bewirkt die Abbildung von g in G auf $W(\Theta) + g^*$ in $D_U(\Theta)$ einen U-Isomorphismus von G auf einen Teil von $D_U(\Theta)$. Also ist $[U \subset G] \leq [U \subset D_U(\Theta)]$ für jedes G in Θ; und damit haben wir gezeigt, daß $[U \subset D_U(\Theta)]$ eine in $\Phi_A(U)$ gelegene gemeinschaftliche obere Grenze der $[U \subset G]$ mit G in Θ ist.

Sei jetzt H irgendeine abelsche Erweiterung von U, die $[U \subset G] \leq [U \subset H]$ für jedes G in Θ erfüllt. Dann existiert für jedes G in Θ ein U-Homomorphismus $\eta(G)$ von G auf einen Teil von H. Ist nun f eine Funktion in $D(\Theta)$, so ist $f(G)\eta(G)$ für jedes G in Θ ein wohlbestimmtes Element in H; und es folgt aus (b), daß es höchstens endlich viele G in Θ mit $f(G)\eta(G) \neq 0$ gibt. Also ist die über alle G in Θ erstreckte Summe $\sum f(G)\eta(G)$ ein wohlbestimmtes Element $f\varkappa$ in H; und man sieht sofort ein, daß die Abbildung von f auf $f\varkappa$ einen zulässigen Homomorphismus von $D(\Theta)$ auf einen Teil von H bewirkt. Ist f insbesondere eine Funktion in $V(\Theta)$, so folgt

$$f\varkappa = \sum_G f(G)\eta(G) = \sum_G f(G) = \bar{f},$$

da ja die $\eta(G)$ sämtlich U-Homomorphismen sind. Wenn man nun noch die Definition der Erweiterung $D_U(\Theta)$ von U bedenkt, so sieht man schließlich, daß $\varkappa$ einen U-Homomorphismus von $D_U(\Theta)$ auf einen Teil von H induziert, so daß also $[U \subset D_U(\Theta)] \leq [U \subset H]$

gilt. Damit haben wir aber gezeigt, daß $[U \subset D_U(\Theta)]$ die kleinste gemeinschaftliche, in $\Phi_A(U)$ enthaltene, obere Grenze der $[U \subset G]$ mit G in Θ ist.

Zusatz. *Sind E und F abelsche Erweiterungen von U derart, daß $[U \subset E] \leq [U \subset F]$, so gibt es eine abelsche Erweiterung G von E, so daß $[U \subset F] = [U \subset G]$ ist.*

Beweis. Wir bilden die direkte U-Summe $G = E \underset{U}{\oplus} F$ der Erweiterungen E und F von U. Dann ist (nach Satz 1) $[U \subset G]$ die kleinste gemeinschaftliche, in $\Phi_A(U)$ enthaltene, obere Grenze von $[U \subset E]$ und $[U \subset F]$. Diese ist aber nach Voraussetzung gerade $[U \subset F]$, so daß $[U \subset F] = [U \subset G]$. Andererseits zeigt der erste Teil des Beweises von Satz 1, daß G eine Untergruppe E' enthält, die eine zu E äquivalente Erweiterung von U ist. Nun ist es klar, wie man den Beweis dieses Zusatzes vervollständigt.

Satz 2. In $\Phi_A(U)$ *gilt Dedekinds Modulsatz.*

Sind x und y Elemente in $\Phi_A(U)$, so bezeichnen wir, wie üblich, mit $x\,y$ die größte gemeinschaftliche, in $\Phi_A(U)$ enthaltene, untere Grenze von x und y; und mit $x + y$ die kleinste gemeinschaftliche, in $\Phi_A(U)$ enthaltene, obere Grenze von x und y. Dann besagt Dedekinds Modulsatz:

$$\textit{Aus } a \leq b \textit{ folgt } b\,(a + c) = a + b\,c \textit{ für } a, b, c \textit{ in } \Phi_A(U).$$

Diesen Satz werden wir in einer etwas verschärften Form beweisen. Zunächst repräsentieren wir die Elemente a, b, c in $\Phi_A(U)$ durch abelsche Erweiterungen E, F, G von U, so daß also $a = [U \subset E]$, $b = [U \subset F]$, $c = [U \subset G]$ ist. Aus $a \leq b$ folgern wir weiter, daß ein U-Homomorphismus η von E auf einen Teil von F existiert.

Aus Satz 1 folgt, daß $a + c$ durch die direkte U-Summe $E \underset{U}{\oplus} G$ repräsentiert werden kann; und aus § 3, Satz 1* folgt dann weiter, daß $b\,(a + c)$ durch die direkte Summe $F \oplus (E \underset{U}{\oplus} G)$ dargestellt wird, wobei noch gewisse Elemente mit entsprechenden Elementen in U identifiziert werden müssen. Verfolgen wir die verschiedenen Schritte in diesen beiden Konstruktionen, so werden wir schließlich zu folgender Darstellung von $b\,(a + c)$ geführt. Es sei $E \oplus F \oplus G$ die direkte Summe der drei abelschen Gruppen E, F, G, die also aus allen Tripeln (e, f, g) mit e in E, f in F, g in G besteht, die den üblichen Regeln unterworfen sind. Es sei Q die aus allen Elementen $(u, 0, -u)$ mit u in U bestehende Untergruppe von $E \oplus F \oplus G$; und

$$P = (E \oplus F \oplus G)/Q.$$

Sind u und v Elemente in U, so können wir das Element $Q + (u, u + v, v)$ in P mit dem Element $u + v$ in U identifizieren, wie man leicht einsieht, wenn man die Definition von Q und die Kommutativität von U bedenkt. Auf diese Weise erhalten wir eine abelsche Erweiterung P von U, die $b\,(a + c) = [U \subset P]$ erfüllt.

Ebenso sieht man ein, daß $a + b\,c$ durch die abelsche Erweiterung $E \underset{U}{\oplus} (F \oplus G)$ von U dargestellt wird; und wie oben sieht man ein, daß diese Erweiterung folgendermaßen beschrieben werden kann. Es sei Q' die aus allen Elementen $(-u, u, u)$ mit u in U bestehende Untergruppe von $E \oplus F \oplus G$ und

$$P' = (E \oplus F \oplus G)/Q'.$$

Sind u und v Elemente in U, so identifizieren wir das Element $Q' + (u, v, v)$ in P' mit dem Element $u + v$ in U, was wieder wegen der Definition von Q' und der Kommutativität von U möglich ist. Auf diese Weise erhalten wir eine abelsche Erweiterung P' von U, die $a + b\,c = [U \subset P']$ erfüllt.

Diese Erörterungen zeigen, daß Satz 2 ein Spezialfall des folgenden etwas schärferen Satzes ist:

Satz 2*. *P und P' sind äquivalente Erweiterungen von U.*

Beweis. Da E, F, G abelsche Gruppen sind, und da η ein U-Homomorphismus von E auf einen Teil von F ist, so wird ein Automorphismus $\varkappa$ von $E \oplus F \oplus G$ durch die Formel

$$(e, f, g)\,\varkappa = (e, f - e\,\eta, g) \text{ für } e \text{ in } E,\ f \text{ in } F,\ g \text{ in } G$$

definiert. Ist u ein Element in U, so erhalten wir

$$(u, 0, -u)\,\varkappa = (u, -u\,\eta, -u) = (u, -u, -u).$$

Daraus folgt $Q\,\varkappa = Q'$. Infolgedessen induziert $\varkappa$ einen Isomorphismus von P auf P'.

Sind u und v Elemente in U, so wird

$$[Q + (u, u + v, v)]\,\varkappa = Q' + (u, u + v - u\,\eta, v) = Q' + (u, v, v).$$

Wir hatten aber sowohl das Element $Q + (u, u + v, v)$ in P wie auch das Element $Q' + (u, v, v)$ in P' mit dem Element $u + v$ in U identifiziert; und damit haben wir gezeigt, daß $\varkappa$ einen U-Isomorphismus von P auf P' induziert, wie wir behauptet haben.

Literaturverzeichnis.

Reinhold Baer:

1. Erweiterung von Gruppen und ihren Isomorphismen. Math. Zeitschrift **38** (1934), 375—416.
2. Die Kompositionsreihe der Gruppe aller eineindeutigen Abbildungen einer unendlichen Menge auf sich. Studia Math. **5** (1935), 15—17.
3. Splitting endomorphisms. Trans. Amer. Math. Soc. **61** (1947), 508—516.
4. Direct decompositions. Transactions Amer. Math. Soc. **62** (1947), 62—98.
5. Free sums of groups and their generalizations. An analysis of the associative law. Amer. Journ. of Math. **71** (1949).
6. Extension types of abelian groups. Amer. Journal of Math. **71** (1949), 461—490.

Reinhold Baer—Friedrich Levi:

1. Freie Produkte und ihre Untergruppen. Compositio Math. **3** (1936), 391—398.

Reinhold Baer — Christine Williams:

1. Splitting criteria and extension types. Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949).

O. Schreier:

1. Die Untergruppen der freien Gruppen. Hamburger Abhdlgen **5** (1927), 161–183.

S. Ulam — J. Schreier:

1. Über die Permutationsgruppe der natürlichen Zahlenfolge. Studia Math. **4** (1933), 134–141.

H. Ulm:

1. Zur Theorie der abzählbar unendlichen Abelschen Gruppen. Math. Annalen **107** (1933), 774–803.

University of Illinois
Urbana, Illinois

Eingegangen 18. Januar 1949.

Über die Windungsmonotonie der Elementarbogen im $\mathfrak{R}^{(n)}$.

Von *Franz Denk* und *Otto Haupt* in Erlangen.

Einleitung.

Die Bogen n-ter Ordnung[1]) ohne hyperebene Teilbogen im affinen n-dimensionalen Raum $\mathfrak{R}^{(n)}$ werden im folgenden auch als Elementarbogen $\mathfrak{B}$ bezeichnet. Sie sind dadurch gekennzeichnet[2]), daß das orientierte Simplex, gebildet aus beliebigen $(n+1)$, in natürlicher[3]) Reihenfolge auf dem (orientierten) Bogen $\mathfrak{B}$ angeordneten Punkten, stets positives (oder stets negatives) Volumen besitzt. Mit dieser Kennzeichnung wird, wie wir sagen können, eine „Windungseigenschaft" der Elementarbogen zum Ausdruck gebracht.

Eine etwas anders geartete, ebenfalls sehr anschauliche, Windungseigenschaft der Elementarbogen soll in den folgenden Teilen besprochen werden. Diese Eigenschaft, welche allerdings nur „im Kleinen" d. h. nur für hinreichend „kurze" Elementarbogen erfüllt ist und nur als notwendig nachgewiesen wird, besagt:

Es seien c_ν, $\nu = 1, \ldots, n$, die (mit Vorzeichen versehenen) Abschnitte, welche von irgendeiner, durch n (vom Anfangspunkt O von $\mathfrak{B}$ verschiedene) Punkte $P_1, \ldots, P_n$ von $\mathfrak{B}$ gehenden Hyperebene $\mathfrak{M}$ auf den (orientierten) Achsen $\mathfrak{x}_\nu$ eines (vorderen) Schmiegkoordinatensystems[4]) an $\mathfrak{B}$ in O ausgeschnitten werden; dann sind die Quotienten

---

[1]) Genauer vom *starken linearen Ordnungswert* q, mit $q = n$, d. h. *jede* Hyperebene hat mit $\mathfrak{B}$ höchstens q verschiedene Punkte und mit mindestens einer Hyperebene auch genau q Punkte gemeinsam. Daraus folgt insbesondere, daß *in einem Elementarbogen keine „hyperebene"* (d. h. in einer Hyperebene gelegene) *Teilbogen* enthalten sind, speziell also keine Strecken. Unter einem *Bogen* wird jedes eindeutige, stetige Bild der abgeschlossenen Strecke $0 \leq t \leq 1$ verstanden. Jeder Elementarbogen ist *„einfach"*, d. h. topologisches Streckenbild (vgl. [2]), Hjelmslev, a. a. O.). Als *k-Ebene* werde jeder k-dimensionale, lineare (Teil-) Raum des affinen Raumes $\mathfrak{R}^{(n)}$ (oder auch des projektiven Raumes $\mathfrak{P}^{(n)}$) bezeichnet, als *Hyperebene* jede $(n-1)$-Ebene.

[2]) J. Hjelmslev, Introduction à la théorie des suites monotones, Overs. kgl. Danske vidensk. selsk. Forhandl. 1914, Nr. 1.

[3]) d. h. die zugehörigen Urbildpunkte sind auf $0 \leq t \leq 1$ (vgl. [1])) nach wachsenden oder abnehmenden t geordnet.

[4]) Unter einem *k-dimensionalen Schmiegraum* $\mathfrak{S}^{(k)}(P; \mathfrak{B})$ an $\mathfrak{B}$ in $P \in \mathfrak{B}$ versteht man jeden Limes von k-Ebenen, welche je durch $(k+1)$ verschiedene (linearunabhängige), gegen P konvergierende Punkte von $\mathfrak{B}$ gehen („aufgespannt werden"). Gehören diese Punkte sämtlich zur vorderen bzw. hinteren Umgebung von P auf $\mathfrak{B}$, so spricht man von einem *vorderen* bzw. *hinteren* Schmiegraum. Als k-dimensionalen (vorderen bzw. hinteren) *Tangentialschmiegraum* $\mathfrak{T}^{(k)}(P; \mathfrak{B})$ definiert man: Es sei $\mathfrak{T}^{(0)}(P; \mathfrak{B}) = (P)$, ferner sei $\mathfrak{T}^{(k)}(P; \mathfrak{B})$ Limes von k-Ebenen, welche durch einen vorderen bzw. hinteren $\mathfrak{T}^{(k-1)}(P; \mathfrak{B})$ und einen vor bzw. hinter P gelegenen, gegen P konvergierenden Punkt von $\mathfrak{B}$ aufgespannt werden. Zeichnet man im projektiven $\mathfrak{P}^{(n)}$

$s_\nu = c_{\nu+1} : c_\nu$ *negativ* und die s_ν gehen, ebenso wie c_ν selbst, *monoton* gegen Null, wenn die $P_1, \ldots, P_n$ monoton gegen O konvergieren. Diese Eigenschaft werde kurz als Windungsmonotonie von $\mathfrak{B}$ (bezüglich O) bezeichnet.

Die Windungsmonotonie nimmt Bezug auf ein (Schmieg-) Koordinatensystem, welches in gewissem Maße noch willkürlich ist. Eine Folgerung aus der Windungsmonotonie, in welcher nur auf das System der durch $\mathfrak{B}$ eindeutig bestimmten Tangentialschmieghalbräume an $\mathfrak{B}$ in O Bezug genommen wird, ist der sogenannte *Halbspurensatz*. Dieser besagt (vgl. Nr. 2. 3.), daß *die j-dimensionale „Halbspur" der Maximalsekante* $\mathfrak{Q} = (\mathfrak{q})$ (d. h. der Durchschnitt von $\mathfrak{Q}$ mit dem $(j+1)$-dimensionalen Tangentialschmieghalbraum an $\mathfrak{B}$ in O) *gegen den j-dimensionalen Tangentialschmieghalbraum an $\mathfrak{B}$ in O „monoton" konvergiert*, wenn $\mathfrak{q}$ monoton gegen O konvergiert.

Auf eine Anwendung der Windungsmonotonie hoffen wir später zurückkommen zu können.

§ 1. Einige Hilfssätze.

1. 1. Es sei $\mathfrak{B} = \widehat{OE}$ im *projektiven* n-dimensionalen Raum $\mathfrak{P}^{(n)}$ ein (abgeschlossener) Elementarbogen, also ein Bogen vom[1]) starken linearen Ordnungswert n mit den Endpunkten O und E; dabei sei O als Anfangspunkt ausgezeichnet, also $\mathfrak{B}$ orientiert, in dem Sinne, daß E als „vor" O auf $\mathfrak{B}$ gelegen, m. a. W.: als auf O folgend, betrachtet wird.

In jedem von O bzw. von E verschiedenen Punkt $Q \in \mathfrak{B}$ existiert[5]) für $k = 0, 1, \ldots, n$, eindeutig der vordere bzw. hintere k-dimensionale Schmiegraum $\mathfrak{S}^{(k)} = \mathfrak{S}^{(k)}(Q; \mathfrak{B})$, Tangentialschmiegraum $\mathfrak{T}^{(k)} = \mathfrak{T}^{(k)}(Q; \mathfrak{B})$ und Tangentialschmieg*halb*raum $\mathfrak{Th}^{(k)} = \mathfrak{Th}^{(k)}(Q; \mathfrak{B})$ an $\mathfrak{B}$. Übrigens ist $\mathfrak{T}^{(k)}(Q; \mathfrak{B}) = \mathfrak{S}^{(k)}(Q; \mathfrak{B})$, wo rechter und linker Hand beide Male entweder der vordere oder der hintere Schmieg- usw. Raum zu nehmen ist. In O und E existieren nur die vorderen bzw. nur die hinteren Schmieg- usw. Räume an $\mathfrak{B}$.

Sind $Q_1, \ldots, Q_r$, $0 \leq r \leq n+1$, beliebige *verschiedene Punkte eines Bogens* $\mathfrak{B}$, so sind $Q_1, \ldots, Q_r$ stets *linear unabhängig dann und nur dann, wenn $\mathfrak{B}$ Elementarbogen ist.* Es genügt, diese Behauptung für $r = n+1$ zu beweisen; letzteres folgt aber daraus, daß andernfalls $Q_1, \ldots, Q_{n+1}$ in einer Hyperebene liegen würden, also $\mathfrak{B}$ einen Ordnungswert $\geq n+1$ besäße und umgekehrt. Dabei ist der Fall *einbegriffen, daß unter den Q_ϱ* (die) *Endpunkte von $\mathfrak{B}$ enthalten sind;* zu jeder, solche Endpunkte enthaltenden Hyper-

---

eine Hyperebene als uneigentlich aus (geht man also zum affinen $\mathfrak{R}^{(n)}$ über), so läßt sich als k-dimensionaler *vorderer Tangentialschmieghalbraum* $\mathfrak{Th}^{(k)}(P; \mathfrak{B})$ an (von) $\mathfrak{B}$ in P erklären jeder Limes von (offenen oder abgeschlossenen) Halbräumen durch einen vorderen $\mathfrak{T}^{(k-1)}$ und einen, gegen P konvergierenden Punkt $Q \in \mathfrak{B}$ vor P (mit $\mathfrak{T}^{(k-1)}$ als Begrenzung); P ist dabei als eigentlicher Punkt angenommen. Die Definition der *hinteren* $\mathfrak{Th}^{(k)}$ erhält man, wenn man einen hinteren $\mathfrak{T}^{(k-1)}$ zugrunde legt, Q auf eine hintere Umgebung von P beschränkt und für $k \equiv 1 \pmod 2$ den zum Limeshalbraum komplementären als hinteren $\mathfrak{Th}^{(k)}$ erklärt. Unter einem (vorderen) *Schmiegkoordinatensystem* von (an) $\mathfrak{B} = \widehat{OE}$ z. B. im Punkte O verstehen wir jedes System von n linear unabhängigen, durch O gehenden, orientierten Geraden $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$ der folgenden Beschaffenheit: $\mathfrak{x}_1$ enthält die vordere Halbtangente $\mathfrak{Th}^{(1)}(O; \mathfrak{B})$ und ist mit ihr gleichorientiert. Es sei $\mathfrak{x}_\nu$ für $1 \leq \nu \leq N$ schon definiert und es sei $\mathfrak{T}^{(\nu)}(O; \mathfrak{B})$ von $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$ aufgespannt. Dann ist $\mathfrak{x}_{\nu+1}$ *irgendeine*, O enthaltende orientierte Gerade, deren durch O als Anfangspunkt bestimmte (offene) *positive* Halbgerade $\mathfrak{h}_{\nu+1}$ ganz innerhalb eines (des) vorderen $\mathfrak{Th}^{(\nu+1)}(O, \mathfrak{B})$ liegt; es wird also insbesondere $\mathfrak{T}^{(\nu+1)}(O; \mathfrak{B})$ bzw. $\mathfrak{Th}^{(\nu+1)}(O; \mathfrak{B})$ durch $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\nu, \mathfrak{x}_{\nu+1}$ bzw. durch $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\nu, \mathfrak{h}_{\nu+1}$ aufgespannt; vgl. Denk-Haupt, Über die Singularitäten reeller Bogen im R_n, Journ. f. d. r. u. angew. Math. **183** (1941), Nr. 0. 3. 3.

[5]) Vgl. Hjelmslev, a. a. O.[2]), sowie J. Sauter, Zur Theorie der Bogen n-ter Realitätsordnung im R_n, 1. Mitt., Math. Zeitschr. **41** (1936), S. 519ff., Nr. 2. 3. und 2. 4.

ebene $\mathfrak{H}$ gibt es übrigens[6]) beliebig benachbarte[7]) Hyperebenen, welche mit $\mathfrak{B}$ mindestens ebenso viele, im Innern von $\mathfrak{B}$ gelegene Punkte gemeinsam haben wie $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{B}$.

Sind $Q_1, \ldots, Q_r$ untereinander und von O *sowie von* E *verschiedene Punkte* von $\mathfrak{B}$, so bezeichnen wir den, von dem r-Tupel $\mathfrak{q} = (Q_1, \ldots, Q_r)$ aufgespannten (eindeutig bestimmten) linearen $(r-1)$-dimensionalen Raum $\mathfrak{Q} = (\mathfrak{q}) = ((Q_1, \ldots, Q_r))$ als eine r-Sekante im engeren Sinne (kurz: i. e. S.) von $\mathfrak{B}$. Wenn unter den Q_ϱ auch Endpunkte (O oder E) vorkommen, so sprechen wir von extremen r-Sekanten; r-Sekanten i. e. S. und extreme r-Sekanten zusammen sollen als r-Sekanten im weiteren Sinne (kurz: i. w. S.) bezeichnet werden.

In einer r-Sekante von $\mathfrak{B}$ i. e. S. $(1 \leq r \leq n)$ kann der Punkt O nicht enthalten sein (weil anderenfalls $Q_1, \ldots, Q_r$ und O linear abhängig wären). Die n-Sekanten i. w. S. sollen auch Maximalsekanten von $\mathfrak{B}$ heißen; sie sind Hyperebenen. Eine Hyperebene, welche mit $\mathfrak{B}$ genau k Punkte gemeinsam hat, heiße von der Ordnung k (bezüglich $\mathfrak{B}$). Die Maximalsekanten sind Hyperebenen n-ter Ordnung.

Legt man statt des projektiven Raumes $\mathfrak{P}^{(n)}$ den affinen Raum $\mathfrak{R}^{(n)}$ zugrunde, so soll ein *Bogen* oder eine *Kurve* immer als zur uneigentlichen Hyperebene fremd und zwar als *beschränkt* vorausgesetzt werden.

1. 2. Für später benötigen wir zunächst die folgenden Hilfssätze, welche sich durchaus auf den *projektiven* Raum $\mathfrak{P}^{(n)}$ beziehen:

1. Hilfssatz. Jede r-Sekante $\mathfrak{S}$ im engeren Sinne des Elementarbogens $\mathfrak{B} = \widehat{OE}$ im projektiven $\mathfrak{P}^{(n)}$ ist fremd zum höchstens $(n-r)$-dimensionalen Schmiegraum $\mathfrak{T}^{(j)}$ an $\mathfrak{B}$ in O; dabei ist $0 \leq j \leq n-r$ und $1 \leq r \leq n$.

2. Hilfssatz. Jede, den Endpunkt E nicht enthaltende $(r+1)$-Sekante $\mathfrak{S}$ im weiteren Sinne des Elementarbogens $\mathfrak{B} = \widehat{OE}$ im projektiven $\mathfrak{P}^{(n)}$ hat mit dem $(n-r)$-dimensionalen Tangentialschmiegraum $\mathfrak{T}^{(n-r)}$ an $\mathfrak{B}$ in O genau einen Punkt gemeinsam, $0 \leq r \leq n-1$.

3. Hilfssatz. Vor. Der Elementarbogen $\mathfrak{B} = \widehat{OE}$ im $\mathfrak{P}^{(n)}$ besitze in O das [4]) (vordere) Schmiegkoordinatensystem $\mathfrak{X} = (\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n)$. Ferner[8]) sei $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}(\varrho, \tau) = \mathfrak{x}_\varrho \cup \mathfrak{x}_\tau$ mit $\varrho \neq \tau$; $\varrho, \tau = 1, \ldots, n$, die von $\mathfrak{x}_\varrho$ und $\mathfrak{x}_\tau$ aufgespannte 2-Ebene.

Beh. **(a)** Jede $(n-1)$-Sekante $\mathfrak{T} = ((Q_1, \ldots, Q_{n-1}))$ im weiteren Sinne von $\mathfrak{B}$, in welcher $\mathfrak{E}$ nicht enthalten ist, hat mit $\mathfrak{E}$ entweder eine Gerade $\mathfrak{g}(\mathfrak{T})$ oder genau einen Punkt $P(\mathfrak{T})$ gemeinsam.

(b) Es hat $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}(\varrho, \tau)$ mit jeder Maximalsekante $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{B}$ im weiteren Sinne, in welcher $\mathfrak{E}$ nicht enthalten ist, eine Gerade $\mathfrak{g}(\mathfrak{M})$ gemeinsam.

Bew. *des* 1. *Hilfssatzes.*

(A) Es ist[9]) $\mathfrak{T}^{(n-1)}$ fremd zu $(\mathfrak{B} - (O) - (E))$. Die Beh. ist also richtig für $r = 1$, so daß wir im folgenden $2 \leq r$ annehmen können.

---

[6]) Gemäß des sogen. Reduktionssatzes, demzufolge also die Definition der starken Ordnung nicht geändert wird, wenn man darin nur Hyperebenen in Betracht zieht, welche mit $\mathfrak{B}$ ausschließlich innere Punkte von $\mathfrak{B}$ gemeinsam haben. Vgl. Haupt, Zur Theorie der Realitätsordnungen, Monatsh. f. Math. u. Phys. 40 (1933), S. 18, Nr. 2. 4.

[7]) Der Begriff der Nachbarschaft bezieht sich dabei auf den im üblichen Sinne erklärten topologischen Raum aller Hyperebenen des $\mathfrak{P}^{(n)}$ Vgl. z. B. Haupt-Aumann-Pauc, Diff.- u. Integralrechnung, 2. Aufl., Bd. I., Nr. 6. 3. 4. 2. (Berlin-Leipzig 1948).

[8]) Dabei bezeichnet $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{N}$ den von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ aufgespannten linearen Raum, nämlich den kleinsten, in welchem $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ enthalten sind, hingegen $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}$ den mengentheoretischen Durchschnitt der (linearen) Räume $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$. Die leere Menge wird mit $\mathfrak{O}$ bezeichnet.

[9]) Vgl. Sauter, a. a. O. [5]), S. 523, Nr. 2. 9.

(B) Es sei $\mathfrak{S} = ((Q_1, \ldots, Q_r))$, wobei Q_r der auf $\mathfrak{B}$ am nächsten bei E gelegene Punkt unter den $Q_1, \ldots, Q_r$ sei. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion nach der Dimension n. Der Satz ist richtig für $n = 2$; er sei auch schon bewiesen für $2 \leq n \leq N$. Wir projizieren den Elementarbogen $\mathfrak{B}' = \widehat{OQ_r}$ des $\mathfrak{P}^{(N+1)}$ aus Q_r in $\mathfrak{H} = \mathfrak{T}^{(N)}$. Gemäß **(A)** ist Q_r nicht in $\mathfrak{H}$ enthalten. Die Projektion $\tilde{\mathfrak{B}}'$ von $\mathfrak{B}'$ ist[10]) ein Elementarbogen im N-dimensionalen Raum $\mathfrak{H}$. Ferner ist[11]) $\mathfrak{T}^{(k)}$ der k-dimensionale Schmiegraum $\tilde{\mathfrak{T}}^{(k)}$ an $\tilde{\mathfrak{B}}'$ in $\tilde{O} = O$ (bezüglich $\mathfrak{H}$) für $0 \leq k \leq N-1$. Schließlich projiziert[12]) sich $\mathfrak{S}$ in die durch die Bilder $\tilde{Q}_\varrho$, $\varrho = 1, \ldots, r-1$, aufgespannte $(r-1)$-Sekante $\tilde{\mathfrak{S}}$ von $\tilde{\mathfrak{B}}'$ in $\mathfrak{H}$. Die $\tilde{Q}_\varrho$ sind dabei innere Punkte von $\tilde{\mathfrak{B}}'$. Nach Induktionsannahme ist aber $\tilde{\mathfrak{S}}$ fremd zum j-dimensionalen Schmiegraum $\tilde{\mathfrak{T}}^{(j)}$ an $\tilde{\mathfrak{B}}'$ in $\tilde{O}$, wobei

$$0 \leq j \leq N-(r-1) = N+1-r = N' \leq N-1, \quad 2 \leq r \leq N+1.$$

Daher ist $\mathfrak{S}$ selbst erst recht fremd zu $\mathfrak{T}^{(N')}$; denn wegen $N' \leq N-1$ ist $\mathfrak{T}^{(N')} = \tilde{\mathfrak{T}}^{(N')} \subset \mathfrak{H}$, also $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{T}^{(N')} = \mathfrak{O}$ wegen $\mathfrak{S} = \tilde{\mathfrak{S}} \cup (Q_r)$ und wegen $\tilde{\mathfrak{S}} \cap \mathfrak{T}^{(N')} = \mathfrak{O}$.

Bew. *des* 2. *Hilfssatzes.*

I. Der Satz ist für $r = 0$ richtig, weil $\mathfrak{T}^{(n)} = \mathfrak{P}^{(n)}$. Dem entsprechend werden wir o. B. d. A. im weiteren Verlaufe des Beweises $1 \leq r \leq n-1$ annehmen.

II. Es sei $\mathfrak{S} = ((Q_1, \ldots, Q_{r+1}))$ und Q_1 der ev. mit O zusammenfallende Punkt. Setzt man $\mathfrak{S}' = ((Q_2, \ldots, Q_{r+1}))$ und $\mathfrak{D}' = \mathfrak{S}' \cap \mathfrak{T}^{(n-r)}$, so ist $\dim(\mathfrak{D}') = -1$ (Hilfssatz 1.). Für $\mathfrak{D} = \mathfrak{S} \cap \mathfrak{T}^{(n-r)}$ ist[13]) andererseits $0 \leq \dim(\mathfrak{D}) - \dim(\mathfrak{D}') \leq 1$, woraus $\dim(\mathfrak{D}) = 0$ folgt.

Bew. *zum* 3. *Hilfssatz.*

(a) Da $\mathfrak{E}$ nicht in $\mathfrak{T}$ enthalten ist, gilt $n-1 \leq \dim(\mathfrak{T} \cup \mathfrak{E}) \leq n$ und folglich $(n-2)+2-n = 0 \leq \dim(\mathfrak{T} \cap \mathfrak{E}) \leq n-2+2-(n-1) = 1$.

(b) Da $\mathfrak{E}$ nicht in $\mathfrak{M}$ enthalten ist, so gilt $\dim(\mathfrak{E} \cup \mathfrak{M}) = n$ und mithin

$$\dim(\mathfrak{E} \cap \mathfrak{M}) = (n-1)+2-n = 1.$$

1. 3. Die jetzt zu besprechenden Begriffe und Hilfssätze beziehen sich im wesentlichen nur auf den affinen Raum $\mathfrak{R}^{(n)}$.

1. Hilfssatz. Vor. **(1)** Es sei $\mathfrak{B} = \widehat{OE}$ ein (beschränkter) Elementarbogen im $\mathfrak{R}^{(n)}$ und $\mathfrak{S} = ((Q_1, \ldots, Q_r))$ sei eine r-Sekante von $\mathfrak{B}$ *im engeren Sinne.*

(2) Es seien die $Q_1, \ldots, Q_r$ sämtlich differenzierbar[14]) und es sei $\tilde{\mathfrak{B}} = \widehat{\tilde{O}\tilde{E}}$ die Projektion von $\mathfrak{B}$ aus $\mathfrak{S}$ als Zentrum auf den $(n-r)$-dimensionalen (vorderen) Schmiegraum $\mathfrak{T}^{(n-r)}$ an $\mathfrak{B}$ in O.

Beh. *Jeder, $\tilde{O}$ als Anfangspunkt besitzende beschränkte Teilbogen $\tilde{\mathfrak{B}}'$ von $\tilde{\mathfrak{B}}$ im (affinen Raum) $\mathfrak{T}^{(n-r)}$ liegt ganz im abgeschlossenen, $(n-r)$-dimensionalem Tangentialschmieghalbraum $\mathfrak{Th}^{(n-r)}$ an $\mathfrak{B}$ in O; dabei ist $0 \leq r \leq n-2$ und $2 \leq n$.*

Bew. Gemäß der Definition von $\mathfrak{Th}^{(n)}$ ist die Beh. richtig für $r = 0$ (und jedes $n \geq 2$); denn $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B} - (O)$ ist fremd zu $\mathfrak{T}^{(n-1)}$ (gemäß Nr. 1. 2., Hilfssatz 1.), also

---

[10]) Vgl. Sauter, a. a. O. [5]), S. 519, Nr. 2. 2. und S. 521, Nr. 2. 7., Anfang.

[11]) Vgl. Sauter, a. a. O. [5]), S. 513, I. 1.

[12]) Vgl. Sauter, a. a. O. [5]), S. 522, Nr. 2. 8.

[13]) Vgl. z. B. Denk-Haupt, a. a. O. [4]), Nr. 1. 2.

[14]) Ein Punkt P im Innern von $\mathfrak{B}$ heiße (gewöhnlich) *differenzierbar*, wenn in P der hintere und vordere $\mathfrak{Th}^{(k)}$ identisch sind für $k = 0, 1, \ldots, n$. Bis auf abzählbar viele Ausnahmen sind alle Punkte eines Elementarbogens differenzierbar, vgl. Hjelmslev, a. a. O. [2]), auch Sauter, 2. Mitt., Math. Zeitschr. **42** (1937), S. 581 oben.

$\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{Th}^{(n)}$. Ist $r > 0$, so ist $\mathfrak{S}$ fremd zu $\mathfrak{T}^{(n-r)}$ (gemäß Nr. 1. 2., Hilfssatz 1.). Daher[15]) ist $\tilde{\mathfrak{B}}$ oder vielmehr jeder beschränkte Teilbogen von $\tilde{\mathfrak{B}}$ Elementarbogen in dem durch $\mathfrak{T}^{(n-r)}$ bestimmten (projektiven) $\mathfrak{P}^{(n-r)}$, liegt also in $\tilde{\mathfrak{Th}}^{(n-r)} = \mathfrak{Th}^{(n-r)}$.

2. Hilfssatz. Vor. **(1)** Es sei $\mathfrak{B} = \widehat{OE}$ ein Elementarbogen im $\mathfrak{R}^{(n)}$. Ferner sei $\mathfrak{X} = (\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n)$ ein vorderes Schmiegkoordinatensystem in O an $\mathfrak{B}$. Ferner sei gesetzt: $\mathfrak{H}(\nu/n) = \mathfrak{x}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{x}_{\nu-1} \cup \mathfrak{x}_{\nu+1} \cup \cdots \cup \mathfrak{x}_n$, und $\mathfrak{E}(\nu) = \mathfrak{x}_\nu \cup \mathfrak{x}_{\nu+1}$, $1 \leq \nu \leq n$; $\mathfrak{x}_{n+1} = \mathfrak{x}_1$.

(2) Es werde $\mathfrak{B}$ aus einem uneigentlichen Punkt Z der 2-Ebene $\mathfrak{E}(n)$ projiziert auf $\mathfrak{H}(\nu + 1/n)$ bzw. auf $\mathfrak{H}(\nu/n)$ je nachdem Z fremd ist zu $\mathfrak{x}_\nu$ (Fall a) bzw. nicht fremd zu $\mathfrak{x}_\nu$ (Fall b). Das Bild von $\mathfrak{B}$ bei der Projektion sei $\tilde{\mathfrak{B}}$.

Beh. Ist $\tilde{\mathfrak{T}}^{(\lambda)} = \mathfrak{T}^{(\lambda)}(\tilde{O}; \tilde{\mathfrak{B}})$ und $\mathfrak{T}^{(\lambda)} = \mathfrak{T}^{(\lambda)}(O; \mathfrak{B})$ oder
$\tilde{\mathfrak{Th}}^{(\lambda)} = \mathfrak{Th}^{(\lambda)}(\tilde{O}; \tilde{\mathfrak{B}})$ und $\mathfrak{Th}^{(\lambda)} = \mathfrak{Th}^{(\lambda)}(O; \mathfrak{B})$

der λ-dimensionale Schmieg(*ganz*)raum oder Schmieg*halb*raum an $\tilde{\mathfrak{B}}$ in $\tilde{O}$ und an $\mathfrak{B}$ in O, $\lambda = 1, \ldots, n$, so gilt, entsprechend dem Fall (a) bzw. (b):

I. Für $1 \leq \varrho \leq \nu$ bzw. für $1 \leq \varrho \leq \nu - 1$ ist

$$\tilde{\mathfrak{T}}^{(\varrho)} = \mathfrak{T}^{(\varrho)} = \mathfrak{H}(\varrho) = \mathfrak{x}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{x}_\varrho, \text{ sowie } \tilde{\mathfrak{Th}}^{(\varrho)} = \mathfrak{Th}^{(\varrho)}.$$

II. Für $\nu \leq \mu \leq n - 2$ oder für $\nu - 1 \leq \tau \leq n - 2$ ist

$$\textbf{(A')} \quad \tilde{\mathfrak{T}}^{(\mu)} = \mathfrak{H}(\nu + 1/n) \cap \mathfrak{T}^{(\mu+1)} = \mathfrak{H}(\nu + 1/\mu + 1) = \mathfrak{x}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{x}_\nu \cup \mathfrak{x}_{\nu+2} \cup \cdots \cup \mathfrak{x}_{\mu+1},$$

$$\textbf{(A)} \quad \tilde{\mathfrak{Th}}^{(\mu)} = \mathfrak{H}(\nu + 1/n) \cap \mathfrak{Th}^{(\mu+1)};$$

$$\textbf{(B')} \quad \tilde{\mathfrak{T}}^{(\tau)} = \mathfrak{H}(\nu/n) \cap \mathfrak{T}^{(\tau+1)} = \mathfrak{H}(\nu/\tau + 1) = \mathfrak{x}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{x}_{\nu-1} \cup \mathfrak{x}_{\nu+1} \cup \cdots \cup \mathfrak{x}_{\tau+1},$$

$$\textbf{(B)} \quad \tilde{\mathfrak{Th}}^{(\tau)} = \mathfrak{H}(\nu/n) \cap \mathfrak{Th}^{(\tau+1)}.$$

III. Es ist $\tilde{\mathfrak{X}} = (\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\nu, \mathfrak{x}_{\nu+2}, \ldots, \mathfrak{x}_n)$ bzw.

$$\tilde{\mathfrak{X}} = (\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{\nu-1}, \mathfrak{x}_{\nu+1}, \ldots, \mathfrak{x}_n)$$

ein (vorderes) Schmiegkoordinatensystem von $\tilde{\mathfrak{B}}$ in $\tilde{O}$. (Die *Orientierung* der $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$ in $\tilde{\mathfrak{X}}$ ist dabei also die gleiche wie in $\mathfrak{X}$.)

Bew. *Betr. Beh.* **I.** Folgt aus schon angeführten Sätzen[16]).
Betr. Beh. **II.** *im Falle* (a).

(II, a, 1) Es genügt **(A')** zu beweisen. Denn aus **(A')** folgt

$$\textbf{(A*)} \qquad (\tilde{\mathfrak{T}}^{(\mu-1)} \cup (\tilde{Q}))_h = \mathfrak{H}(\nu + 1/n) \cap (\mathfrak{T}^{(\mu)} \cup (Q))_h,$$

wobei $\tilde{Q} \in \tilde{\mathfrak{B}}$ das Bild von $Q \in \mathfrak{B}$ ist und wobei der Index h in $(\ldots)_h$ andeutet, daß der $\tilde{Q}$ bzw. Q enthaltende, von $\tilde{\mathfrak{T}}^{(\mu-1)}$ bzw. von $\mathfrak{T}^{(\mu)}$ begrenzte, durch $\tilde{\mathfrak{T}}^{(\mu-1)}$ und $(\tilde{Q})$ bzw. durch $\mathfrak{T}^{(\mu)}$ und (Q) aufgespannte Halbraum gemeint ist. Durch Grenzübergang für $\tilde{Q} \to \tilde{O}$ ergibt sich **(A)** aus **(A*)**.

---

[15]) Bei Sauter[10]) für $r = 1$ bewiesen. Daraus folgt die Beh. für $r > 2$ vermöge vollständiger Induktion; denn die Projektion aus $((Q_1, \ldots, Q_r))$ bei differenzierbaren $Q_1, \ldots, Q_r$ kann erzeugt werden durch Projektion aus Q_1, bei welcher die Bilder $\tilde{Q}_2, \ldots, \tilde{Q}_r$ der $Q_2, \ldots, Q_r$ differenzierbare Punkte des Bildbogens sind (Sauter, a. a. O.); darauffolgende Projektion aus $\tilde{Q}_2$ usw. führt zum Beweis.

[16]) Vgl. Sauter, a. a. O. [11]) sowie [15]).

(II, a, 2) Wir beweisen **(A′)** zunächst für $\mu = \nu + 1$. Definitionsgemäß ist $\tilde{\mathfrak{T}}^{(\nu+1)} = \lim (\tilde{\mathfrak{T}}^{(\nu)} \cup (\tilde{Q}))$ für $\tilde{Q} \to \tilde{O}$ mit $\tilde{Q} \in \tilde{B}$. Aber $\tilde{\mathfrak{T}}^{(\nu)} = \mathfrak{T}^{(\nu)}$ (Beh. I) und

$$\tilde{\mathfrak{T}}^{(\nu)} \cup (\tilde{Q}) = \mathfrak{H}(\nu + 1/n) \cap (((\mathfrak{T}^{(\nu)} \cup (Z)) \cup (Q)).$$

Wegen $Z \in (\mathfrak{E}(\nu) - \mathfrak{x}^{\nu})$ ist $\mathfrak{T}^{(\nu)} \cup (Z) = \mathfrak{T}^{(\nu+1)}$; wegen $\mathfrak{T}^{(\nu+1)} \cup (Q) \to \mathfrak{T}^{(\nu+2)}$ für $Q \to O$, also für $\tilde{Q} \to \tilde{O}$, folgt daher die Beh. für $\mu = \nu + 1$.

(II, a, 3) Ist nun **(A′)** schon für $\nu + 1 \leq \mu \leq N - 1$ bewiesen $(N \leq n - 2)$, so gilt $\tilde{\mathfrak{T}}^{(N-1)} \cup (\tilde{Q}) = \mathfrak{H}(N-1/n) \cap (\mathfrak{T}^{(N)} \cup (Q))$, woraus für $Q \to O$ und mithin $\tilde{Q} \to \tilde{O}$ schon **(A′)** für $\mu = N$ folgt.

Betr. Beh. **II.** *im Falle* (b). Liegt Z auf $\mathfrak{x}_\nu$, so kann man wie im Fall (a) schließen, sofern man in **(II, a, 2)** nur ν statt $(\nu + 1)$ zugrunde legt.

Betr. Beh. **III.** Gemäß Beh. **I.** sind die in $\mathfrak{H}(\nu + 1/n)$ enthaltenen $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\nu$ im Falle (a) die ersten ν Achsen eines Schmiegkoordinatensystems $\tilde{\mathfrak{X}}$ von $\tilde{\mathfrak{B}}$ in $\tilde{O}$. Gemäß **(A*)** für $\mu = \nu + 1$ in Ziff. **(II, a, 1)** des Bew. von Beh. **II** im Falle (a) ist ferner die ebenfalls in $\mathfrak{H}(\nu + 1/n)$ enthaltene $\mathfrak{x}_{\nu+2}$ die $(\nu + 1)$-te Achse eines Systems $\tilde{\mathfrak{X}}$; und ebenso ergeben sich gemäß **(A*)** die $\mathfrak{x}_{\nu+3}, \ldots, \mathfrak{x}_n$ als die übrigen derartigen Achsen. Entsprechend ergibt sich die Beh. im Fall (b).

3. Hilfssatz. Vor. Es sei $\mathfrak{B} = \widehat{OE}$ ein Elementarbogen im $\mathfrak{R}^{(n)}$. Ferner sei $\mathfrak{X} = (\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n)$ ein Schmiegkoordinatensystem an $\mathfrak{B}$ in O.

Beh. Es existiert ein beschränkter, abgeschlossener Teilbogen $\mathfrak{B}' = \widehat{OE'}$ von $\mathfrak{B}$ mit dem gleichen Anfangspunkt O wie $\mathfrak{B}$ derart, daß jede Maximalsekante von $\mathfrak{B}$ im *weiteren Sinne* mit jeder der Achsen $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$ genau einen und zwar eigentlichen Punkt gemeinsam hat.

Bew. Es genügt, die Beh. nur für eine der Achsen zu beweisen, etwa für $\mathfrak{x}_r$. Wir projizieren dann $\mathfrak{B}$ parallel zu $\mathfrak{x}_r$ auf eine, zu $\mathfrak{x}_r$ nicht parallele[17]) Hyperebene $\mathfrak{H} = \mathfrak{R}^{(n-1)}$. Da die Projektion $\tilde{\mathfrak{B}} = \widehat{\tilde{O}\tilde{E}}$ von $\mathfrak{B}$ ein Bogen höchstens der Ordnung n ist, so existiert[18]) ein Teilbogen $\tilde{\mathfrak{B}}' = \widehat{\tilde{O}\tilde{E}'}$ von $\tilde{\mathfrak{B}}$ mit dem gleichen Anfangspunkt $\tilde{O}$, welcher Elementarbogen im $\mathfrak{R}^{(n-1)}$ und schlichtes Bild eines Teilbogens $\mathfrak{B}' = \widehat{OE'}$ von $\mathfrak{B}$ ist. Der Elementarbogen $\mathfrak{B}'$ im $\mathfrak{R}^{(n)}$ besitzt aber keine, zu $\mathfrak{x}_r$ parallele Maximalsekante $\mathfrak{M}'$; denn es würde sich $\mathfrak{M}'$ in die n-Sekante $\mathfrak{M}' \cap \mathfrak{H}$ von $\tilde{\mathfrak{B}}'$ projizieren im Widerspruch damit, daß $\tilde{\mathfrak{B}}'$ die Ordnung $(n - 1)$ besitzt. Andererseits hat die Gerade $\mathfrak{x}_r$ mit jeder der Hyperebenen $\mathfrak{M}'$ im $\mathfrak{P}^{(n)}$ mindestens einen Punkt gemeinsam. Daraus folgt die Beh.

4. Hilfssatz. Vor. Es sei $\mathfrak{B} = \widehat{OE}$ ein Elementarbogen im $\mathfrak{R}^{(n)}$. Ferner sei $\mathfrak{X} = (\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n)$ ein (vorderes) Schmiegkoordinatensystem an $\mathfrak{B}$ in O.

Beh. Es existiert ein beschränkter, abgeschlossener Teilbogen $\mathfrak{B}' = \widehat{OE'}$ von $\mathfrak{B}$ mit dem gleichen Anfangspunkt O wie $\mathfrak{B}$ von folgender Beschaffenheit:

Für jedes r mit $0 \leq r \leq n - 1$ hat *jede* $(r + 1)$-Sekante von $\mathfrak{B}'$ *im weiteren Sinne* mit dem $(n - r)$-dimensionalen Schmiegraum $\mathfrak{T}^{(n-r)}(O; \mathfrak{B}) = (\mathfrak{x}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{x}_{n-r})$ an $\mathfrak{B}$ in O einen (einzigen und zwar) *eigentlichen* Punkt gemeinsam.

---

[17]) Eine Gerade g heißt *parallel* zu einer Hyperebene $\mathfrak{H}$, wenn g keinen eigentlichen Punkt mit $\mathfrak{H}$ gemeinsam hat oder ganz in $\mathfrak{H}$ liegt.

[18]) Vgl. Haupt, Ein Satz über die reellen Raumkurven vierter Ordnung und seine Verallgemeinerung Math. Ann. **108** (1933), 141.

Bew. **(1)** Die Beh. ist (trivialerweise) richtig für $r = 0$, und jedes $n \geq 2$; ferner folgt die Beh. für $r = n - 1$ und jedes $n \geq 2$ aus dem Hilfssatz 3. Insbesondere ist also die Beh. schon gesichert für $n = 2$ (wobei $0 \leq r \leq 1$).

(2) Die Beh. sei schon bewiesen für jedes n mit $2 \leq n \leq N$. Wir betrachten $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{R}^{(N+1)}$ und projizieren $\mathfrak{B}$ parallel zur $\mathfrak{x}_1$-Achse in die Hyperebene $\mathfrak{H} = \mathfrak{x}_2 \cup \cdots \cup \mathfrak{x}_N \cup \mathfrak{x}_{N+1}$ des $\mathfrak{R}^{(N+1)}$. Das Bild $\tilde{\mathfrak{B}}$ von $\mathfrak{B}$ ist ein beschränkter Bogen von höchstens $(N+1)$-ter Ordnung im $\mathfrak{R}^{(N)} = \mathfrak{H}$; gemäß Hilfssatz 2., Beh. III., ist dabei $(\mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_{N+1})$ Schmiegkoordinatensystem an $\tilde{\mathfrak{B}}$ in $\tilde{O}$. Daher[18]) existiert ein, das Bild von E nicht enthaltender, Teilbogen $\tilde{\mathfrak{B}}'' = \widehat{\tilde{O}\tilde{E}''}$ von $\tilde{\mathfrak{B}}$, welcher ein (beschränkter) Elementarbogen in $\mathfrak{R}^{(N)}$ ist. Dann aber ist $\tilde{\mathfrak{B}}''$ *schlichtes* Bild eines beschränkten, abgeschlossenen, E nicht enthaltenden Teilbogens $\mathfrak{B}'' = \widehat{OE''}$ von $\mathfrak{B}$. Zufolge Hilfssatz 3 kann und soll dabei o. B. d. A. angenommen werden, daß jede Maximal-, also $(N+1)$-Sekante i. w. S. von $\mathfrak{B}''$ mit jeder $\mathfrak{x}_r$, insbesondere also mit $\mathfrak{x}_1$ genau einen eigentlichen Punkt gemeinsam hat.

(3) Wir betrachten jetzt $\mathfrak{B}''$ und zwar nur für $1 \leq r \leq N - 1 = (N+1) - 2$ (gemäß (1)). Da jede $(r+1)$-Sekante (i. w. S.) $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{B}''$ alsdann in einer Maximalsekante $\mathfrak{M}''$ von $\mathfrak{B}''$ enthalten ist, so hat $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{x}_1$ sicher keinen uneigentlichen Punkt gemeinsam. Mithin projiziert sich $\mathfrak{S}$ (bei Projektion parallel zu $\mathfrak{x}_1$) als $(r+1)$-Sekante $\tilde{\mathfrak{S}}$ von $\tilde{\mathfrak{B}}''$ nach $\mathfrak{H}$; dabei entsprechen die $\mathfrak{S}$ und $\tilde{\mathfrak{S}}$ einander ein-eindeutig. Nun hat (im $\mathfrak{P}^{(N+1)}$) aber $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{T}^{(N+1-r)} = \mathfrak{x}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{x}_{N+1-r}$ genau einen Punkt gemeinsam (Nr. 1. 2., Hilfssatz 2) und zwar einen uneigentlichen Punkt nur, wenn $\tilde{\mathfrak{S}}$ einen uneigentlichen Punkt von $\tilde{\mathfrak{T}}^{(N-r)} = \mathfrak{x}_2 \cup \cdots \cup \mathfrak{x}_{N+1-r}$ enthält. Nach Induktionsannahme ist aber in $\tilde{\mathfrak{B}}'' \subset \mathfrak{R}^{(N)}$ ein Teilbogen $\tilde{\mathfrak{B}}' = \widehat{\tilde{O}\tilde{E}}$ enthalten, dessen sämtliche $(r+1)$-Sekanten mit $1 \leq r \leq N - 1$ keine uneigentlichen Punkte von $\tilde{\mathfrak{T}}^{(N-r)}$ enthalten. Folglich genügt das Urbild $\mathfrak{B}'$ von $\tilde{\mathfrak{B}}'$ der Beh. unseres Satzes für $1 \leq r \leq N - 1$, w. z. b. w.

5. Hilfssatz. Vor. Es sei $\mathfrak{B} = \widehat{OE}$ ein Elementarbogen im $\mathfrak{R}^{(n)}$ mit $n \geq 3$ und $\mathfrak{X} = (\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n)$ ein (vorderes) Schmiegkoordinatensystem an $\mathfrak{B}$ in O.

Beh. Es existiert ein abgeschlossener beschränkter Teilbogen $\mathfrak{B}' = \widehat{OE'}$ mit dem gleichen Anfangspunkt O wie $\mathfrak{B}$ von folgender Eigenschaft:

(I) Jede $(n-1)$-Sekante *im weiteren Sinne* von $\mathfrak{B}'$ hat mit jeder 2-Ebene

$$\mathfrak{E}(j, k) = \mathfrak{x}_j \cup \mathfrak{x}_k, \quad 1 \leq j < k \leq n,$$

genau einen und zwar eigentlichen Punkt gemeinsam.

(II) Im Fall $j = 1$ ist jede $(n-2)$-Sekante *im engeren Sinne* von $\mathfrak{B}'$ fremd zu jeder $\mathfrak{E}(1, k)$ mit $2 \leq k \leq n$.

Anmerkung. Es gilt **(II)**, sobald **(I)** erfüllt ist.

Bew. **(1)** Gemäß Hilfssatz 3 kann und soll o. B. d. A. angenommen werden, daß keine der n-Sekanten von $\mathfrak{B}$ im weiteren Sinne, also erst recht keine der $(n-1)$-Sekanten, uneigentliche Punkte von irgendeiner der $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$ enthält. Der Durchschnitt jeder $(n-1)$-Sekante i. w. S. $\mathfrak{T}$ mit jeder der $\mathfrak{E}(j, k)$ ist daher im projektiven $\mathfrak{P}^{(n)}$ höchsten eindimensional (und nicht leer); denn nach der soeben über $\mathfrak{B}$ gemachten Annahme ist $\mathfrak{E}$ nicht in $\mathfrak{T}$ enthalten, woraus das Behauptete gemäß Nr. 1. 2., Hilfssatz 3. folgt.

(2) Unter der in **(1)** gemachten Annahme projizieren wir $\mathfrak{B}$ parallel zu $\mathfrak{x}_k$ in die Hyperebene $\mathfrak{H} = \mathfrak{x}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{x}_{k-1} \cup \mathfrak{x}_{k+1} \cup \cdots \cup \mathfrak{x}_n$. Das Bild $\tilde{\mathfrak{B}} = \widehat{\tilde{O}\tilde{E}}$ von $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{H}$ ist dann ein beschränkter Bogen höchstens n-ter Ordnung (im affinen, $(n-1)$-dimensionalen

Raume $\mathfrak{H}$). Daher existiert[18]) ein Teilbogen $\mathfrak{B}'' = \widehat{OE'}$ von $\mathfrak{B}$ mit dem Anfangspunkt O, welcher sich schlicht in einen *elementaren* Teilbogen $\tilde{\mathfrak{B}}'' = \widehat{\tilde{O}\tilde{E}''}$ von $\tilde{\mathfrak{B}}$ projiziert. Da keine n-Sekante $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{B}$ den uneigentlichen Punkt von $\mathfrak{x}_k$ enthält (vgl. **(1)**), so projizieren sich die $(n-1)$-Sekanten i. w. S. $\mathfrak{S}$ bzw. $\tilde{\mathfrak{S}}$ von $\mathfrak{B}''$ bzw. von $\tilde{\mathfrak{B}}''$ schlicht aufeinander. Nun ist aber $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{k-1}, \mathfrak{x}_{k+1}, \ldots, \mathfrak{x}_n$ Schmiegkoordinatensystem an $\tilde{\mathfrak{B}}''$ in $\tilde{O} = O$ (gemäß Hilfssatz 2); daher gibt es (gemäß Hilfssatz 3) einen Teilbogen $\tilde{\mathfrak{B}}' = \widehat{\tilde{O}\tilde{E}'}$ von $\tilde{\mathfrak{B}}''$, dessen sämtliche Maximalsekanten i. w. S., d. h. sämtliche $(n-1)$-Sekanten $\tilde{\mathfrak{S}}$ i. w. S., mit sämtlichen Achsen $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{k-1}, \mathfrak{x}_{k+1}, \ldots, \mathfrak{x}_n$ je genau einen eigentlichen Punkt gemeinsam haben. Aber dem eigentlichen Punkt $\tilde{\mathfrak{S}} \cap \mathfrak{x}_j$ entspricht (wegen der schlichten Abbildung von $\tilde{\mathfrak{S}}$ auf $\mathfrak{S}$) ein-eindeutig ein eigentlicher Punkt von $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{E}(j, k)$; denn die Projektion von $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{E}$ ist in $\tilde{\mathfrak{S}} \cap \mathfrak{x}_j = \tilde{\mathfrak{S}} \cap \mathfrak{E}$ enthalten. Damit ist die Beh. **(I)** bewiesen. — Beachtet man, daß $k > 1$ angenommen, ferner daß $\mathfrak{x}_1$ für $j = 1$ stets Tangente an $\tilde{\mathfrak{B}}$ in O ist und daß (gemäß Nr. 1. 2., Hilfssatz 1) jede $(n-2)$-Sekante i. e. S. von $\tilde{\mathfrak{B}}$ fremd ist zu $\mathfrak{x}_1$, so folgt auch die Fremdheit jeder $(n-2)$-Sekante i. e. S. von $\mathfrak{B}$ zu $\mathfrak{E}(1, k)$ und damit die Beh. **(II)**.

1. 4. Zur Abkürzung führen wir folgende Bezeichnung ein: Es sei $\mathfrak{B} = \widehat{OE}$ ein beschränkter Elementarbogen im $\mathfrak{R}^{(n)}$ und $\mathfrak{X} = (\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n)$ ein Schmiegkoordinaten-System an $\mathfrak{B}$ in O. Es werde nun $\mathfrak{B}$ als $(O, \mathfrak{X})$-kurz bezeichnet, wenn folgendes gilt: (A) Ist $n = 2$, so besitze $\mathfrak{B}$ keine zu $\mathfrak{x}_1$ oder zu $\mathfrak{x}_2$ parallele 2-Sekante. (B) Ist $n \geq 3$, so sollen die folgenden Durchschnitte je genau einen eigentlichen Punkt enthalten, nämlich die Durchschnitte (1) jeder Maximalsekante i. w. S. von $\mathfrak{B}$ mit jeder der Achsen; (2) jeder $(r+1)$-Sekante i. w. S. von $\mathfrak{B}$, wenn $0 \leq r \leq n-1$, mit dem $(n-r)$-dimensionalen Schmiegraum an $\mathfrak{B}$ in O; (3) jeder $(n-1)$-Sekante i. w. S. von $\mathfrak{B}$ mit jeder 2-Ebene $\mathfrak{x}_j \cup \mathfrak{x}_k$, $1 \leq j < k \leq n$.

Aus den vorstehenden Definitionen sowie aus Nr. 1. 3., Hilfssatz 3, 4 und 5 folgt:

1. Hilfssatz. (a) Jeder, den Punkt O als Anfangspunkt besitzende Teilbogen eines $(O, \mathfrak{X})$-kurzen Elementarbogens $\mathfrak{B} = \widehat{OE}$ im $\mathfrak{R}^{(n)}$, mit $2 \leq n$, ist selbst $(O, \mathfrak{X})$-kurz.

(b) Jeder Elementarbogen $\mathfrak{B} = \widehat{OE}$ im $\mathfrak{R}^{(n)}$, mit $2 \leq n$, besitzt einen $(O, \mathfrak{X})$-kurzen Teilbogen mit dem gleichen Anfangspunkt O wie $\mathfrak{B}$.

Weiter gilt:

2. Hilfssatz. Vor. Es sei $\mathfrak{B} = \widehat{OE}$ ein $(O, \mathfrak{X})$-kurzer Elementarbogen im $\mathfrak{R}^{(n)}$ mit $n \geq 3$. Ferner seien $Q_1, \ldots, Q_r$ differenzierbare, von O (und E) verschiedene Punkte von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{S} = ((Q_1, \ldots, Q_r))$ die von ihnen aufgespannte r-Sekante im engeren Sinne, wobei $1 \leq r \leq n-2$. Überdies sei $\mathfrak{B}$ abgeschlossen.

Beh. Die Projektion von $\mathfrak{B}$ aus $\mathfrak{S}$ in den $(n-r)$-dimensionalen Schmiegraum $\mathfrak{T}^{(n-r)}(O; \mathfrak{B}) = \mathfrak{x}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{x}_{n-r}$ an $\mathfrak{B}$ in O ist ein $(O, \tilde{\mathfrak{X}})$-kurzer Elementarbogen, wobei $\tilde{\mathfrak{X}} = (\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{n-r})$.

Bew. Gemäß Nr. 1. 2., Hilfssatz 1, ist $\mathfrak{S}$ fremd zu $\mathfrak{T}^{(n-r)}$; ferner ist, gemäß der Definition des $(O, \mathfrak{X})$-kurzen Bogens die Projektion $\tilde{\mathfrak{B}}$ von $\mathfrak{B}$ aus $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{T}^{(n-r)}$ beschränkt. Somit[15])[16]) ist $\tilde{\mathfrak{B}}$ ein beschränkter Elementarbogen in $\mathfrak{T}^{(n-r)}$, mit $\tilde{\mathfrak{X}} = (\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{n-r})$ als Schmiegkoordinatensystem in $\tilde{O} = O$. Weiter ist jede $(i+1)$-Sekante i. w. S. $\tilde{\mathfrak{S}}$ von $\tilde{\mathfrak{B}}$ Projektion einer $(i+1+r)$-Sekante i. w. S. von $\mathfrak{B}$, für $0 \leq i \leq n-r-1$. Daher hat $\tilde{\mathfrak{S}}$ mit $\mathfrak{T}^{(n-r-i)} \subset \mathfrak{T}^{(n-r)}$ genau einen und zwar eigentlichen Punkt gemeinsam und

ebenso jede Maximalsekante von $\tilde{\mathfrak{B}}$ mit jeder der Achsen $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{n-r}$; aus dem gleichen Grunde und wegen $\mathfrak{E}(j, k) = \mathfrak{x}_j \cup \mathfrak{x}_k \subset \mathfrak{T}^{(n-r)}$ für $1 \leq j < k \leq n-r$ hat jede $\big((n-r)-1\big)$-Sekante von $\tilde{\mathfrak{B}}$ mit jeder $\mathfrak{E}(j, k)$, $1 \leq j < k \leq n-r$, genau einen eigentlichen Punkt gemeinsam.

3. Hilfssatz. Vor. Es sei $\mathfrak{B} = \widehat{OE}$ ein $(O, \mathfrak{X})$-kurzer Elementarbogen im $\mathfrak{R}^{(n)}$ mit dem Schmiegkoordinatensystem $\mathfrak{X} = (\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n)$ in O.

Beh. **(I)** Die Menge aller derjenigen eigentlichen Punkte, welche die Durchschnitte der festen 2-Ebene $\mathfrak{E}(j, k)$ mit allen $(n-1)$-Sekanten $\mathfrak{T}$ im weiteren Sinne von $\mathfrak{B}$ sind, liegt (abgesehen von Punkt O) ganz im Innern eines derjenigen „Quadranten", welche von $\mathfrak{x}_j$ und $\mathfrak{x}_k$ in $\mathfrak{E}(j, k)$ gebildet werden.

(II) Die Projektion von $\big(\mathfrak{B} - (O)\big)$ in die 2-Ebene $\mathfrak{E}(j, k)$ aus irgendeiner durch lauter differenzierbare Punkte aufgespannten $(n-2)$-Sekante $\mathfrak{S}$ *im engeren Sinne* von $\mathfrak{B}$ ist entweder (*erster Fall*) ein beschränkter, streckenfreier Konvexbogen, welcher im Inneren eines festen von $\mathfrak{x}_j$ und $\mathfrak{x}_k$ in $\mathfrak{E}(j, k)$ gebildeten Quadranten liegt und dessen 2-Sekanten mit $\mathfrak{x}_j$ und $\mathfrak{x}_k$ je genau einen eigentlichen, von O verschiedenen Punkt gemeinsam haben; oder (*zweiter Fall*) ein zu $\mathfrak{x}_j$ und $\mathfrak{x}_k$ fremder, fester Punkt, durch welchen die Projektionen sämtlicher, $\mathfrak{S}$ enthaltender Maximalsekanten von $\mathfrak{B}$ gehen; jede dieser Projektionen ist eine, weder zu $\mathfrak{x}_j$ noch zu $\mathfrak{x}_k$ parallele Gerade.

(III) Wenn $j = 1$, so liegt stets der erste Fall von Beh. **(II)** vor; die Tangente des (Projektions-) Konvexbogens in O ist dann $\mathfrak{x}_1$.

Bew. Betr. Beh. **(I)**. Da $\mathfrak{B}$ als $(O, \mathfrak{X})$-kurz vorausgesetzt wird, ist $\mathfrak{T} \cap \mathfrak{E}(j, k)$ ein eigentlicher Punkt $P(\mathfrak{T})$. Läge nun $P(\mathfrak{T})$ beispielsweise auf $\mathfrak{x}_j$ und wäre zugleich $P(\mathfrak{T}) \neq O$, so müßte $\mathfrak{x}_j$ ganz in der durch $\mathfrak{T}$ und O aufgespannten Maximalsekante enthalten sein im Widerspruch damit, daß $\mathfrak{B}$ als $(O, \mathfrak{X})$-kurz vorausgesetzt ist. Weiter ist $P(\mathfrak{T})$ eine stetige Funktion von $\mathfrak{T}$ oder vielmehr des $(n-1)$-tupel $\mathfrak{t} = (Q_1, \ldots, Q_{n-1})$, durch dessen Punkte $\mathfrak{T}$ aufgespannt wird; und da der Raum aller $\mathfrak{t}$ als zusammenhängend angenommen werden kann[19]), liegt die der Menge aller $\mathfrak{T}$ entsprechende Menge aller $P(\mathfrak{T}) \neq O$ ganz in einem der vier Gebiete, in welche $\mathfrak{E}(j, k)$ durch $\mathfrak{x}_j$ und $\mathfrak{x}_k$ zerlegt wird.

Betr. Beh. **(II)**. Entweder ist $\mathfrak{S}$ fremd zu $\mathfrak{E}(j, k)$; dann ist die Projektion von $\mathfrak{B}$ aus $\mathfrak{S}$ ein Konvexbogen $\mathfrak{K}$, welcher (gemäß Beh. **(I)**) beschränkt ist und, bis auf O, ganz in einem der Quadranten von $\mathfrak{E}(j, k)$ liegt. Es enthält $\mathfrak{K}$ keine Strecken[15]). Wäre schließlich eine Maximalsekante von $\mathfrak{K}$ parallel zu $\mathfrak{x}_j$ oder $\mathfrak{x}_k$, so auch eine Maximalsekante von $\mathfrak{B}$ entgegen der Voraussetzung. — Oder es ist $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{E}(j, k)$ nicht leer. Aber dieser Durchschnitt ist beschränkt und höchstens einpunktig; denn jede, $\mathfrak{S}$ enthaltende $(n-1)$-Sekante $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{B}$ enthält (vgl. Bew. betr. Beh. **(I)**) genau einen eigentlichen Punkt $P(\mathfrak{T})$ von $\mathfrak{E}$. Für $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{E}(j, k) \neq \mathfrak{O}$ und $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{T}$ ist mithin $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{E}(j, k) = \mathfrak{T} \cap \mathfrak{E}(j, k) = P(\mathfrak{T})$ konstant für alle $\mathfrak{S}$ enthaltenden $\mathfrak{T}$. Die $\mathfrak{S}$ enthaltenden Maximalsekanten projizieren sich daher als Geraden durch $P(\mathfrak{T})$, deren jede mit $\mathfrak{x}_j$ und $\mathfrak{x}_k$ nur eigentliche Punkte gemeinsam hat, weil anderenfalls $\mathfrak{B}$ nicht $(O, \mathfrak{X})$-kurz wäre.

Betr. Beh. **(III)**. Diese folgt (für $j = 1$) aus Nr. 1. 3., Hilfssatz 5., Beh. **(II)**.

4. Hilfssatz. Vor. Es sei $\mathfrak{B} = \widehat{OE}$ ein Elementarbogen in einer (affinen) 2-Ebene $\mathfrak{E}$ mit $\mathfrak{X} = (\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ als Schmiegkoordinatensystem in O.

Beh. Existiert keine zu $\mathfrak{y}$ parallele Maximalsekante im weiteren Sinne von $\mathfrak{B}$, so ist $\mathfrak{B}$ sogar $(O, \mathfrak{X})$-kurz.

---

[19]) Erklärt man als eine Umgebung von $\mathfrak{t}$ die Menge aller $\mathfrak{t}$, deren Punkte in zueinander fremden Umgebungen der $Q_1, \ldots, Q_{n-1}$ auf $\mathfrak{B}$ liegen, so ist der Raum der $\mathfrak{t}$ topologisch und damit der Begriff „zusammenhängend" definiert.

Bew. Da $\mathfrak{B}-(O)$ fremd sein muß zur $\mathfrak{y}$-Achse, so liegt $\mathfrak{B}$ bis auf O ganz im ersten $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$-Quadranten. Existierte nun eine zu $\mathfrak{x}$ parallele 2-Sekante von $\mathfrak{B}$, so auch eine zu $\mathfrak{x}$ parallele Stützgerade mit etwa dem Stützpunkt E'. Dann besäße aber $\mathfrak{B}' = \widehat{OE'}$ eine zu $\mathfrak{y}$ parallele Stützgerade, folglich $\mathfrak{y}$-parallele Maximalsekanten.

§ 2. Windungsmonotonie der Elementarbogen.

2. 1. Sind $Q_1, \ldots, Q_n$ irgend n verschiedene Punkte des Elementarbogens $\mathfrak{B} = \widehat{OE}$ im $\mathfrak{R}^{(n)}$, ist ferner $\mathfrak{q} = (Q_1, \ldots, Q_n)$, so sagen wir, es liege $\mathfrak{q}' = (Q_1', \ldots, Q_n')$ auf $\mathfrak{B}$ näher an O bzw. nicht weiter von O (entfernt) als $\mathfrak{q}'' = (Q_1'', \ldots, Q_n'')$, wenn Q_ν näher an O bzw. nicht weiter von O (entfernt) liegt als Q_ν' für *jedes* $\nu = 1, \ldots, n$, in Zeichen $\mathfrak{q}'' < \mathfrak{q}'$ bzw. $\mathfrak{q}'' \leq \mathfrak{q}'$. Die Eigenschaft „näher" bzw. „nicht weiter" ist transitiv und die Menge aller $\mathfrak{q}$ bildet bezüglich $<$ bzw. $\leq$ ein gerichtetes System[20]). Für dieses System ist dann der Begriff der Konvergenz gegen O (in Zeichen $\mathfrak{q} \to O$) sowie der monotonen Änderung von $\mathfrak{q}$ erklärt[20]).

Mit Benützung dieser Bezeichnungen läßt sich die Windungsmonotonie *zunächst für* $n = 2$ so aussprechen:

Hilfssatz. Vor. (I) Es sei $\mathfrak{X} = (\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ ein beliebiges, schiefwinkliges Koordinatensystem im $\mathfrak{R}^{(2)}$ mit dem Nullpunkt O.

(II) Ferner sei $\mathfrak{B} = \widehat{OE}$ ein in der Halbebene $\mathfrak{y} \geq 0$ gelegener, beschränkter Elementarbogen (also Konvexbogen), welcher in O die positive $\mathfrak{x}$-Halbachse als Halbtangente und keine zur $\mathfrak{y}$-Achse parallele Maximalsekante besitzt, also (Nr. 1. 4., Hilfssatz 4) $(O, \mathfrak{X})$-kurz ist.

Beh. (a) Die Abschnitte c_1 bzw. c_2 einer jeden Maximalsekante im engeren Sinne $\mathfrak{Q} = ((Q_1, Q_2))$ von $\mathfrak{B}$ auf der $\mathfrak{x}$- bzw. auf der $\mathfrak{y}$-Achse sind positiv bzw. negativ und nehmen nicht zu, wenn $\mathfrak{q} = (Q_1, Q_2)$ sich monoton auf $\mathfrak{B}$ dem Punkte O nähert. Für $\mathfrak{q} \to O$ ist dabei $c_1 \to 0$ und $c_2 \to 0$. Diese Monotonie der c_ν bleibt natürlich bei Umorientierung von $\mathfrak{x}$ oder $\mathfrak{y}$ erhalten.

(b) Die „Steigung" $s_1 = c_2 : c_1$ von $\mathfrak{Q}$ relativ zum Koordinatensystem $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ ändert sich ebenfalls monoton mit $\mathfrak{q}$ und besitzt für $\mathfrak{q} \to O$ den Limes Null.

Bew. Die Beh. folgen unmittelbar aus der Konvexität von $\mathfrak{B}$.

Anmerkung. Der Hilfssatz bleibt richtig, auch wenn $\mathfrak{B}$ Strecken enthält.

2. 2. Die Verallgemeinerung des vorstehenden Hilfssatzes auf den $\mathfrak{R}^{(n)}$ für $n \geq 3$ führt nun zum

Satz. Windungsmonotonie der Maximalsekanten:

Vor. (I) Es sei $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$ ein beliebiges (schiefwinkliges) Koordinatensystem im $\mathfrak{R}^{(n)}$, wobei $n \geq 2$, mit dem Nullpunkt O.

(II) Ferner sei $\mathfrak{B} = \widehat{OE}$ ein Elementarbogen, welcher $\mathfrak{X} = (\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n)$ als (vorderes) Schmiegkoordinatensystem in O besitzt, also insbesondere die positive $\mathfrak{x}_1$-Halbachse zur Halbtangenten in O hat. Überdies sei $\mathfrak{B}$ ein $(O, \mathfrak{X})$-kurzer Elementarbogen $(n \geq 2)$.

Beh. Ist $\mathfrak{Q} = (\mathfrak{q}) = ((Q_1, \ldots, Q_n))$ eine Maximalsekante *im engeren Sinne* von $\mathfrak{B}$ und ist c_ν der (mit Vorzeichen versehene) Achsenabschnitt von $\mathfrak{Q}$ auf $\mathfrak{x}_\nu$, $\nu = 1, \ldots, n$, so gilt:

(a) Es ist $c_1 > 0$ und $s_\nu = c_{\nu+1} : c_\nu < 0$, $\nu = 1, \ldots, n-1$.

---

[20]) Vgl. Haupt-Aumann-Pauc, a. a. O. [7]), Nr. 6. 1. 5.

(b) Es konvergiert sowohl c_ν als $s_\nu = c_{\nu+1} : c_\nu$ *monoton* gegen Null, falls $\mathfrak{q}$ auf $\mathfrak{B}$ monoton gegen Null konvergiert[21]).

Bew. Die Beh. ist richtig für $n = 2$ (gemäß dem Hilfssatz in Nr. 2. 1.). Wir wenden vollständige Induktion an, legen also die Induktionsannahme zugrunde, es sei die Behauptung schon bewiesen für $2 \leq n \leq N$. Die Beh. für $M = N + 1$ ergibt sich dann folgendermaßen:

(A) O. B. d. A. können wir die Q_ν, $\nu = 1, \ldots, n$, sämtlich als gewöhnlich-differenzierbare Punkte von $\mathfrak{B}$ voraussetzen; denn die differenzierbaren Punkte liegen dicht auf $\mathfrak{B}$ und da $\mathfrak{Q}$ bzw. c_ν stetige Funktion von $\mathfrak{q}$ ist, erweist sich die Beh. für beliebige Q_ν als richtig, falls sie für differenzierbare Q_ν bewiesen ist. Ferner genügt es, die Monotonie der c_ν und s_ν für den Fall zu beweisen, daß nur ein einziger der Punkte Q_ν sich monoton ändert, während die übrigen Q_μ, $\mu \neq \nu$, festgehalten werden. Denn jede monotone Änderung von $\mathfrak{q} = (R_1, \ldots, R_n)$ in Richtung gegen O läßt sich dadurch erzeugen, daß man zuerst den am nächsten bei O gelegenen der Punkte R_ν, also etwa R_1, unter Festhaltung der übrigen Punkte, also der $R_2, \ldots, R_n$, monoton in seine neue (nicht weiter als R_1 von O entfernte) Lage R_1' überführt, sodann bei festem $R_1', R_3, \ldots, R_n$ in gleicher Weise mit dem (zwischen R_1' und $R_3, \ldots, R_n$ gelegenen) Punkte R_2 verfährt, usw.

(B) Wir zeigen zunächst, daß die *Behauptung richtig ist für* c_ν bzw. *für* s_ν, wenn $\nu = 1, \ldots, N = M - 1$ bzw. wenn $\nu = 1, \ldots, M - 2$. In der Tat: Projizieren wir $\mathfrak{B}$ aus einem der (differenzierbaren) Punkte $Q_t \in \mathfrak{B}$, $t = 1, \ldots, M$, in die Schmieghyperebene $\mathfrak{R}^{(M-1)} = \mathfrak{T}^{(N)}(O; \mathfrak{B})$, so ist[11]) $\tilde{\mathfrak{X}} = (\mathfrak{x}_1 \ldots, \mathfrak{x}_{M-1})$ Schmiegkoordinatensystem der Projektion $\tilde{\mathfrak{B}}$ von $\mathfrak{B}$ im Punkte $\tilde{O} = O$ und es ist $\tilde{\mathfrak{B}}$ ein $(\tilde{O}, \tilde{\mathfrak{X}})$-kurzer *Elementarbogen* im $\mathfrak{R}^{(M-1)}$ (gemäß Nr. 1. 4., Hilfssatz 2); überdies ist $\tilde{\mathfrak{Q}} = \mathfrak{Q} \cap \mathfrak{R}^{(M-1)}$ die Projektion von $\mathfrak{Q}$ in $\mathfrak{R}^{(M-1)}$ und zwar mit $\tilde{\mathfrak{Q}}$ als Maximalsekante im engeren Sinne von $\tilde{\mathfrak{B}}$. Der Achsenabschnitt $\tilde{c}_\nu$ von $\tilde{\mathfrak{Q}}$ auf $\tilde{\mathfrak{x}}_\nu = \mathfrak{x}_\nu$ ist gleich c_ν für $\nu = 1, \ldots, M - 1$. Da nun einer (stetigen) monotonen Änderung von Q_μ für $\mu \neq t$ auf $\mathfrak{B}$ eine (stetige) monotone Änderung des Bildpunktes $\tilde{Q}_\mu$ von Q_μ auf $\tilde{\mathfrak{B}}$ entspricht und umgekehrt (weil ja Q_μ und $\tilde{Q}_\mu$ einander topologisch entsprechen), so gilt zufolge der Induktionsannahme der Monotoniesatz zunächst für die $(M-1)$ ersten Achsenabschnitte $c_1, \ldots, c_{M-1}$ von $\mathfrak{Q}$ bzw. für die zugehörigen $s_1, \ldots, s_{M-2}$.

(C) Daß die Beh. auch für c_M bzw. für s_{M-1} richtig ist, kann man so einsehen:

(C, 1) Es geht c_M *monoton gegen Null*, wenn $\mathfrak{q}$ monoton gegen O geht.

Bew. Man halte beliebige $(M - 2)$ unter den Punkten $Q_1 \ldots, Q_M$ fest, etwa $Q_1', \ldots, Q_{M-2}'$ und projiziere $\mathfrak{B}$ von der $(M - 2)$-Sekante $\mathfrak{T} = ((Q_1', \ldots, Q_{M-2}'))$ aus auf die 2-Ebene $\mathfrak{E}(1, M) = \mathfrak{x}_1 \cup \mathfrak{x}_M$. Dann ist (gemäß Nr. 1, 4., Hilfssatz 3 und 4) das Bild $\tilde{\mathfrak{B}}$ von $\mathfrak{B}$ ein Konvexbogen, welcher $(\tilde{O}, \tilde{\mathfrak{X}})$-kurz ist bezüglich $\tilde{O} = O$ und $\tilde{\mathfrak{X}} = (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_M)$ und welcher die $+\mathfrak{x}_1$-(Halb-) Achse als Halbtangente in $\tilde{O}$ besitzt. Zufolge des Hilfssatzes in Nr. 2. 1. geht daher c_M monoton gegen Null, wenn einer der beiden noch übrigen Punkte Q_{M-1}'; Q_M' monoton in Richtung gegen O sich ändert, und der andere festbleibt. Daraus folgt die Beh.

(C, 2) Es ist $s_{M-1} < 0$.

Bew. Für *alle* Maximalsekanten $\mathfrak{Q}$ i. e. S. von $\mathfrak{B}$ besitzt (gemäß **(B)** und **(C, 1)**) der Achsenabschnitt c_ν das nämliche Vorzeichen (je für $\nu = 1, \ldots, M$). In bekannter Weise[19]) kann nämlich die Menge der n-tupel $\mathfrak{q} = (Q_1, \ldots, Q_n)$ i. e. S. zu einem zusammenhängenden topologischen Raum gemacht werden; und da jedes c_ν eine eindeutige stetige Funktion von $\mathfrak{q}$ ist, ist so der Wertbereich von c_ν ebenfalls zusammenhängend,

[21]) Liegt also $\mathfrak{q}'$ nicht näher an O als $\mathfrak{q}''$, so liegt der Schnittpunkt von $\mathfrak{Q}' = (\mathfrak{q}')$ mit $\mathfrak{x}_\nu$ nicht näher an O als der Schnittpunkt von $\mathfrak{Q}'' = (\mathfrak{q}'')$ mit $\mathfrak{x}_\nu$ für $\nu = 1, \ldots, n$.

also eine (offene) O nicht enthaltende Strecke, woraus die Behauptung folgt. Es genügt daher die Existenz einer (einzigen) Maximalsekante $\mathfrak{Q}$ mit $c_{M-1}:c_M < 0$ zu beweisen. Zu diesem Zweck betrachten wir eine Hyperebene $\mathfrak{H}$ im $\mathfrak{R}^{(n)}$ durch den $(M-2)$-dimensionalen Schmiegraum $\mathfrak{T}^{(M-2)}(O;\mathfrak{B})$ und durch einen von O verschiedenen Punkt $Q \in \mathfrak{B}$. Gemäß der Definition von $\mathfrak{x}_M$ hat die 2-Ebene $\mathfrak{E}(M-1, M) = \mathfrak{x}_{M-1} \cup \mathfrak{x}_M$ mit $\mathfrak{H}$ eine Gerade $\mathfrak{G}$ gemeinsam, welche entsprechend der Orientierung von $\mathfrak{x}_{M-1}$ sowie von $\mathfrak{x}_M$ im ersten und dritten Quadranten des Koordinatensystems $\mathfrak{x}_{M-1}$, $\mathfrak{x}_M$ verläuft, falls Q nahe genug bei O liegt, und es fällt $\mathfrak{G}$ weder mit $\mathfrak{x}_{M-1}$ noch mit $\mathfrak{x}_M$ zusammen (weil eine Umgebung von O auf $\mathfrak{B}$ bis auf O fremd ist zu $\mathfrak{T}^{(M-1)}$ und zu $\mathfrak{T}^{(M-2)} \cup \mathfrak{x}_M$). Nun ist aber $\mathfrak{H}$ jedenfalls Limes von Maximalsekanten i. e. S. $\mathfrak{Q}$ von $\mathfrak{B}$ durch Q, weil $\mathfrak{T}^{(M-2)}$ Limes von $(M-1)$-Sekanten i. e. S. ist. Jede derartige, zu $\mathfrak{H}$ hinreichend benachbarte $\mathfrak{Q}$ hat aber mit $\mathfrak{E}(M-1, M)$ ebenfalls eine Gerade $\mathfrak{G}'$ gemeinsam (gemäß Nr. 1. 2., Hilfssatz 3); diese ist daher beliebig benachbart zu $\mathfrak{G}$ und gehört somit bezüglich ihrer Richtung zum ersten und dritten Quadranten. Folglich besitzen die Achsenabschnitte von $\mathfrak{G}'$, d. h. die Achsenabschnitte von $\mathfrak{Q}$ auf $\mathfrak{x}_{M-1}$ und $\mathfrak{x}_M$, entgegengesetzte Vorzeichen.

(C, 3) *Es geht s_{M-1} gegen Null, wenn $\mathfrak{q}$ gegen O geht.*

Bew. Wegen $\mathfrak{Q} = (\mathfrak{q}) \to \mathfrak{T}^{(M-1)}(O;\mathfrak{B})$ für $\mathfrak{q} \to 0$ gilt auch

$$\mathfrak{G}' = \mathfrak{Q} \cap \mathfrak{E}(M-1, M) \to \mathfrak{x}_{M-1} = \mathfrak{T}^{(M-1)} \cap \mathfrak{E}(M-1, M),$$

falls $\mathfrak{q} \to O$. Folglich ist $s_{M-1} \to 0$ für $\mathfrak{q} \to O$.

(C, 4) *Es ändert sich s_{M-1} monoton mit $\mathfrak{q}$.*

Bew. **(C, 4. 1)** Man braucht wieder nur solche Änderungen von $\mathfrak{q}$ zu betrachten, bei welchen sich ein einziger Punkt von $\mathfrak{q}$ monoton auf $\mathfrak{B}$ ändert. Wir projizieren dementsprechend $\mathfrak{B}$ etwa aus $\mathfrak{T} = ((Q_1, \ldots, Q_{M-2}))$ in $\mathfrak{E}(M-1, M)$. Gemäß Nr. 1. 4., Hilfssatz 3, Beh. (II), haben wir dann zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Fall. Das Bild $\tilde{\mathfrak{B}}$ von $\mathfrak{B}$ ist ein Konvexbogen, welcher keine zu $\mathfrak{x}_{M-1}$ oder zu $\mathfrak{x}_M$ parallele Maximalsekante und welcher O als Anfangspunkt besitzt. Wegen $c_{M-1}: c_M < 0$ liegt dann $\tilde{\mathfrak{B}}$, abgesehen von O, ganz im Innern des 1. oder 3. Quadranten des Koordinatensystems $(\mathfrak{x}_{M-1}, \mathfrak{x}_M)$; es liege $\tilde{\mathfrak{B}}$ etwa im 1. Quadranten. Nun ist $\tilde{\mathfrak{B}}$ relativ zu $\mathfrak{x}_{M-1}$ entweder nach oben oder nach unten konvex; je nachdem haben wir dann entweder $c_M > 0$ oder $c_M < 0$. Da aber c_M für alle Maximalsekanten i. e. S. von $\mathfrak{B}$ das gleiche Vorzeichen besitzt, so ist $\tilde{\mathfrak{B}}$ für jedes beliebige, unserem 1. Fall zugehörige Projektionszentrum $\mathfrak{T}$ im gleichen Sinne konvex, wenn $\tilde{\mathfrak{B}}$ für jedes solche Projektionszentrum im 1. Quadranten liegt; dies ist aber gemäß Nr. 1. 4., Hilfssatz 3, Beh. (I) der Fall. Je nachdem dann $c_M > 0$ oder $c_M < 0$ ist, nimmt $|s_{M-1}|$ mit abnehmendem $|c_M|$ nicht ab oder nicht zu. Für den Fall, daß $\tilde{\mathfrak{B}}$ im 3. Quadranten liegt, gilt Entsprechendes.

2. Fall. Das Bild $\tilde{\mathfrak{B}}$ von $\mathfrak{B}$ ist ein Punkt C im Innern eines der vier, von $\mathfrak{x}_{M-1}$ und $\mathfrak{x}_M$ in $\mathfrak{E}(M-1, M)$ gebildeten Quadranten; und die Bilder der $\mathfrak{S}$ enthaltenden Maximalsekanten i. e. S. von $\mathfrak{B}$ sind Geraden durch C (gemäß Nr. 1. 4., Hilfssatz 3, Beh. (II)). Wie im 1. Fall folgt, daß C entweder im 1. oder im 3. Quadranten liegen muß und daß alle möglichen C im gleichen Quadranten liegen, welcher überdies der gleiche ist wie der die sämtlichen $\tilde{\mathfrak{B}}$ des 1. Falles enthaltende (soweit der 1. und 2. Fall für $\mathfrak{B}$ gleichzeitig auftreten). Je nachdem $c_M > 0$ oder $c_M < 0$ nimmt dann wieder $|s_{M-1}|$ nicht ab oder nicht zu mit abnehmendem $|c_M|$. Entsprechend für den Fall, daß C im 3. Quadranten liegt.

(C, 4. 2) Es mögen die $\tilde{\mathfrak{B}}$ und C sämtlich etwa im 1. Quadranten liegen. Es sei $\mathfrak{Q} = (\mathfrak{q})$ eine Maximalsekante i. e. S. von $\mathfrak{B}$. Bei monotoner Annäherung von $\mathfrak{q}$ an O

nimmt $|c_M|$ monoton ab (gemäß **(C, 1)**). Wäre nun $c_M > 0$, so würde $|s_{M-1}|$ (gemäß **(C, 4. 1)**) niemals abnehmen, wenn $\mathfrak{q}$ monoton gegen Null geht, könnte also für $\mathfrak{q} \to O$ nicht gegen Null gehen, im Widerspruch mit **(C, 3)**. Daher muß $c_M < 0$ sein und es muß s_{M-1} monoton gegen Null gehen, wenn $\mathfrak{q}$ monoton gegen O konvergiert. Liegen die $\tilde{\mathfrak{B}}$ und C sämtlich im 3. Quadranten; so ergibt sich entsprechend, daß $c_M > 0$ ist und daß s_{M-1} monoton gegen Null geht mit monoton gegen O gehendem $\mathfrak{q}$.

2. 3. Wie schon in der Einleitung angegeben, soll aus dem Satz über die Windungsmonotonie noch der sogenannte Halbspurensatz gefolgert werden. Wir bezeichnen dabei als (j-dimensionale) Spur $\mathfrak{S}^{(j)} = \mathfrak{S}^{(j)}(\mathfrak{Q})$ bzw. Halbspur $\mathfrak{S}\mathfrak{h}^{(j)} = \mathfrak{S}\mathfrak{h}^{(j)}(\mathfrak{Q})$ einer Maximalsekante $\mathfrak{Q} = (\mathfrak{q})$ von $\mathfrak{B}$ den Durchschnitt von $\mathfrak{Q}$ mit dem $(j+1)$-dimensionalen Tangentialschmieg- bzw. Tangentialschmieghalbraum $\mathfrak{T}^{(j+1)}$ bzw. $\mathfrak{T}\mathfrak{h}^{(j+1)}$ an $\mathfrak{B}$ in O, also $\mathfrak{S}^{(j)} = \mathfrak{Q} \cap \mathfrak{T}^{(j+1)}$ bzw. $\mathfrak{S}\mathfrak{h}^{(j)} = \mathfrak{Q} \cap \mathfrak{T}\mathfrak{h}^{(j+1)}$. Wir sagen ferner, es konvergiere $\mathfrak{S}\mathfrak{h}^{(j)}$ gegen $\mathfrak{T}\mathfrak{h}^{(j)}$, wenn die Spur $\mathfrak{S}^{(j-1)} = \mathfrak{S}\mathfrak{h}^{(j)} \cap \mathfrak{T}^{(j)}$ gegen $\mathfrak{T}^{(j-1)}$ konvergiert[22]) und wenn jeder Punkt von $\mathfrak{T}\mathfrak{h}^{(j)}$ Häufungspunkt von Punkten aus $\mathfrak{S}\mathfrak{h}^{(j)}$ ist; ferner bezeichnen wir diese Konvergenz als monoton, wenn der (absolut kleinste) Winkel α_{j-1} der Normalen von $\mathfrak{S}^{(j-1)}$ und $\mathfrak{T}^{(j-1)}$ in $\mathfrak{T}^{(j)}$ monoton gegen Null konvergiert. Bei diesen Definitionen wird $0 \leq j \leq n-1$ angenommen, soweit nicht $j-1$ auftritt; für $j = 1$ ist als $\alpha_{j-1} = \alpha_0$ die Entfernung von $\mathfrak{S}^{(0)}$ und $\mathfrak{T}^{(0)}$ in $\mathfrak{T}^{(1)}$ zu nehmen; α_{-1} wird nicht erklärt. Mit Benutzung dieser Bezeichnungen haben wir den

Satz. Halbspurensatz. Vor. *Es sei $\mathfrak{B}$ ein Elementarbogen im affinen $\mathfrak{R}^{(n)}$ mit dem Anfangspunkt O und dem j-dimensionalen Schmieghalbraum $\mathfrak{T}\mathfrak{h}^{(j)}$ an $\mathfrak{B}$ in O; $j = 1, \ldots, n$. Ferner sei $\mathfrak{Q} = (\mathfrak{q})$ eine Maximalsekante von $\mathfrak{B}$.*

Beh. *Konvergiert $\mathfrak{q}$ monoton gegen O, so konvergiert die j-dimensionale Halbspur monoton gegen den j-dimensionalen Tangentialschmieghalbraum an $\mathfrak{B}$ in O; $j = 1, \ldots, n-1$.*

Bew. (1) O. B. d. A. kann $\mathfrak{Q}$ als Maximalsekante i. e. S. angenommen werden. Es gibt ein Schmiegkoordinatensystem an $\mathfrak{B}$ in O, welches orthogonal ist; dieses legen wir zugrunde. Ist dann $-1 + c_1^{-1} x_1 + \cdots + c_n^{-1} x_n = 0$ die Gleichung von $\mathfrak{Q}$, wobei $c_1, \ldots, c_n$ die Achsenabschnitte sind, so wird $\mathfrak{S}^{(r)}$ gegeben durch die Gleichungen

$$S_r(x) = -1 + c_1^{-1} x_1 + \cdots + c_{r+1}^{-1} x_{r+1} = 0, \; x_{r+2} = \cdots = x_n = 0;$$

für $\mathfrak{S}\mathfrak{h}^{(r)}$ tritt noch die Ungleichung $x_{r+1} \geq 0$ hinzu, $r = 0, 1, \ldots, n-1$. Andererseits ist $\mathfrak{T}^{(r)}$ gegeben durch die Gleichungen $x_{r+1} = \cdots = x_n = 0$, mit im übrigen beliebigen $x_1, \ldots, x_r$; für $\mathfrak{T}\mathfrak{h}^{(r)}$ tritt noch $x_r \geq 0$ hinzu.

(2) Für jedes $\mathfrak{q}$, welches hinreichend benachbart ist zu O, gilt $c_1 > 0$, $s_\nu = c_{\nu+1} : c_\nu < 0$. Ferner ist $c_\nu \to 0$ und $s_\nu \to 0$ monoton, falls $\mathfrak{q}$ monoton gegen O geht (gemäß Nr. 2. 2.).

(3) Gemäß (1) und (2) konvergiert $\mathfrak{S}^{(j-1)}$ monoton gegen $\mathfrak{T}^{(j-1)}$; denn das Gleichungssystem $S_{j-1}(x) : {}_+(c_1^{-2} + \cdots + c_j^{-2})^{\frac{1}{2}} = 0$, $x_{j+1} = \cdots = x_n = 0$, konvergiert gegen $x_j = x_{j+1} = \cdots = x_n = 0$ und

$$\cos \alpha_{j-1} = c_j^{-1} : {}_+(c_1^{-2} + \cdots + c_j^{-2})^{\frac{1}{2}} = 1 : {}_+(s_{j-1}^2 s_{j-2}^2 \cdots s_1^2 + s_{j-1}^2 \ldots s_2^2 + \cdots + s_{j-1}^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$$

monoton gegen 1, wenn $\mathfrak{q}$ monoton gegen O konvergiert. Ist ferner $P = (p_1, \ldots, p_j, 0, \cdots, 0)$ irgendein (festgehaltener) beliebiger Punkt von $\mathfrak{T}\mathfrak{h}^{(j)}$ mit $p_j > 0$, so gilt für den Punkt $X = (p_1, \ldots, p_j, x_{j+1}, 0, \cdots, 0)$ von $\mathfrak{S}^{(j)}$

$$x_{j+1} = c_{j+1} - s_j p_j [1 + (s_{j-1} p_{j-1} + s_{j-1} s_{j-2} p_{j-2} + \cdots + s_{j-1} \cdots s_1 p_1) p_j^{-1}];$$

für alle zu O hinreichend benachbarten $\mathfrak{q}$ ist daher (gemäß (2)) $x_{j+1} = -s_j p_j (1 + \eta)$ mit beliebig kleinem $|\eta|$, also $x_{j+1} > 0$; und es gilt $x_{j+1} \to 0$ für $\mathfrak{q} \to O$, mithin $X \to P$. Daraus folgt die monotone Konvergenz von $\mathfrak{S}\mathfrak{h}^{(j)}$ gegen $\mathfrak{T}\mathfrak{h}^{(j)}$; w.z.b.w.

---

[22]) Es handelt sich hier um topologische Konvergenz im Raume aller $(j-1)$-Ebenen des $\mathfrak{R}^{(n)}$, vgl. [7]).

2. 4. Der Satz von der *Windungsmonotonie* (Nr. 2. 2.) war nur ausgesprochen worden für *hinreichend kurze Elementarbogen.* Diese Einschränkung entspricht der Natur der Sache. Die Monotonieeigenschaft der Maximalsekanten $\mathfrak{M}$ eines Elementarbogens $\mathfrak{B}$ ist nämlich im allgemeinen nur lokal, genauer: die Eigenschaft, daß die Quotienten aufeinanderfolgender Achsenabschnitte von $\mathfrak{M}$ sich monoton ändern bei monotoner Änderung der Schnittpunkte von $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{B}$. Dies zeigt im $\mathfrak{R}_3$ das folgende *Beispiel* einer algebraischen Raumkurve $\mathfrak{C}$ von 3. Ordnung mit genau einem reellen uneigentlichen Punkt: $x = t\,N^{-1}$, $y = t^2\,N^{-1}$, $z = t^3\,N^{-1}$ mit $N = t^2 + c^2$, $c > 0$.

Es genügt, speziell nur die Schmiegebenen $\mathfrak{M}'$ von $\mathfrak{B}$ (also Grenzlagen von Maximalsekanten $\mathfrak{M}$) zu betrachten; denn die Monotonie der Achsenabschnittsquotienten gilt, wenn nicht für $\mathfrak{M}'$, erst recht nicht für $\mathfrak{M}$. Nun ist

$$\begin{aligned} N\,x &= t,\ N\,x' = -2\,t\,x + 1,\ N\,x'' = -4\,t\,x' - 2\,x;\\ N\,y &= t^2,\ N\,y' = -2\,t\,y + 2\,t,\ N\,y'' = -4\,t\,y' - 2\,y + 2;\\ N\,z &= t^3,\ N\,z' = -2\,t\,z + 3\,t^2,\ N\,z'' = -4\,t\,z' - 2\,z + 6\,t. \end{aligned}$$

Man erhält daraus als Gleichung von $\mathfrak{M}'$ in laufenden Koordinaten X, Y, Z folgendes:

$$c^2X + t(t^2 - 3\,c^2)\,Y + 3\,c^2\,t^2Z = t^3.$$

Das Koordinatensystem x, y, z bzw. X, Y, Z ist aber ein Schmiegkoordinatensystem von $\mathfrak{C}$ im Punkte (0, 0, 0), d. h. für $t = 0$; denn es ist $Y = Z = 0$ die Gleichung der Tangente und $Z = 0$ die der Schmiegebene an $\mathfrak{C}$ für $t = 0$. Die Achsenabschnitte x_0, y_0, z_0 von $\mathfrak{M}'$ bezüglich dieses Schmiegkoordinatensystems sind $x_0 = t^3 : c^2$, $y_0 = t^2 : (t^2 - 3\,c^2)$, $z_0 = t : 3c^2$.

Demnach steigen x_0 und z_0 für $-\infty < t < +\infty$ (und sind dort endlich). Hingegen steigt bzw. fällt y_0 für $-\infty < t < 0$ bzw. für $0 < t < +\infty$; es ist y_0 endlich für $t \neq \pm\sqrt{3}\,c$. Die Quotienten von aufeinanderfolgenden Achsenabschnitten sind

$$s_1 = y_0 : x_0 = 3\,c^2\,t : (t^2 - 3\,c^2) \text{ und } s_2 = z_0 : y_0 = t\,(t^2 - 3\,c^2) : c^2.$$

Es fällt s_1 für $-\infty < t < +\infty$ und ist endlich für $t \neq \pm\sqrt{3}\,c$. Hingegen ist s_2 endlich für alle (endlichen) t und steigt bzw. fällt für $|t| > c$ bzw. für $|t| < s$; es ist also s_2 nur stückweise monoton, woraus das Behauptete folgt.

Eingegangen 18. Januar 1949.

Über unbeschränkt iterierbare Operatoren.

Von *Werner Schmeidler* in Berlin-Frohnau.

Einleitung.

Ein Operator $\mathfrak{K}$, der jedem Element y eines gewissen Definitionsbereichs $\mathfrak{D}$ in einem Hilbertschen Raume $\mathfrak{H}_t$ ein Element x eines andern oder auch desselben Hilbertschen Raumes $\mathfrak{H}_s$ zuordnet — Beispiel der Integraloperator

$$\mathfrak{K}\, y = \int_a^b K(s, t)\, y(t)\, dt = x(s) \quad -,$$

sei linear und besitze einen zugehörigen linearen adjungierten Operator $\mathfrak{K}^* x$, der in einem Definitionsbereich $\mathfrak{D}^*$ aus $\mathfrak{H}_s$ erklärt ist und Werte in $\mathfrak{H}_t$ annimmt, so daß

$$(\mathfrak{K}\, y, x) = (y, \mathfrak{K}^*\, x)$$

gilt. Ist $\mathfrak{D} = \mathfrak{H}_t$ und $\mathfrak{D}^* = \mathfrak{H}_s$, so ist $\mathfrak{K}$ beschränkt; es gilt dann auch die Beschränktheit von $\mathfrak{K}^*$. Selbstverständlich gehört dann jedes $\mathfrak{K}\, y$ zu $\mathfrak{D}^*$ und jedes $\mathfrak{K}^*\, x$ zu $\mathfrak{D}$. Allgemein braucht dies nicht der Fall zu sein; so ist für den selbstadjungierten Operator

$$\mathfrak{K}\, y = i \frac{dy}{dt}$$

im Bereiche aller differentiierbaren, an den Enden des Intervalls verschwindenden Funktionen die Ableitung $\frac{dy}{dt}$ nicht notwendig nochmals differentiierbar.

Es ist also etwas Besonderes, wenn wir verlangen, daß

1. jedes $\mathfrak{K}\, y$ zu $\mathfrak{D}^*$ $\quad (y \subset \mathfrak{D})$
2. jedes $\mathfrak{K}^*\, x$ zu $\mathfrak{D}$ $\quad (x \subset \mathfrak{D}^*)$

gehören soll. Solche Operatoren nennen wir unbeschränkt iterierbar. Sie gestatten die Bildung aller Iterationen

$$\mathfrak{K}\, \mathfrak{K}^*\, x, \quad \mathfrak{K}^*\, \mathfrak{K}\, y, \quad \mathfrak{K}\, \mathfrak{K}^*\, \mathfrak{K}\, y, \ldots$$

Die beschränkten Operatoren sind darunter enthalten, aber noch mehr. So ist beispielsweise der durch die unbeschränkte Diagonalmatrix

$$\mathfrak{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 2 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 3 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} = (\alpha\, \delta_{\alpha\beta})$$

definierte Operator im Bereiche $\mathfrak{D}$ aller finiten Vektoren nicht beschränkt, aber unbeschränkt iterierbar (und übrigens selbstadjungiert). $\mathfrak{D}$ ist hier in $\mathfrak{H}_t$ dicht, also $\mathfrak{K}$ dicht definiert, ebenso $\mathfrak{K}^*$. Das verlangen wir jetzt noch allgemein:

3. $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}^*$ seien dicht definiert.

Ein allgemeineres Beispiel solcher dicht definierten, unbeschränkt iterierbaren Operatoren bietet jede zeilen- und spaltenfinite, kurz finite Matrix im Bereich aller finiten Vektoren.

Das Hauptziel der vorliegenden Note ist der Nachweis, daß umgekehrt jeder den Bedingungen 1., 2. und 3. genügende Operator durch eine finite Matrix dargestellt werden kann. Wir werden diese Aussage im folgenden übrigens noch weiter präzisieren (§ 1). Im § 2 soll von selbstadjungierten, dicht definierten und unbeschränkt iterierbaren Operatoren die Rede sein.

§ 1. Zurückführung auf finite Matrizen.

Wir beginnen mit den Lösungen der Gleichungen

$$\mathfrak{K}\, y_0 = 0,\ \mathfrak{K}^*\, x_0 = 0 \quad (y_0 \subset \mathfrak{D},\ x_0 \subset \mathfrak{D}^*).$$

Alle y_0 bilden eine Linearmannigfaltigkeit, die wir durch ein Orthonormalsystem (v_0) darstellen können. Entsprechend sei (u_0) bezüglich der Nullösungen x_0 definiert. Keins dieser beiden Orthonormalsysteme kann vollständig sein, weil sonst $\mathfrak{K}$ bzw. $\mathfrak{K}^*$ der Nulloperator wäre, was wir ausschließen können.

Jetzt sei u_1 ein zu (u_0) orthogonales Element aus $\mathfrak{D}^*$; wir bilden

$$\mathfrak{K}^*\, u_1 \neq 0,\ \|\mathfrak{K}^*\, u_1\| = \varkappa_1 > 0,\ \mathfrak{K}^*\, u_1 = \varkappa_1\, v_1.$$

Dann ist $v_1 \subset \mathfrak{D}$ normiert und zu (v_0) orthogonal, weil

$$\varkappa_1 (v_0, v_1) = (v_0, \mathfrak{K}^*\, u_1) = (\mathfrak{K}\, v_0, u_1) = 0$$

gilt. Beim zweiten Schritt bilden wir

$$\mathfrak{K}\, v_1 - \varkappa_1\, u_1 \subset \mathfrak{D}^*.$$

Ist dies ungleich Null, so setzen wir

$$\|\mathfrak{K}\, v_1 - \varkappa_1\, u_1\| = \mu_1 > 0;\ \mathfrak{K}\, v_1 - \varkappa_1\, u_1 = \mu_1\, u_2 \subset \mathfrak{D}^*;$$

im anderen Falle sei $u_2 \subset \mathfrak{D}^*$ ein beliebiges zu (u_0) und u_1 orthogonales und normiertes Element. Auch im ersten Fall ist u_2 zu (u_0) orthogonal, weil

$$(\mathfrak{K}\, v_1 - \varkappa_1\, u_1, u_0) = (v_1, \mathfrak{K}^*\, u_0) - \varkappa_1 (u_1, u_0) = 0$$

gilt; ebenso ist u_2 zu u_1 orthogonal, weil

$$(\mathfrak{K}\, v_1 - \varkappa_1\, u_1, u_1) = (v_1, \mathfrak{K}^*\, u_1) - \varkappa_1 = \varkappa_1 - \varkappa_1 = 0$$

ist. Weiterhin setzen wir

$$\mathfrak{K}^*\, u_2 - \mu_1\, v_1 = \varkappa_2\, v_2 \subset \mathfrak{D};\ \varkappa_2 = \|\mathfrak{K}^*\, u_2 - \mu_1\, v_1\| \geq 0$$

und behaupten $\varkappa_2 > 0$. Wäre es nämlich gleich Null, so wäre

$$\mathfrak{K}^*\, u_2 - \frac{\mu_1}{\varkappa_1}\, \mathfrak{K}^*\, u_1 = \mathfrak{K}^*\left(u_2 - \frac{\mu_1}{\varkappa_1}\, u_1\right) = 0,$$

und dies ist ein Widerspruch gegen die bewiesene Orthogonalität von u_1 und u_2 zu allen u_0. Die Festsetzung über $\varkappa_2$ liefert ein normiertes v_2, von dem wir weiterhin Orthogonalität zu (v_0) und v_1 behaupten. In der Tat ist

$$\begin{aligned}
\varkappa_2 (v_2, v_0) &= (\mathfrak{K}^*\, u_2 - \mu_1\, v_1, v_0) = (u_2, \mathfrak{K}\, v_0) - \mu_1 (v_1, v_0) = 0 \\
\varkappa_2 (v_2, v_1) &= (\mathfrak{K}^*\, u_2 - \mu_1\, v_1, v_1) = (u_2, \mathfrak{K}\, v_1) - \mu_1 = (u_2, \varkappa_1\, u_1 + \mu_1\, u_2) - \mu_1 \\
&= \mu_1 - \mu_1 = 0.
\end{aligned}$$

Das geschilderte Verfahren kann nun fortgesetzt werden.

Es sei bereits $u_1, \ldots, u_{\varrho-1} \subset \mathfrak{D}^*$; $v_1, \ldots, v_{\varrho-1} \subset \mathfrak{D}$ definiert, ferner sei $u_\varrho \subset \mathfrak{D}^*$ und $v_\varrho \subset \mathfrak{D}$ mit Hilfe der Gleichungen

$$\begin{array}{ll} (\varrho, 1) & \mathfrak{K}\, v_{\varrho-1} - \varkappa_{\varrho-1}\, u_{\varrho-1} = \mu_{\varrho-1}\, u_\varrho \\ (\varrho, 2) & \mathfrak{K}^*\, u_\varrho - \mu_{\varrho-1}\, v_{\varrho-1} = \varkappa_\varrho\, v_\varrho \end{array} \quad \left(\begin{array}{l} \varkappa_0 = 0,\ \varkappa_1 > 0, \ldots, \varkappa_\varrho > 0 \\ \mu_0 = 0,\ \mu_1 \geq 0, \ldots, \mu_{\varrho-1} \geq 0 \end{array}\right)$$

festgelegt und es sei bewiesen, daß $(u_0), u_1, \ldots, u_\varrho$ und $(v_0), v_1, \ldots, v_\varrho$ je ein normiertes Orthogonalsystem bilden. Ist dies für $\varrho = 1, \ldots, n-1$ geschehen, so definieren wir jetzt $u_n \subset \mathfrak{D}^*$ mit Hilfe der entsprechenden Gleichung

$$(n, 1) \qquad \mathfrak{K}\, v_{n-1} - \varkappa_{n-1}\, u_{n-1} = \mu_{n-1}\, u_n,$$

wobei wir wieder die Fälle $\mu_{n-1} = 0$ und $\mu_{n-1} \neq 0$ zu unterscheiden haben. Im ersten Falle wählen wir für u_n irgendein zu $(u_0), u_1, \ldots, u_{n-1}$ orthogonales und normiertes Element aus $\mathfrak{D}^*$. Im zweiten Falle setzen wir

$$\mu_{n-1} = \|\mathfrak{K}\, v_{n-1} - \varkappa_{n-1}\, u_{n-1}\|,$$

dann ist u_n normiert und es gilt Orthogonalität von u_n zu $(u_0), u_1, \ldots, u_{n-1}$. In der Tat haben wir für $\varrho = 1, \ldots, n-1$:

$$\begin{aligned} \mu_{n-1}\,(u_n, u_0) &= (\mathfrak{K}\, v_{n-1} - \varkappa_{n-1}\, u_{n-1}, u_0) = (v_{n-1}, \mathfrak{K}^*\, u_0) - \varkappa_{n-1}\,(u_{n-1}, u_0) = 0, \\ \mu_{n-1}\,(u_n, u_\varrho) &= (\mathfrak{K}\, v_{n-1} - \varkappa_{n-1}\, u_{n-1}, u_\varrho) = (v_{n-1}, \mathfrak{K}^*\, u_\varrho) - \varkappa_{n-1}\, \delta_{\varrho n-1} \\ &= (v_{n-1}, \mu_{\varrho-1}\, v_{\varrho-1} + \varkappa_\varrho\, v_\varrho) - \varkappa_{n-1}\, \delta_{\varrho n-1} = \varkappa_\varrho\, \delta_{\varrho n-1} - \varkappa_{n-1}\, \delta_{\varrho n-1} = 0, \end{aligned}$$

wobei wir die Gleichungen $(n, 1)$ und $(\varrho, 2)$ benutzen. Ferner definieren wir v_n mit Hilfe der Gleichung

$$(n, 2) \qquad \mathfrak{K}^*\, u_n - \mu_{n-1}\, v_{n-1} = \varkappa_n\, v_n$$

und behaupten dabei, daß $\varkappa_n \neq 0$ ist. Wäre es nämlich gleich Null, so wäre $\mathfrak{K}^*\, u_1$, $\mathfrak{K}^*\, u_2, \ldots, \mathfrak{K}^*\, u_n$ linear mit konstanten Koeffizienten durch $v_1, \ldots, v_{n-1}$ ausdrückbar; also bestände zwischen diesen Größen eine lineare Beziehung mit nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten, so daß die betreffende Verbindung von $u_1, \ldots, u_n$ ein u_0 sein müßte, was wegen der Orthogonalität unmöglich ist. Also ist $\varkappa_n \neq 0$, und wir können

$$\varkappa_n = \|\mathfrak{K}^*\, u_n - \mu_{n-1}\, v_{n-1}\| > 0$$

setzen und erreichen damit, daß v_n normiert wird. Endlich ist auch Orthogonalität zwischen v_n und $(v_0), v_1, \ldots, v_{n-1}$ vorhanden, weil wegen $(n, 2)$ und $(\varrho + 1, 1)$ für $\varrho = 1, \ldots, n-1$ gilt:

$$\begin{aligned} \varkappa_n\,(v_n, v_0) &= (\mathfrak{K}^*\, u_n - \mu_{n-1}\, v_{n-1}, v_0) = (u_n, \mathfrak{K}\, v_0) - \mu_{n-1}\,(v_{n-1}, v_0) = 0, \\ \varkappa_n\,(v_n, v_\varrho) &= (\mathfrak{K}^*\, u_n - \mu_{n-1}\, v_{n-1}, v_\varrho) = (u_n, \mathfrak{K}\, v_\varrho) - \mu_{n-1}\,(v_{n-1}, v_\varrho) \\ &= (u_n, \varkappa_\varrho\, u_\varrho + \mu_\varrho\, u_{\varrho+1}) - \mu_{n-1}\, \delta_{\varrho n-1} = \mu_\varrho\, \delta_{\varrho+1, n} - \mu_{n-1}\, \delta_{\varrho n-1} = 0. \end{aligned}$$

Somit kann das beschriebene Verfahren solange fortgesetzt werden, als es noch ein weiteres, zu allen vorangehenden Elementen $(u_0), u_1, \ldots, u_{n-1}$ orthogonales und normiertes Element $u_n \subset \mathfrak{D}^*$ gibt. Ist dies nicht mehr der Fall, so muß $(u_0), u_1, \ldots, u_{n-1}$ ein vollständiges Orthogonalsystem in $\mathfrak{D}^*$, also nach der Eigenschaft 3. in $\mathfrak{H}_s$ sein. Wir behaupten, daß dann auch $(v_0), v_1, \ldots, v_{n-1}$ ein vollständiges Orthogonalsystem in $\mathfrak{D}$, also in $\mathfrak{H}_t$ ist. Zum Beweise bezeichnen wir mit $v \subset \mathfrak{D}$ ein zu allen $(v_0), v_1, \ldots, v_{n-1}$ orthogonales Element. Dann ist nach $(\varrho, 2)$:

$$(v, \mathfrak{K}^*\, u_\varrho) = (\mathfrak{K}\, v, u_\varrho) = 0 \quad (\varrho = 1, \ldots, n-1)$$

und ebenso gilt

$$(v, \mathfrak{K}^*\, u_0) = (\mathfrak{K}\, v, u_0) = 0.$$

Wegen der Vollständigkeit von $(u_0), u_1, \ldots, u_{n-1}$ ist dann

$$\mathfrak{K}\, v = 0,$$

und da v zu allen (v_0) orthogonal ist, muß $v = 0$ sein. Damit ist die Behauptung bewiesen. In diesem Falle ist die „Kernmatrix" $(\mathfrak{K}\, v_\beta, u_\alpha)$ in bezug auf die beiden vollständigen normierten Orthogonalsysteme $(u_0), u_1, \ldots, u_{n-1}$; $(v_0), v_1, \ldots, v_{n-1}$ bis auf Nullzeilen und -Spalten von der Form

$$(\mathfrak{K}\, v_\beta, u_\alpha) = \begin{pmatrix} \varkappa_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \mu_1 & \varkappa_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & \varkappa_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \mu_{n-2} & \varkappa_{n-1} \end{pmatrix}$$

also eine finite Matrix.

Genau so zeigt man, daß, wenn nach abzählbar vielen Schritten ein vollständiges Orthogonalsystem $(u_0), u_1, u_2, \ldots$ entsteht, auch das zugehörige System $(v_0), v_1, v_2, \ldots$ vollständig ist; die Kernmatrix wird dann abgesehen von Nullzeilen und -Spalten von der Form

$$(\mathfrak{K}\, v_\beta, u_\alpha) = \begin{pmatrix} \varkappa_1 & 0 & 0 & \ldots \\ \mu_1 & \varkappa_2 & 0 & \ldots \\ 0 & \mu_2 & \varkappa_3 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \end{pmatrix} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots),$$

also zwar eine unendliche, aber wieder finite Matrix.

Ist aber auch nach abzählbar vielen Schritten die Vollständgkeit noch nicht erreicht, so wird das Verfahren mit einem zu allen vorangehenden Elementen $(u_0), u_1, u_2, \ldots$ orthogonalen und normierten Element u von neuem begonnen und führt zu einem neuen Bestandteil der Kernmatrix von derselben Gestalt. Diese Wiederholung kann aber höchstens abzählbar oft eintreten, da ein vollständiges Orthogonalsystem nicht mehr als abzählbar viele Elemente enthalten kann.

Im ganzen haben wir demnach folgendes bewiesen:

Satz 1. *Zu jedem Operator $\mathfrak{K}$, der den Bedingungen 1., 2. und 3. der Einleitung genügt, gibt es zwei vollständige normierte Orthogonalsysteme (u) in $\mathfrak{H}_s$ und (v) in $\mathfrak{H}_t$, so daß die zugehörige Kernmatrix $(\mathfrak{K}\, v_\beta, u_\alpha)$ abgesehen von Nullzeilen und -Spalten aus endlich oder abzählbar vielen endlichen oder unendlichen Diagonalbestandteilen von der Form*

$$\begin{pmatrix} \varkappa_1 & 0 & 0 & \ldots \\ \mu_1 & \varkappa_2 & 0 & \ldots \\ 0 & \mu_2 & \varkappa_3 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \varkappa_1 > 0, & \varkappa_2 > 0, & \ldots \\ \mu_1 \geq 0, & \mu_2 \geq 0, & \ldots \end{pmatrix}$$

zusammengesetzt ist, während außerhalb Nullen stehen. Die Matrix ist demnach finit.

Die Bedeutung der angegebenen Kernmatrix liegt in folgendem: Jede Gleichung $\mathfrak{K}\, y = x$ kann für

$$y = \sum_{\beta=1}^{\infty} y_\beta\, v_\beta + v_0, \quad x = \sum_{\alpha=1}^{\infty} x_\alpha\, u_\alpha$$

wegen

$$(\mathfrak{K}\, y, u_0) = (y, \mathfrak{K}^*\, u_0) = 0$$

und

$$(\mathfrak{K}\, y, u_\alpha) = (x, u_\alpha) = x_\alpha = (y, \mathfrak{K}^*\, u_\alpha) = \sum_{\beta=1}^{\infty} (y, v_\beta)\,(v_\beta, \mathfrak{K}^*\, u_\alpha) = \sum_{\beta=1}^{\infty} (\mathfrak{K}\, v_\beta, u_\alpha)\, y_\beta$$

durch ein lineares Gleichungssystem für die zugehörigen Fourierkoeffizienten x_α bzw. y_β dargestellt werden. Besteht umgekehrt das Gleichungssystem $x_\alpha = \sum_{\beta=1}^{\infty} (\mathfrak{K}\, v_\beta, u_\alpha)\, y_\beta$ für zwei Vektoren (x_α) und (y_β), so ist für $y = \sum_{\beta=1}^{\infty} y_\beta\, v_\beta + v_0$ die Bedingung

$$(\mathfrak{K}\, y, u_\alpha) = x_\alpha, \; (\mathfrak{K}\, y, u_0) = 0,$$

also die Operatorgleichung $\mathfrak{K}\, y = \sum_{\alpha=1}^{\infty} x_\alpha\, u_\alpha = x$ erfüllt. Da die Kernmatrix ebenso wie

ihre Transponierte finit ist, so liefern alle finiten Vektoren (y_β) Elemente aus $\mathfrak{D}$, alle finiten Vektoren (x_α) Elemente aus $\mathfrak{D}^*$. Natürlich kann $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}^*$ auch noch andere Elemente umfassen, z. B. wenn der Operator und damit auch die Kernmatrix beschränkt ist[1]).

§ 2. Selbstadjungierte Operatoren.

Wir untersuchen jetzt den Fall, wo außer den Bedingungen 1., 2. und 3. noch

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^*$$

gilt, also ein selbstadjungierter Operator vorliegt. Natürlich ist dann auch $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^*$. Wir versuchen jetzt die Zurückführung auf eine finite Matrix mit Hilfe eines vollständigen Orthonormalsystems.

Wir beginnen wieder mit einem beliebigen normierten Element u_1, das nur zu allen Nullösungen u_0 von $\mathfrak{K}$ orthogonal sein soll. Dann bilden wir die reelle Zahl

$$(\mathfrak{K}\, u_1, u_1) = a_1$$

und setzen

$$\mathfrak{K}\, u_1 - a_1\, u_1 = b_1\, u_2 .$$

Ist erstens $b_1 = 0$, so wählen wir u_2 zu (u_0) und u_1 orthogonal, aber sonst beliebig in $\mathfrak{D}$. Ist dagegen $\mathfrak{K}\, u_1 - a_1\, u_1 \neq 0$, so können wir

$$b_1 = \|\mathfrak{K}\, u_1 - a_1\, u_1\| > 0$$

setzen und erreichen damit, daß u_2 wieder normiert ist und zu $\mathfrak{D}$ gehört. Ferner gilt

$$b_1(u_2, u_0) = (\mathfrak{K}\, u_1 - a_1\, u_1, u_0) = (\mathfrak{K}\, u_1, u_0) - a_1(u_1, u_0) = (u_1, \mathfrak{K}\, u_0) = 0,$$
$$b_1(u_2, u_1) = (\mathfrak{K}\, u_1 - a_1\, u_1, u_0) = a_1 - a_1 = 0.$$

Wegen der somit bewiesenen Orthogonalität wird dann $b_1 = (\mathfrak{K}\, u_1, u_2)$.

Beim nächsten Schritt setzen wir

$$(\mathfrak{K}\, u_2, u_2) = a_2$$

und bilden dann

$$\mathfrak{K}\, u_2 - b_1\, u_1 - a_2\, u_2 = b_2\, u_3 .$$

Ist $b_2 = 0$, so wählen wir für u_3 irgendein zu (u_0), u_1, u_2 orthogonales und normiertes Element in $\mathfrak{D}$. Im anderen Falle setzen wir

$$b_2 = \|\mathfrak{K}\, u_2 - b_1\, u_1 - a_2\, u_2\| > 0,$$

wodurch $u_3 \subset \mathfrak{D}$ normiert wird. Dann ist

$$b_2(u_3, u_0) = (\mathfrak{K}\, u_2, u_0) - b_1(u_1, u_0) - a_2(u_2, u_0) = (u_2, \mathfrak{K}\, u_0) = 0,$$
$$\begin{aligned} b_2(u_3, u_1) &= (\mathfrak{K}\, u_2, u_1) - b_1(u_1, u_0) - a_2(u_2, u_1) = (u_2, \mathfrak{K}\, u_1) - b_1 \\ &= (u_2, a_1\, u_1 + b_1\, u_2) - b_1 = b_1 - b_1 = 0, \\ b_2(u_3, u_2) &= (\mathfrak{K}\, u_2, u_2) - b_1(u_1, u_2) - a_2(u_2, u_2) = a_2 - a_2 = 0. \end{aligned}$$

Hiernach findet man für b_2 den Wert $b_2 = (\mathfrak{K}\, u_2, u_3)$.

In dieser Weise wird das Verfahren fortgesetzt. Es sei

$$\mathfrak{K}\, u_{\varrho-1} - b_{\varrho-2}\, u_{\varrho-2} - a_{\varrho-1}\, u_{\varrho-1} = b_{\varrho-1}\, u_\varrho$$

für $\varrho = 3, \ldots, n-1$ gesetzt und bereits bewiesen, daß $(u_0), u_1, \ldots, u_{n-1}$ ein normiertes Orthogonalsystem bildet, wobei

$$(\mathfrak{K}\, u_\varrho, u_\varrho) = a_\varrho \qquad (\varrho = 1, \ldots, n-1)$$
$$(\mathfrak{K}\, u_{\varrho-1}, u_\varrho) = b_{\varrho-1} \qquad (b_0 = 0,\ b_\varrho \geq 0)$$

---

[1]) Vgl. für diesen Fall meine Arbeit: Über Integralgleichungen erster Art mit beschränkter Kernmatrix, dieses Journal **186** (1944), S. 16–24. Die dortige Normalform der Kernmatrix ist hiermit von neuem abgeleitet bzw. verallgemeinert.

gesetzt ist. Dann setzen wir

$$\mathfrak{K}\, u_{n-1} - b_{n-2}\, u_{n-2} - a_{n-1}\, u_{n-1} = b_{n-1}\, u_n,$$

und wählen im Falle $b_{n-1} = 0$ irgendein zu $(u_0), u_1, \ldots, u_{n-1}$ orthogonales und normiertes Element u_n aus $\mathfrak{D}$, im andern Falle

$$b_{n-1} = \|\mathfrak{K}\, u_{n-1} - b_{n-2}\, u_{n-2} - a_{n-1}\, u_{n-1}\| > 0,$$

wodurch $u_n \subset \mathfrak{D}$ normiert wird. Seine Orthogonalität zu $(u_0), u_1, \ldots, u_{n-1}$ beweisen wir dann genau wie früher und finden damit:

$$b_{n-1} = (\mathfrak{K}\, u_{n-1}, u_n), \quad a_n = (\mathfrak{K}\, u_n, u_n),$$

so daß die Definition durch Induktion fortgesetzt werden kann, solange $(u_0), u_1, \ldots, u_{n-1}$ kein vollständiges Orthonormalsystem in $\mathfrak{D}$ bilden. Ist dies der Fall, erhält man als Kernmatrix $(\mathfrak{K}\, u_\beta, u_\alpha)$ abgesehen von Nullzeilen und -Spalten den reellen endlichen Bestandteil

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix} \qquad (b_1 \geq 0,\, b_2 \geq 0 \ldots),$$

also eine Jacobische Matrix. Ist das Verfahren ins Unendliche fortsetzbar, so entsteht bis auf Nullzeilen und -Spalten eine unendliche Jacobische Matrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \ldots \\ b_1 & a_2 & b_2 & \ldots \\ 0 & b_2 & a_3 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{pmatrix},$$

im allgemeinsten Falle eine Kernmatrix $(\mathfrak{K}\, u_\beta, u_\alpha)$, die aus endlichen oder unendlichen Diagonalbestandteilen dieser Form zusammengesetzt ist und außerhalb davon nur Nullen enthält.

Satz 2. *Für einen selbstadjungierten Operator, der den Bedingungen 1., 2. und 3. genügt, gibt es ein vollständiges Orthonormalsystem* (u), *so daß die zugehörige Kernmatrix* $(\mathfrak{K}\, u_\beta, u_\alpha)$ *abgesehen von Nullzeilen und -Spalten aus endlich oder abzählbar vielen endlichen oder unendlichen reellen Jacobischen Diagonalbestandteilen von der Form*

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \ldots \\ b_1 & a_2 & b_2 & \ldots \\ 0 & b_2 & a_3 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} (b_1 \geq 0,\ b_2 \geq 0) \\ \cdots\cdots\cdots \end{pmatrix}$$

zusammengesetzt ist, während außerhalb davon Nullen stehen. Die Matrix ist demnach finit.

Durch diesen Satz ist für unsere Operatoren der Anschluß hergestellt an die Untersuchungen von T. Carleman (Sur les équations intégrales singulières à noyau réell et symétrique, Upsala 1923), der seine allgemeine Theorie singulärer Kerne insbesondere anwendet auf finite quadratische Formen von unendlich vielen Variablen, die im Gegensatz zur Hilbertschen Theorie nicht beschränkt zu sein brauchen, was ja auch bei uns nicht notwendig ist. Für den hier vorliegenden Fall Jacobischer Matrizen ergibt sich bekanntlich ferner ein enger Zusammenhang mit der Stieltjes-Hamburgerschen Kettenbruchtheorie. Aus diesen Tatsachen kann man Folgerungen über die Spektraldarstellung unserer Operatoren entnehmen, auf die ich später zurückzukommen hoffe.

Eingegangen 24. Februar 1949.

Theorie der genäherten Quadratur.

Von *A. Kneschke* in Meerane.

Bisher hat man die genäherte Quadratur als Anwendungsgebiet der Interpolationsrechnung auftreten lassen. Zweifellos gibt dieser Anschluß an die Interpolationstheorie den Quadraturformeln eine gewisse geometrische Anschaulichkeit, insofern nämlich, als der Wert des bestimmten Integrals der Funktion $f(x)$ durch das Integral der Interpolationsfunktion und das Fehlerglied in Integralform dargestellt wird.

Das Ziel dieser Untersuchungen soll sein, die genäherte Quadratur ganz und gar aus der Interpolationstheorie herauszulösen und eine selbständige Theorie der genäherten Quadratur zu entwickeln. Wohl geht dabei die geometrische Anschaulichkeit der Problemstellung verloren, aber es werden andere Erkenntnisse sich aufdrängen, die diesen Verlust reichlich wettmachen. An die Spitze der Theorie tritt, wie wir sehen werden, ein Grundtheorem, das wegen seiner Allgemeinheit ihr den einheitlichen Charakter verleiht.

§ 1. Quadratur von Polynomen.

Gegeben sei ein Polynom $P(x)$ vom m-ten Grade. Es soll untersucht werden, ob sich

$$\int_{x_0}^{x_n} P(x)\,dx;\ x_0 < x_1 < \cdots < x_n$$

derart durch lineare Kombination der Werte

$$P(x_\varrho),\ P'(x_\varrho),\ \ldots,\ P^{(k_\varrho)}(x_\varrho);\quad \varrho = 0;\ldots,n;\ k_\varrho \leqq m$$

darstellen läßt, daß das Koeffizientensystem dieser Kombination von dem Polynom unabhängig ist. Eine Relation, die dieser Forderung genügt, wollen wir eine Quadraturformel für $P(x)$ nennen.

Wir gehen dementsprechend von der Integraldarstellung

$$(1)\quad \int_{x_0}^{x_n} P(x)\,dx = \sum_{\varrho=0}^{n}\left\{A_{\varrho 0}\,P(x_\varrho) + A_{\varrho 1}\,P'(x_\varrho) + \cdots + A_{\varrho k_\varrho}\,P^{(k_\varrho)}(x_\varrho)\right\};\ k_\varrho \leqq m$$

aus. In dieser Relation treten $z = n + 1 + \sum_{\mu=0}^{n} k_\mu$ Koeffizienten $A_{\varrho\sigma}$; $\varrho = 0,\ldots,n$; $\sigma = 0,\ldots,k_\varrho$ auf.

Unserer Fragestellung gemäß versuchen wir, zunächst für $m+1$ beliebige, linear unabhängige Polynome

$$P_i(x) = a_0^i\,x^m + a_1^i\,x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}^i\,x + a_m^i;\ i = 0,\ldots,m$$

die Gleichung (1) durch ein von diesen Polynomen unabhängiges System $A_{\varrho\sigma}$ zu erfüllen. Dabei setzen wir $z \geqq m+1$, mit anderen Worten $m \leqq n + \sum_\mu k_\mu$, voraus.

Führen wir die $(m+1)$-dimensionalen Vektoren

$$\mathfrak{a}_i = (a_0^i, a_1^i, \ldots, a_{m-1}^i, a_m^i),$$

$$\mathfrak{v} = \left(\frac{x^m}{m!}, \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}, \ldots, \frac{x}{1!}, 1\right),$$

$$\mathfrak{v}^{(\sigma)} = \left(\frac{x^{m-\sigma}}{(m-\sigma)!}, \frac{x^{m-\sigma-1}}{(m-\sigma-1)!}, \ldots, \frac{x}{1!}, 1, 0, \ldots, 0\right)$$

ein, so wird

$$P_i(x) = (\mathfrak{a}_i\, \mathfrak{v}),$$

$$P_i^{\sigma}(x) = (\mathfrak{a}_i\, \mathfrak{v}^{(\sigma)});\ \sigma = 0, \ldots, k_\varrho;\ \varrho = 0, \ldots, n,$$

während

$$\int_{x_0}^{x_n} P_i(x)\, dx = (\mathfrak{a}_i\, \bar{\mathfrak{v}}),$$

ist, wenn

$$\bar{\mathfrak{v}} = \left(\frac{x_n^{m+1} - x_0^{m+1}}{(m+1)!}, \ldots, \frac{x_n - x_0}{1!}\right)$$

gesetzt wird. Mit den Vektoren

$$\mathfrak{v}_\varrho = \left(\frac{x_\varrho^m}{m!}, \frac{x_\varrho^{m-1}}{(m-1)!}, \ldots, \frac{x_\varrho}{1!}, 1\right),$$

$$\mathfrak{v}_\varrho^{(\sigma)} = \left(\frac{x_\varrho^{m-\sigma}}{(m-\sigma)!}, \frac{x_\varrho^{m-\sigma-1}}{(m-\sigma-1)!}, \ldots, \frac{x_\varrho}{1!}, 1, 0, \ldots, 0\right)$$

erhält das Gleichungssystem die Gestalt

$$\text{(2a)} \qquad \sum_{\varrho=0}^{n} \sum_{\sigma=0}^{k_\varrho} A_{\varrho\sigma} (\mathfrak{a}_i\, \mathfrak{v}_\varrho^{(\sigma)}) = (\mathfrak{a}_i\, \mathfrak{v});\ i = 0, \ldots, m.$$

Das sind $m+1$ Gleichungen mit z Unbekannten $A_{\varrho\sigma}$. Um zu einem für unsere Zwecke geeigneten und eindeutig lösbaren Gleichungssystem zu gelangen, fügen wir noch $r = n - m + \sum_{\mu=0}^{n} k_\mu$ voneinander unabhängige, lineare Bedingungen für $A_{\varrho\sigma}$

$$\text{(2b)} \qquad \sum_{\varrho=0}^{n} \sum_{\sigma=0}^{k_\varrho} A_{\varrho\sigma} \lambda_{\varrho\sigma}^{\nu} = \delta_\nu;\ \nu = 1, \ldots, r$$

ein, so daß sich insgesamt ein Gleichungssystem mit der z-reihigen Determinante

$$D_z = \begin{vmatrix} (\mathfrak{a}_0\ \mathfrak{v}_0) & (\mathfrak{a}_0\ \mathfrak{v}_0') & \ldots & (\mathfrak{a}_0\ \mathfrak{v}_0^{(k_0)}) & \ldots & (\mathfrak{a}_0\ \mathfrak{v}_n) & (\mathfrak{a}_0\ \mathfrak{v}_n') & \ldots & (\mathfrak{a}_0\ \mathfrak{v}_n^{(k_n)}) \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ (\mathfrak{a}_m\ \mathfrak{v}_0) & (\mathfrak{a}_m\ \mathfrak{v}_0') & \ldots & (\mathfrak{a}_m\ \mathfrak{v}_0^{(k_0)}) & \ldots & (\mathfrak{a}_m\ \mathfrak{v}_n) & (\mathfrak{a}_m\ \mathfrak{v}_n') & \ldots & (\mathfrak{a}_m\ \mathfrak{v}_n^{(k_n)}) \\ \lambda_{00}^1 & \lambda_{01}^1 & \ldots & \lambda_{0k_0}^1 & \ldots & \lambda_{n0}^1 & \lambda_{n1}^1 & \ldots & \lambda_{nk_n}^1 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \lambda_{00}^r & \lambda_{01}^r & \ldots & \lambda_{0k_0}^r & \ldots & \lambda_{n0}^r & \lambda_{n1}^r & \ldots & \lambda_{nk_n}^r \end{vmatrix}$$

ergibt. Wenn wir D_z nach den Minoren M_r der letzten r Zeilen entwickeln, so erhalten wir mit ihren $(m+1)$-reihigen algebraischen Komplementen N_{m+1}

$$D_z = \sum M_r\, N_{m+1}.$$

Da die Elemente der algebraischen Komplemente innere Produkte der $(m+1)$-dimensionalen Vektoren $\mathfrak{a}_0, \ldots, \mathfrak{a}_m$ und einer gewissen Auswahl der Vektoren $\mathfrak{v}_\varrho^{(\sigma)}$ sind, läßt sich N_{m+1} als Produkt der Determinante

$$\text{(3)} \qquad (\mathfrak{a}_0, \ldots, \mathfrak{a}_m) = \begin{vmatrix} a_0^0 & a_1^0 & \ldots & a_m^0 \\ a_0^1 & a_1^1 & \ldots & a_m^1 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_0^m & a_1^m & \ldots & a_m^m \end{vmatrix}$$

und einer $(m+1)$-reihigen Determinante darstellen, die nur von den an der Bildung von N_{m+1} beteiligten Vektoren $\mathfrak{v}_\varrho^{(\sigma)}$ abhängig ist. Die Unterdeterminanten M_r enthalten nur die λ-Werte. Mithin läßt sich aus D_z der von den Polynomen $P_i(x)$ abhängige Faktor $(\mathfrak{a}_0, \ldots, \mathfrak{a}_m)$ abspalten; es verbleibt ein Ausdruck, der nur die Größen $\lambda_{\varrho\sigma}^\nu$ und die Vektoren $\mathfrak{v}_\varrho^{(\sigma)}$ enthält.

D_z ist im Sinne der Cramerschen Regel Nennerdeterminante für die Unbekannten $A_{\varrho\sigma}$. Bei der Zählerdeterminante treten in die $(\varrho + \sigma + 1 + \sum_{\mu=0}^{\varrho-1} k_\mu)$-te Spalte von D_z die Elemente

$$(\mathfrak{a}_0\, \overline{\mathfrak{v}}),\ \ldots,\ (\mathfrak{a}_m\, \overline{\mathfrak{v}}),\ \delta_1,\ \ldots,\ \delta_r.$$

Entwickeln wir wiederum nach den Minoren der letzten r Zeilen, so sind diese Unterdeterminanten r-ter Ordnung nur von den Werten $\lambda_{\varrho\sigma}^\nu$ und δ_ν abhängig. Ihre algebraischen Komplemente lassen sich ebenfalls in Produkte zweier Determinanten zerlegen, von denen die eine gleich $(\mathfrak{a}_0, \ldots, \mathfrak{a}_m)$ ist, während die andere jeweils von $m+1$ der Vektoren $\mathfrak{v}_0, \ldots, \mathfrak{v}_n, \overline{\mathfrak{v}}$ abhängt.

Wir sehen also, daß die von den $m+1$ Polynomen abhängige Determinante $(\mathfrak{a}_0, \ldots, \mathfrak{a}_m) \neq 0$ im Zähler wie im Nenner von $A_{\varrho\sigma}$ als Faktor auftritt. Die Koeffizienten $A_{\varrho\sigma}$ sind also unabhängig von der Wahl der Polynome $P_i(x)$; sie sind allein durch die Intervallstellen $x_0, \ldots, x_n$ und die linearen, voneinander unabhängigen, durch die Werte $\lambda_{\varrho\sigma}^\nu$, δ_ν gekennzeichneten Nebenbedingungen bestimmt. Wir erhalten demnach den

Satz. *Es existiert ein und nur ein Koeffizientensystem $A_{\varrho\sigma}$, das für beliebige Polynome m-ten Grades die Gleichung*

$$\int_{x_0}^{x_n} P(x)\,dx = \sum_{\varrho=0}^{n} \{A_{\varrho 0}\, P(x_\varrho) + \cdots + A_{\varrho k_\varrho}\, P^{(k_\varrho)}(x_\varrho)\};\ k_\varrho \leq m \leq n + \sum_\mu k_\mu$$

verwirklicht, wenn $n - m + \sum_{\mu=0}^{n} k_\mu$ voneinander unabhängige, lineare Zusatzbedingungen für die Koeffizienten gegeben sind.

Ist der Grad m des Polynoms $P(x)$ gleich $n + \sum_{\mu=0}^{n} k_\mu$, so sind zur eindeutigen Bestimmung der Koeffizienten $A_{\varrho\sigma}$ keine Nebenbedingungen notwendig. In diesem Falle sind sie eindeutig durch $x_0, \ldots, x_n$ festgelegt.

Wir können den allgemeinen Sachverhalt noch deutlicher machen. Da der eben gewonnene Satz für jedes Polynom m-ten Grades, also auch bei beliebigem ξ und $m+1$ linear unabhängigen Vektoren $\mathfrak{a}_0, \ldots, \mathfrak{a}_m$ für

$$P(x, \xi) = (\mathfrak{a}_0\, \mathfrak{v}) + (\mathfrak{a}_1\, \mathfrak{v})\, \xi + \cdots + (\mathfrak{a}_m\, \mathfrak{v})\, \xi^m$$

gilt, folgt aus (1) durch Koeffizientenvergleich das Gleichungssystem (2a), das durch Hinzunahme von (2b) vervollständigt wird. Wie wir bereits gesehen haben, enthält dessen Determinante den Faktor (3). Die Bedingung für die Lösbarkeit von (2a, b) ist also:

$$\begin{vmatrix} a_0^0 & a_1^0 & \ldots & a_m^0 \\ a_0^1 & a_1^1 & \ldots & a_m^1 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_0^m & a_1^m & \ldots & a_m^m \end{vmatrix} \neq 0. \tag{4}$$

Im einfachsten Falle ist sie gewährleistet, wenn alle Elemente bis auf die der Hauptdiagonale verschwinden. Setzen wir

$$a_i^i = \frac{(-1)^i}{i!},$$

so wird

$$P(x, \xi) = \frac{(x-\xi)^m}{m!}.$$

Die Relation (1) liefert nunmehr die Identität

$$(5)\qquad \sum_{\varrho=0}^{n}\sum_{\sigma=0}^{k_\varrho} A_{\varrho\sigma}\frac{(x_\varrho-\xi)^{m-\sigma}}{(m-\sigma)!}\equiv\frac{(x_n-\xi)^{m+1}-(x_0-\xi)^{m+1}}{(m+1)!}\;;\quad k_\varrho\leq m\leq n+\sum_\mu k_\mu.$$

Aus ihr resultieren für die A-Koeffizienten $m+1$ voneinander unabhängige Relationen, die zusammen mit den vorausgesetzten $n-m+\sum_{\mu=0}^{n} k_\mu$ Nebenbedingungen sämtliche $A_{\varrho\sigma}$ eindeutig bestimmen. Wir gewinnen damit den

Satz. *Die für jedes Polynom vom m-ten Grade geforderte Quadraturformel*

$$\int_{x_0}^{x_n} P(x)\,dx=\sum_{\varrho=0}^{n}\sum_{\sigma=0}^{k_\varrho} A_{\varrho\sigma}P^{(\sigma)}(x_\varrho);\quad k_\varrho\leq m\leq n+\sum_\mu k_\mu$$

läßt sich durch ein von $P(x)$ unabhängiges System von Koeffizienten $A_{\varrho\sigma}$ erfüllen, die der Identität (5) *und weiteren $n-m+\sum_{\mu=0}^{n} k_\mu$ frei wählbaren, voneinander unabhängigen, linearen Nebenbedingungen genügen.*

Im Sonderfall

$$m=n+\sum_{\mu=0}^{n} k_\mu$$

fallen die zusätzlichen Bedingungen fort. Die Identität allein bestimmt die Koeffizienten $A_{\varrho\sigma}$ eindeutig. Wir sehen also, daß man durch einen genügend hohen Grad des zu integrierenden Polynoms $P(x)$ die Koeffizienten, die nunmehr allein von $x_0,\ldots,x_n$ abhängen, durch die Identität eindeutig festlegen kann. Wir haben demnach in diesem Sonderfall die allgemeine Newtonsche Quadratur eines Polynoms vom Grade $m=n+\sum_{\mu=0}^{n} k_\mu$ vor uns.

§ 2. Das Grundtheorem.

Für eine willkürliche, stetige und $(m+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion $f(x)$, von der die Werte

$$f(x_\varrho),f'(x_\varrho),\ldots,f^{(k_\varrho)}(x_\varrho);\quad \varrho=0,\ldots,n;\quad k_\varrho\leq m\leq n+\sum_\mu k_\mu$$

vorzugeben sind, wollen wir

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx$$

in seiner Beziehung zu der Summe

$$\sum_{\varrho=0}^{n}\{A_{\varrho 0}f(x_\varrho)+\cdots+A_{\varrho k_\varrho}f^{(k_\varrho)}(x_\varrho)\}$$

unter der Voraussetzung untersuchen, daß die Koeffizienten $A_{\varrho\sigma}$ den in § 1 geforderten Bedingungen genügen. Es ist in diesem allgemeinen Fall nicht zu erwarten, daß diese Summe den Integralwert ohne weiteres darstellt; vielmehr wird zu ihr noch ein Zusatzglied treten müssen, das die geforderte Integraldarstellung gewährleistet. Wir wollen dieses Zusatzglied „Restglied" und die Summe „Interpolationssumme" nennen.

Mit Hilfe der Integralsumme

$$Z=\sum_{\nu=1}^{n}\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f^{(m+1)}(\xi)\,Q_\nu(\xi)\,d\xi$$

kann man die Abweichung der Interpolationssumme feststellen, wenn unter $Q_\nu(\xi)$ gewisse Polynome $(m+1)$-ten Grades verstanden werden, die wir so wählen wollen, daß Z als Restglied entsprechend der Relation

$$(6)\quad \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx=\sum_{\varrho=0}^{n}\sum_{\sigma=0}^{k_\varrho} A_{\varrho\sigma}f^{(\sigma)}(x_\varrho)+\sum_{\nu=1}^{n}\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f^{(m+1)}(\xi)Q_\nu(\xi)\,d\xi;\quad k_\varrho\leq m\leq n+\sum_\mu k_\mu$$

auftritt.

Bevor wir uns mit der allgemeinen Problemstellung $k_\varrho < m$ beschäftigen, soll der Grenzfall $k_\varrho = m$ für alle ϱ untersucht werden, also die spezielle Quadraturformel

$$(7,1)\qquad \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \sum_{\varrho=0}^{n}\sum_{\sigma=0}^{m} A_{\varrho\sigma} f^{(\sigma)}(x_\varrho) + \sum_{\nu=1}^{n}\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f^{(m+1)}(\xi) Q_\nu(\xi)\,d\xi$$

in ihrer Abhängigkeit von den Polynomen $Q_\nu(x)$. — Durch fortgesetzte partielle Integration erhält man für das Restglied

$$Z = \sum_{\nu=1}^{n}\left\{f^{(m)}(\xi) Q_\nu(\xi) - + \cdots + (-1)^m f(\xi) Q_\nu^{(m)}(\xi)\right\}_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} + \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx,$$

wenn man für jedes ν

$$Q_\nu^{(m+1)}(\xi) = (-1)^{m+1}$$

voraussetzt. Führen wir die Differenzen

$$\Delta Q_\varrho^{(\sigma)}(x_\varrho) = (-1)^\sigma \left\{Q_{\varrho+1}^{(\sigma)}(x_\varrho) - Q_\varrho^{(\sigma)}(x_\varrho)\right\};\quad \varrho = 0,\ldots,n;\quad \sigma = 0,\ldots,m$$

ein, wobei

$$Q_0(\xi) \equiv 0,\ Q_{n+1}(\xi) \equiv 0$$

gesetzt wird, so liefert ein Vergleich der durch Teilintegration gewonnenen Summe mit der für das Integral angesetzten Interpolationssumme den Zusammenhang zwischen den Polynomen $Q_\varrho(\xi)$ und den Koeffizienten $A_{\varrho\sigma}$, nämlich die $(n+1)(m+1)$ Gleichungen

$$(7,2)\qquad A_{\varrho\sigma} = \Delta Q_\varrho^{(m-\sigma)}(x_\varrho);\ \varrho = 0,\ldots,n;\ \sigma = 0,\ldots,m.$$

Die Koeffizienten $A_{\varrho\sigma}$ haben nach § 1 die Identität

$$(7,3)\qquad \sum_{\varrho=0}^{n}\sum_{\sigma=0}^{m} A_{\varrho\sigma}\frac{(x_\varrho-\xi)^{m-\sigma}}{(m-\sigma)!} \equiv \frac{(x_n-\xi)^{m+1}-(x_0-\xi)^{m+1}}{(m+1)!}$$

und weitere $n(m+1)$ unabhängige, lineare Nebenbedingungen zu erfüllen, wodurch sie eindeutig bestimmt sind. Die Relationen (7, 2) werden durch

$$(7,4)\qquad Q_\nu(\xi) = \begin{cases} \dfrac{(x_0-\xi)^{m+1}}{(m+1)!} + \displaystyle\sum_{\varrho=0}^{\nu-1}\sum_{\sigma=0}^{m} A_{\varrho\sigma}\frac{(x_\varrho-\xi)^{m-\sigma}}{(m-\sigma)!} \\ \dfrac{(x_n-\xi)^{m+1}}{(m+1)!} - \displaystyle\sum_{\varrho=\nu}^{n}\sum_{\sigma=0}^{m} A_{\varrho\sigma}\frac{(x_\varrho-\xi)^{m-\sigma}}{(m-\sigma)!} \end{cases};\ \nu = 1,\ldots,n$$

befriedigt. Beide Formen stellen ein und dasselbe Polynom dar, wie man durch Subtraktion und Vergleich mit der Identität (7, 3) leicht erkennen kann.

Diese Ergebnisse lassen sich auf die anfangs erwähnte allgemeinere Problemstellung, daß $\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx$ durch die Summe

$$\sum_{\varrho=0}^{n}\sum_{\sigma=0}^{k_\varrho} A_{\varrho\sigma} f^{(\sigma)}(x_\varrho);\quad k_\varrho \leq m$$

teilweise ersetzt werden soll, ausdehnen. Für

$$A_{\varrho,k_\varrho+1} = \cdots = A_{\varrho m} = 0;\quad \varrho = 0,\ldots,n$$

geht (7, 3) in die Identität

$$(8,1)\qquad \sum_{\varrho=0}^{n}\sum_{\sigma=0}^{k_\varrho} A_{\varrho\sigma}\frac{(x_\varrho-\xi)^{m-\sigma}}{(m-\sigma)!} \equiv \frac{(x_n-\xi)^{m+1}-(x_0-\xi)^{m+1}}{(m+1)!}$$

über; aus den erzeugenden Polynomen (7, 4) wird

$$(8,2)\qquad Q_\nu(\xi)=\begin{cases}\dfrac{(x_0-\xi)^{m+1}}{(m+1)!}+\sum\limits_{\varrho=0}^{\nu-1}\sum\limits_{\sigma=0}^{k_\varrho}A_{\varrho\sigma}\dfrac{(x_\varrho-\xi)^{m-\sigma}}{(m-\sigma)!}\\[2ex] \dfrac{(x_n-\xi)^{m+1}}{(m+1)!}-\sum\limits_{\varrho=\nu}^{n}\sum\limits_{\sigma=0}^{k_\varrho}A_{\varrho\sigma}\dfrac{(x_\varrho-\xi)^{m-\sigma}}{(m-\sigma)!}\end{cases};\quad \nu=1,\ldots,n$$

Es ist hiermit das Grundtheorem der genäherten Quadratur gewonnen:

Satz. *Die für jede stetige und $(m+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion $f(x)$ geforderte Quadraturformel*

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx=\sum_{\varrho=0}^{n}\sum_{\sigma=0}^{k_\varrho}A_{\varrho\sigma}f^{(\sigma)}(x_\varrho)+\sum_{\nu=1}^{n}\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu}f^{(m+1)}(\xi)\,Q_\nu(\xi)\,d\xi;\quad k_\varrho\leq m\leq n+\sum_\mu k_\mu$$

läßt sich durch ein von $f(x)$ unabhängiges System von Koeffizienten $A_{\varrho\sigma}$ erfüllen, die der Identität (8,1) *und $n-m+\sum\limits_{\mu=0}^{n}k_\mu$ frei wählbaren, voneinander unabhängigen, linearen Nebenbedingungen genügen. Die erzeugenden Polynome $Q_\nu(\xi)$ sind in ihrer Abhängigkeit von $A_{\varrho\sigma}$ durch* (8,2) *gegeben.*

Dieser Satz bildet die Grundlage für eine selbständige Theorie der genäherten Quadratur; er ermöglicht die Aufstellung von Quadraturformeln, ohne daß es dabei notwendig wäre, auf Interpolationstheoreme zurückzugreifen. — Wir können der Quadraturformel noch eine einfachere Form geben, wenn wir als erzeugende Funktion

$$Q(\xi)=\begin{cases}Q_1(\xi);\ x_0\leq\xi\leq x_1\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ Q_n(\xi);\ x_{n-1}\leq\xi\leq x_n\end{cases}$$

oder

$$Q(\xi)=\frac{1}{2}\left\{\frac{(x_0-\xi)^{m+1}+(x_n-\xi)^{m+1}}{(m+1)!}-\sum_{\varrho=0}^{n}\sum_{\sigma=0}^{k_\varrho}A_{\varrho\sigma}\frac{(x_\varrho-\xi)^{m-\sigma}}{(m-\sigma)!}\operatorname{sgn}(x_\varrho-\xi)\right\}$$

einführen. Es ist dann

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx=\sum_{\varrho=0}^{n}\sum_{\sigma=0}^{k_\varrho}A_{\varrho\sigma}f^{(\sigma)}(x_\varrho)+\int_{x_0}^{x_n}f^{(m+1)}(\xi)\,Q(\xi)\,d\xi.$$

Wir bezeichnen

$$\sum_{\varrho=0}^{n}\sum_{\sigma=0}^{k_\varrho}A_{\varrho\sigma}f^{(\sigma)}(x_\varrho)$$

als Newtonsche Interpolationssumme, die Koeffizienten $A_{\varrho\sigma}$ als Newtonsche Faktoren und $Q(\xi)$ als Newtonsche Funktion.

Von Wichtigkeit ist der Sonderfall

$$(9,1)\qquad m=M=n+\sum_{\mu=0}^{n}k_\mu.$$

Die Identität (8, 1) liefert dann $M+1=n+1+\sum\limits_{\mu=0}^{n}k_\mu$ unabhängige Gleichungen zur eindeutigen Festlegung aller $A_{\varrho\sigma}$-Werte. Wir können demnach feststellen:

Im Falle

$$m=M=n+\sum_{\mu=0}^{n}k_\mu$$

ist das System der Koeffizienten $A_{\varrho\sigma}$ in der Quadraturformel

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx=\sum_{\varrho=0}^{n}\sum_{\sigma=0}^{k_\varrho}A_{\varrho\sigma}f^{(\sigma)}(x_\varrho)+\sum_{\nu=1}^{n}\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu}f^{(M+1)}(\xi)\,Q_\nu(\xi)\,d\xi$$

eindeutig durch die Identität

$$\sum_{\varrho=0}^{n}\sum_{\sigma=0}^{k_\varrho} A_{\varrho\sigma}\frac{(x_\varrho-\xi)^{M-\sigma}}{(M-\sigma)!}\equiv\frac{(x_n-\xi)^{M+1}-(x_0-\xi)^{M+1}}{(M+1)!}$$

bestimmt. Die erzeugenden Polynome sind in ihrer Abhängigkeit von $A_{\varrho\sigma}$ durch

$$Q_\nu(\xi)=\begin{cases}\dfrac{(x_0-\xi)^{M+1}}{(M+1)!}+\displaystyle\sum_{\varrho=0}^{\nu-1}\sum_{\sigma=0}^{k_\varrho}A_{\varrho\sigma}\frac{(x_\varrho-\xi)^{M-\sigma}}{(M-\sigma)!}\\[2ex] \dfrac{(x_n-\xi)^{M+1}}{(M+1)!}-\displaystyle\sum_{\varrho=\nu}^{n}\sum_{\sigma=0}^{k_\varrho}A_{\varrho\sigma}\frac{(x_\varrho-\xi)^{M-\sigma}}{(M-\sigma)!}\end{cases}$$

gegeben.

Wesentlich ist, daß diese Quadraturformel unter allen möglichen insofern eine Sonderstellung einnimmt, als sie die einzige ist, die ohne Hinzunahme von Nebenbedingungen für die Koeffizienten $A_{\varrho\sigma}$ allein durch die der Quadraturformel eigene Struktur eindeutig bestimmt ist. Wir erkennen in diesem Sonderfall die allgemeine Newtonsche Quadraturformel. Ihn behandelt G. Kowalewski in seinem Buche „Interpolation und genäherte Quadratur". Er bezeichnet diesen Satz mit Recht als das Kernstück der Newtonschen Theorie der genäherten Quadratur. Die Begriffe „Newtonsche Faktoren", „Newtonsche Interpolationssumme" und „Newtonsche Funktion" werden in der Literatur nur auf diesen Sonderfall bezogen, während sie hier in allgemeinerem Sinne auftreten.

Für die praktische Aufstellung von derartigen Newtonschen Quadraturformeln ist noch auf eine Besonderheit hinzuweisen. Es gilt nämlich für alle ϱ

$$A_{\varrho,\,k_\varrho+1}=\cdots=A_{\varrho M}=0,$$

was nach (7, 2)

$$\Delta Q_\varrho(x_\varrho)=0,\ \Delta Q'_\varrho(x_\varrho)=0,\ \ldots,\ \Delta Q_\varrho^{(M-k_\varrho-1)}(x_\varrho)=0;\ \varrho=0,\ldots,n \tag{9, 2}$$

liefert. Das sind, wenn man die Relationen

$$Q_\nu^{(M+1)}(\xi)=(-1)^{M+1};\quad \nu=1,\ldots,n$$

hinzunimmt, $n\,(M+2)$ Gleichungen, durch die die Newtonschen Polynome berechnet werden können. Es gilt dann für die Newtonschen Faktoren

$$A_{\varrho\sigma}=\Delta Q_\varrho^{(M-\sigma)}(x_\varrho);\quad \varrho=0,\ldots,n;\ \sigma=0,\ldots,k_\varrho. \tag{9, 3}$$

Setzt man weiterhin $k_\varrho=0$, also $M=n$, so liefert die Identität die speziellen Newtonschen Faktoren L_ϱ; $\varrho=0,\ldots,n$, die mit den bestimmten Integralen der Lagrangeschen Polynome

$$L_\varrho(x)=\frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{\varrho-1})(x-x_{\varrho+1})\ldots(x-x_n)}{(x_\varrho-x_0)\ldots(x_\varrho-x_{\varrho-1})(x_\varrho-x_{\varrho+1})\ldots(x_\varrho-x_n)};\ n\geq 1$$

identisch sind. In der Quadraturformel

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx=\sum_{\varrho=0}^{n}L_\varrho f(x_\varrho)+\int_{x_0}^{x_n} f^{(n+1)}(\xi)\,Q(\xi)\,d\xi$$

liegt dann die spezielle Newtonsche Quadraturformel vor.

§ 3. Genäherte Quadratur für Funktionen zweier Variablen.

Für die willkürliche, hinsichtlich der Variablen x und y stetige und $(m+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion $f(x,y)$ seien an den im Rechteck $x_0\leq x\leq x_n$; $y_0\leq y\leq y_n$ gelegenen $(n+1)^2$ Gitterpunkten mit den Koordinaten $x_0,\ldots,x_n$; $y_0,\ldots,y_n$ die Werte

$$\frac{\partial^{\sigma+s}}{\partial x^\sigma\,\partial y^s}f(x_\varrho,y_r);\quad \begin{matrix}\varrho,r=0,\ldots,n\\ \sigma,s=0,\ldots,k_\varrho,k_r\end{matrix};\ k_\varrho,k_r\leq m\leq n+\sum_\mu k_\mu$$

vorgegeben. Es soll festgestellt werden, ob aus dem Grundtheorem des § 2 für

$$\int_{x_0}^{x_n}\int_{y_0}^{y_n} f(x, y)\, dx\, dy$$

eine Quadraturformel, die diese vorgegebenen Funktionselemente enthält, hergeleitet werden kann.

Für festes y gilt unter Berücksichtigung von (8, 1) und (8, 2)

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x, y)\, dx = \sum_{\varrho=0}^{n}\sum_{\sigma=0}^{k_\varrho} A_{\varrho\sigma}\frac{\partial^\sigma}{\partial x^\sigma} f(x_\varrho, y) + \sum_{\nu=1}^{n}\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu}\frac{\partial^{m+1}}{\partial\xi^{m+1}} f(\xi, y)\, Q_\nu(\xi)\, d\xi\,.$$

Integrieren wir nun über y als Variable, so wird

$$\int_{x_0}^{x_n}\int_{y_0}^{y_n} f(x, y)\, dx\, dy = \sum_{\varrho=0}^{n}\sum_{\sigma=0}^{k_\varrho} A_{\varrho\sigma}\int_{y_0}^{y_n}\frac{\partial^\sigma}{\partial x} f(x_\varrho, y)\, dy + \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu}\int_{y_{\mu-1}}^{y_\mu}\frac{\partial^{m+1}}{\partial\xi^{m+1}} f(\xi, \eta)\, Q_\nu(\xi)\, d\xi\, d\eta.$$

Für das Integral im ersten Summanden der rechten Seite gilt nach dem Grundtheorem

$$\int_{y_0}^{y_n}\frac{\partial^\sigma}{\partial x^\sigma} f(x_\varrho, y)\, dy = \sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{k_r} B_{rs}\frac{\partial^{\sigma+s}}{\partial x^\sigma\,\partial y^s} f(x_\varrho, y_r) + \sum_{\mu=1}^{n}\int_{y_{\mu-1}}^{y_\mu}\frac{\partial^{m+\sigma+1}}{\partial x^\sigma\,\partial\eta^{m+1}} f(x_\varrho, \eta)\, R_\mu(\eta)\, d\eta,$$

worin die Koeffizienten B_{rs} der Identität

$$(10, 1)\qquad \sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{k_r} B_{rs}\frac{(y_r-\eta)^{m-s}}{(m-s)!} \equiv \frac{(y_n-\eta)^{m+1}-(y_0-\eta)^{m+1}}{(m+1)!}$$

genügen und die Polynome $R_\mu(\eta)$ in der Form

$$(10, 2)\qquad R_\mu(\eta) = \begin{cases} \dfrac{(y_0-\eta)^{m+1}}{(m+1)!} + \displaystyle\sum_{r=0}^{\mu-1}\sum_{s=0}^{k_r} B_{rs}\frac{(y_r-\eta)^{m-s}}{(m-s)!} \\[2ex] \dfrac{(y_n-\eta)^{m+1}}{(m+1)!} - \displaystyle\sum_{r=\mu}^{n}\sum_{s=0}^{k_r} B_{rs}\frac{(y_r-\eta)^{m-s}}{(m-s)!} \end{cases};\qquad \mu = 1, \ldots, n$$

dargestellt werden können. Durch Einsetzen entsteht aus dem ersten Summanden der Ausdruck

$$\sum_{\varrho, r=0}^{n}\sum_{\sigma=0}^{k_\varrho}\sum_{s=0}^{k_r} A_{\varrho\sigma} B_{rs}\frac{\partial^{\sigma+s}}{\partial x^\sigma\,\partial y^s} f(x_\varrho, y_r) + \sum_{\mu=1}^{n}\int_{y_{\mu-1}}^{y_\mu} R_\mu(\eta)\sum_{\varrho=0}^{n}\sum_{\sigma=0}^{k_\varrho} A_{\varrho\sigma}\frac{\partial^{m+\sigma+1}}{\partial x^\sigma\,\partial\eta^{m+1}} f(x_\varrho, \eta)\, d\eta.$$

Ferner gilt

$$\int_{x_0}^{x_n}\frac{\partial^{m+1}}{\partial\eta^{m+1}} f(x, \eta)\, dx = \sum_{\varrho=0}^{n}\sum_{\sigma=0}^{k_\varrho} A_{\varrho\sigma}\frac{\partial^{m+\sigma+1}}{\partial x^\sigma\,\partial\eta^{m+1}} f(x_\varrho, \eta) + \sum_{\nu=1}^{n}\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu}\frac{\partial^{2m+2}}{\partial\xi^{m+1}\partial\eta^{m+1}} f(\xi, \eta)\, Q_\nu(\xi)\, d\xi.$$

Wir sehen, daß hierbei als Interpolationssumme gerade der zweite Faktor des Produktes unter dem Integral auftritt. Nach Berücksichtigung aller Bemerkungen erhält man dann die Quadraturformel

$$(11, 1)\qquad \int_{x_0}^{x_n}\int_{y_0}^{y_n} f(x, y)\, dx\, dy = \sum_{\varrho, r=0}^{n}\sum_{\sigma=0}^{k_\varrho}\sum_{s=0}^{k_r} A_{\varrho\sigma} B_{rs}\frac{\partial^{\sigma+s}}{\partial x^\sigma\,\partial y^s} f(x_\varrho, y_r) + Z$$

mit dem Restglied

$$Z = \sum_{\nu, \mu=1}^{n}\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu}\int_{y_{\mu-1}}^{y_\mu} \mathfrak{Z}_{m+1}\{Q_\nu(\xi), R_\mu(\eta)\}\, f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

wenn der aus den erzeugenden Polynomen gebildete Differentialoperator

$$(11,2)\quad \mathfrak{Z}_{m+1}\{Q_\nu(\xi), R_\mu(\eta)\} = Q_\nu(\xi)\frac{\partial^{m+1}}{\partial\xi^{m+1}} - Q_\nu(\xi)\,R_\mu(\eta)\frac{\partial^{2m+2}}{\partial\xi^{m+1}\partial\eta^{m+1}} + R_\mu(\eta)\frac{\partial^{m+1}}{\partial\eta^{m+1}}$$

eingeführt wird[1]). — Bereits im Falle der einfachen Quadratur konnte beim Restglied ein entsprechender Aufbau des Integranden beobachtet werden. Dort lieferte die auf $f(\xi)$ angewandte Differentialoperation

$$Q_\nu(\xi)\frac{d^{m+1}}{d\xi^{m+1}}$$

den Integranden.

§ 4. Sonderfälle.

Um die Leistungsfähigkeit des Grundtheorems zu zeigen, wollen wir einige Sonderfälle behandeln, die zu bekannten Quadraturformeln führen.

a) Für $n = 1$, $x_0 = a$, $x_1 = b$ und $k_0 = k_1 = k$ liefert der Newtonsche Sonderfall $M = 2k + 1$ aus

$$Q^{(\sigma)}(a) = Q^{(\sigma)}(b) = 0;\ \sigma = 0, \ldots, k \quad \text{und} \quad Q^{(2k+2)}(\xi) = 1$$

das erzeugende Polynom

$$Q(\xi) = \frac{(\xi-a)^{k+1}(\xi-b)^{k+1}}{(2k+2)!}$$

und aus

$$A_{0\sigma} = -(-1)^\sigma Q^{(2k-\sigma+1)}(a);\ A_{1\sigma} = (-1)^\sigma Q^{(2k-\sigma+1)}(b)$$

als Koeffizienten

$$A_{0\sigma} = (-1)^\sigma A_{1\sigma} = \binom{k+1}{k-\sigma}\frac{(b-a)^{\sigma+1}}{(2k+2)\cdots(2k-\sigma+2)};\ \sigma = 0, \ldots, k.$$

Die Quadraturformel lautet demnach

$$(12,1)\quad \begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx = &\sum_{\sigma=0}^{k}\binom{k+1}{k-\sigma}\frac{(b-a)^{\sigma+1}}{(2k+2)\cdots(2k-\sigma+2)}\{f^{(\sigma)}(a) + (-1)^\sigma f^{(\sigma)}(b)\}\\ &+ \int_a^b f^{(2k+2)}(\xi)\frac{(\xi-a)^{k+1}(\xi-b)^{k+1}}{(2k+2)!}\,d\xi.\end{aligned}$$

Sie enthält die Trapezformel

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\{f(a) + f(b)\} - \frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi)(\xi-a)(b-\xi)\,d\xi.$$

Die Verallgemeinerung auf Doppelintegrale über den rechteckigen Bereich $a \leq x \leq b$; $c \leq y \leq d$ mit den Gitterpunkten (a, c), (b, c), (b, d), (a, d) führt nach (11) zu der Quadraturformel

$$(12,2)\quad \int_a^b\int_c^d f(x, y)\,dx\,dy = \sum_{\sigma,s=0}^{k}\frac{\binom{k+1}{k-\sigma}\binom{k+1}{k-s}(b-a)^{\sigma+1}(d-c)^{s+1}}{[(2k+2)\cdots(2k-\sigma+2)]\,[(2k+2)\cdots(2k-s+2)]}\frac{\partial^{\sigma+s}}{\partial x^\sigma\,\partial y^s}\bar{f} + Z,$$

wenn

$$Z = \int_a^b\int_c^d \mathfrak{Z}_{2k+1}\left\{\frac{(\xi-a)^{k+1}(\xi-b)^{k+1}}{(2k+2)!}, \frac{(\eta-c)^{k+1}(\eta-d)^{k+1}}{(2k+2)!}\right\} f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta,$$

$$\bar{f} = f(a, c) + (-1)^\sigma f(b, c) + (-1)^{\sigma+s} f(b, d) + (-1)^s f(a, d)$$

---

[1]) $\frac{\partial^{\sigma+s}}{\partial x^\sigma\,\partial y^s} f(x_\varrho, y_r)$ bedeutet $\frac{\partial^{\sigma+s}}{\partial x^\sigma\,\partial y^s} f(x, y)\Big|_{x=x_\varrho,\, y=y_r}$

gesetzt wird.

b) Für $n = 1$, $x_0 = a$, $x_1 = b$, $k_0 = k_1 = m$ und die zusätzlichen Bedingungen

$$A_{1\sigma} = A_{0\sigma};\ \sigma = 0, \ldots, m$$

ergibt sich aus (8, 1) die Identität

$$A_{10}\frac{(b-\xi)^m + (a-\xi)^m}{m!} + \cdots + 2A_{1m} \equiv \frac{(b-\xi)^{m+1} - (a-\xi)^{m+1}}{(m+1)!},$$

woraus zur Bestimmung der Koeffizienten $A_{1\sigma}$ für $\xi = \frac{a+b}{2}$ die $m+1$ Bedingungsgleichungen

$$\begin{array}{lllll}
A_{10} & & & & = \frac{\delta}{1!} \\
 & A_{11} & & & = 0 \\
A_{10}\frac{\delta^2}{2!} & & + A_{12} & & = \frac{\delta^3}{3!} \\
 & A_{11}\frac{\delta^2}{2!} & & + A_{13} & = 0 \\
A_{10}\frac{\delta^4}{4!} & & + A_{12}\frac{\delta^2}{2!} & & + A_{14} = \frac{\delta^5}{5!} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

mit $\delta = \frac{b-a}{2}$ folgen. Wir erkennen darin zwei Gleichungssysteme. Das eine

$$\begin{array}{ll}
A_{11} & = 0 \\
A_{11}\frac{\delta^2}{2!} + A_{13} & = 0 \\
A_{11}\frac{\delta^4}{4!} + A_{13}\frac{\delta^2}{2!} + A_{15} & = 0 \\
\cdots & \cdots
\end{array}$$

liefert

$$A_{1\sigma} = A_{0\sigma} = 0;\ \sigma = 1, 3 \ldots,$$

während das andere

$$\begin{array}{ll}
A_{10} & = \frac{\delta}{1!} \\
A_{10}\frac{\delta^2}{2!} + A_{12} & = \frac{\delta^3}{3!} \\
A_{10}\frac{\delta^4}{4!} + A_{12}\frac{\delta^2}{2!} + A_{14} & = \frac{\delta^5}{5!} \\
\cdots & \cdots
\end{array}$$

zur schrittweisen Berechnung der restlichen Koeffizienten dienen kann. Setzen wir nämlich

$$A_{1,\varrho-1} = E_\varrho = \delta^\varrho e_\varrho;\ \varrho = 1, 3 \ldots,$$

so erhalten wir in

$$\frac{e_1}{(\varrho-1)!} + \frac{e_3}{(\varrho-3)!} + \cdots + \frac{e_\varrho}{0!} = \frac{1}{\varrho!};\ \varrho = 1, 3 \ldots$$

die Bestimmungsgleichung für die Eulerschen Zahlen e_1, $e_3 \ldots$. Jetzt können wir auch das erzeugende Polynom angeben; es ist

$$(-1)^{m+1}Q(\xi) = \begin{cases} \frac{(\xi-a)^{m+1}}{(m+1)!} - E_1\frac{(\xi-a)^m}{m!} - E_3\frac{(\xi-a)^{m-2}}{(m-2)!} - \cdots \\ \frac{(\xi-b)^{m+1}}{(m+1)!} + E_1\frac{(\xi-b)^m}{m!} + E_3\frac{(\xi-b)^{m-2}}{(m-2)!} + \cdots \end{cases}.$$

Wir sehen, daß für gerades m die Entwickelungen mit $\mp E_{m+1}$, für ungerades m mit $-E_m\frac{\xi-a}{1!}$ bzw. mit $E_m\frac{\xi-b}{1!}$ abbrechen. Das erzeugende Polynom steht also mit den

Eulerschen Polynomen in dem Zusammenhang

$$Q(\xi) = (-1)^{m+1} E_{m+1}(\xi).$$

Schreiben wir

$$A_{1,2i} = E_{2i+1} = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{2i+1} e_{2i+1};\ i = 0, 1 \ldots,$$

so lautet die Quadraturformel

$$(13, 1) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{\nu} e_{2i+1} \left(\frac{b-a}{2}\right)^{2i+1} \left(f^{(2i)}(a) + f^{(2i)}(b)\right) + Z,$$

worin

$$Z = -\int_a^b f^{(2\nu+1)}(\xi)\, E_{2\nu+1}(\xi)\, d\xi = \int_a^b f^{(2\nu+2)}(\xi)\, E_{2\nu+2}(\xi)\, d\xi$$

zu setzen ist. Das ist die Boolesche Quadraturformel.

Diese Betrachtungen, auf eine doppelte Integration über den rechteckigen Bereich $a \leq x \leq b$; $c \leq y \leq d$ erweitert, führen zu der Quadraturformel

$$(13, 2) \qquad \int_a^b\!\!\int_c^d f(x, y)\,dx\,dy = \sum_{i,j=0}^{\nu} \left(\frac{b-a}{2}\right)^{2i+1} \left(\frac{d-c}{2}\right)^{2j+1} e_{2i+1}\, e_{2j+1} \frac{\partial^{2(i+j)}}{\partial x^{2i}\, \partial y^{2j}} \bar{f} + Z,$$

wenn

$$Z = \int_a^b\!\!\int_c^d \mathfrak{Z}_{2\nu+1}\{-E_{2\nu+1}(\xi),\ -E_{2\nu+1}(\eta)\}\, f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

$$= \int_a^b\!\!\int_c^d \mathfrak{Z}_{2\nu+2}\{E_{2\nu+2}(\xi),\ E_{2\nu+2}(\eta)\}\, f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

$$\bar{f} = f(a, c) + f(b, c) + f(b, d) + f(a, d)$$

gesetzt wird.

c) Unter den bisherigen Voraussetzungen ergeben sich für die zusätzlichen Bedingungen

$$A_{10} = A_{00},\ A_{1\sigma} = -A_{0\sigma};\ \sigma = 1, \ldots, m$$

aus der Identität

$$A_{10} \frac{(b-\xi)^m + (a-\xi)^m}{m!} + A_{11} \frac{(b-\xi)^{m-1} - (a-\xi)^{m-1}}{(m-1)!} + \cdots + A_{1,m-1} \frac{b-a}{1!} \equiv \frac{(b-\xi)^{m+1} - (a-\xi)^{m+1}}{(m+1)!}$$

zur Bestimmung der Koeffizienten $A_{10}, A_{11}, \ldots$ für $\xi = \frac{a+b}{2}$ außer

$$A_{10} = \frac{\delta}{1!}$$

zwei Gruppen von Bedingungsgleichungen, nämlich

$$\begin{aligned}
&A_{12} &&= 0\\
&A_{12} \frac{\delta^2}{3!} + A_{14} &&= 0\\
&A_{12} \frac{\delta^4}{5!} + A_{14} \frac{\delta^2}{3!} + A_{16} &&= 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&A_{10} \frac{\delta}{2!} + A_{11} &&= \frac{\delta^2}{3!}\\
&A_{10} \frac{\delta^3}{4!} + A_{11} \frac{\delta^2}{3!} + A_{13} &&= \frac{\delta^4}{5!}\\
&A_{10} \frac{\delta^5}{6!} + A_{11} \frac{\delta^4}{5!} + A_{13} \frac{\delta^2}{3!} + A_{15} &&= \frac{\delta^6}{7!}.\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Aus dem ersten System folgt

$$A_{1\sigma} = -A_{0\sigma} = 0;\ \sigma = 2, 4 \ldots,$$

während man aus dem anderen durch die Substitution

$$A_{10} = B_1 = \delta b_1;\ A_{1,\varrho-1} = -B_\varrho = -\delta^\varrho b_\varrho;\ \varrho = 2, 4, \ldots$$

die Rekursionsformel

$$\frac{b_1}{\varrho!} - \frac{b_2}{(\varrho-1)!} - \frac{b_4}{(\varrho-3)!} - \cdots - \frac{b_\varrho}{1!} = \frac{1}{(\varrho+1)!};\ \varrho = 2, 4, \ldots$$

erhält, die als Bestimmungsgleichung für die Bernoullischen Zahlen $b_1, b_2, b_4, \ldots$ bekannt ist. Das erzeugende Polynom lautet

$$(-1)^{m+1} Q(\xi) = \begin{cases} \dfrac{(\xi-a)^{m+1}}{(m+1)!} - B_1 \dfrac{(\xi-a)^m}{m!} + B_2 \dfrac{(\xi-a)^{m-1}}{(m-1)!} + B_4 \dfrac{(\xi-a)^{m-3}}{(m-3)!} + \cdots \\ \dfrac{(\xi-b)^{m+1}}{(m+1)!} + B_1 \dfrac{(\xi-b)^m}{m!} + B_2 \dfrac{(\xi-b)^{m-1}}{(m-1)!} + B_4 \dfrac{(\xi-b)^{m-3}}{(m-3)!} + \cdots \end{cases}.$$

Für ungerades m brechen die Entwicklungen mit B_{m+1}, für gerades m mit $B_m \frac{\xi-a}{1!}$ bzw. $B_m \frac{\xi-b}{1!}$ ab. Die erzeugenden Polynome stehen mit den Bernoullischen Polynomen in dem Zusammenhang

$$Q(\xi) = (-1)^{m+1} B_{m+1}(\xi).$$

Für die Koeffizienten in ihrer Abhängigkeit von den Bernoullischen Zahlen gilt also

$$A_{10} = A_{00} = B_1 = \frac{b-a}{2} b_1$$

$$A_{1,2i-1} = -A_{0,2i-1} = -B_{2i} = -\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2i} b_{2i};\ i = 1, 2, \ldots,$$

woraus die Euler-Maclaurinsche Quadraturformel

$$(14,1) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{\lambda=1,2,4\ldots}^{\gamma} b_\lambda \left(\frac{b-a}{2}\right)^\lambda f_\lambda^{(\lambda-1)} + Z$$

mit dem Restglied

$$Z = \begin{cases} \int_a^b f^{(\gamma)}(\xi)\, B_\gamma(\xi)\, d\xi = -\int_a^b f^{(\gamma+1)}(\xi)\, B_{\gamma+1}(\xi)\, d\xi \text{ für } \gamma = 2, 4, \ldots \\ -\int_a^b f'(\xi)\, B_1(\xi)\, d\xi \text{ für } \gamma = 1 \end{cases}$$

und

$$f_\lambda = \begin{cases} f(a) + f(b);\ \lambda = 1 \\ f(a) - f(b);\ \lambda = 2, 4, \ldots \end{cases}$$

folgt.

Auf Doppelintegrale über den rechteckigen Bereich $a \leq x \leq b;\ c \leq y \leq d$ erweitert, entsteht die Quadraturformel

$$(14,2) \qquad \int_a^b\int_c^d f(x, y)\,dx\,dy = \sum_{\lambda,\mu=1,2,4\ldots}^{\gamma} \left(\frac{b-a}{2}\right)^\lambda \left(\frac{d-c}{2}\right)^\mu b_\lambda b_\mu \frac{\partial^{\lambda+\mu-2}}{\partial x^{\lambda-1}\partial y^{\mu-1}} f_{\lambda\mu} + Z,$$

wobei

$$Z = \begin{cases} \int_a^b\int_c^d \mathfrak{Z}_\gamma\{B_\gamma(\xi), B_\gamma(\eta)\} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = \int_a^b\int_c^d \mathfrak{Z}_{\gamma+1}\{-B_{\gamma+1}(\xi), -B_{\gamma+1}(\eta)\} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \\ \qquad\qquad \text{für } \gamma = 2, 4, \ldots \\ \int_a^b\int_c^d \mathfrak{Z}_1\{-B_1(\xi), -B_1(\eta)\} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \text{ für } \gamma = 1, \end{cases}$$

$$f_{\lambda\mu} = \begin{cases} f(a, c) + f(b, c) + f(b, d) + f(a, d);\ \lambda = \mu = 1 \\ f(a, c) + f(b, c) - f(b, d) - f(a, d);\ \lambda = 1;\ \mu = 2, 4, \ldots, \gamma \\ f(a, c) - f(b, c) - f(b, d) + f(a, d);\ \mu = 1;\ \lambda = 2, 4, \ldots, \gamma \\ f(a, c) - f(b, c) + f(b, d) - f(a, d);\ \lambda, \mu = 2, 4, \ldots, \gamma \end{cases}$$

zu setzen ist.

d) Für $n = 2$ und die Intervallstellen $x_0, x_1 = \frac{x_0 + x_2}{2}$, x_2 erhält man bei $k_0 = k_1 = k_2 = 0$ im Newtonschen Sonderfall $M = n = 2$ die Simpsonsche Quadraturformel

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{x_2 - x_0}{6}\big(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\big) + \frac{1}{6}\int_{x_0}^{x_1} (x_0 - \xi)^2 (x_1 - \xi)\, f'''(\xi)\,d\xi$$
$$+ \frac{1}{6}\int_{x_1}^{x_2} (x_2 - \xi)^2 (x_1 - \xi)\, f'''(\xi)\,d\xi.$$

Die beiden Integrale im Restglied lassen sich in ein einziges Integral überführen, wenn man im ersten Integral ξ durch $x_1 - \xi$, im zweiten ξ durch $x_1 + \xi$ ersetzt. Man erhält dann

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{x_2 - x_0}{2}\big(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\big) + Z, \tag{15,1}$$

$$Z = -\frac{1}{6}\int_0^{\frac{x_2 - x_0}{2}} \xi\left(\xi - \frac{x_2 - x_0}{2}\right)^2 \{f'''(x_1 + \xi) - f'''(x_1 - \xi)\}\,d\xi.$$

Bei der Verallgemeinerung auf Doppelintegrale über den Bereich $x_0 \leq x \leq x_2$; $y_0 \leq y \leq y_2$ mit den neun Gitterpunkten

$$(x_0, y_0),\ (x_2, y_0),\ (x_2, y_2),\ (x_0, y_2),$$
$$(x_0, y_1),\ (x_1, y_0),\ (x_2, y_1),\ (x_1, y_2),\ (x_1, y_1) \text{ für } x_1 = \frac{x_0 + x_2}{2},\ y_1 = \frac{y_0 + y_2}{2}$$

muß man beachten, daß das Restglied in vier Doppelintegrale über die Teilbereiche zerfällt. Ersetzt man die Veränderlichen

$$\begin{array}{lcl} \xi \text{ durch } x_1 - \xi \text{ für } x_0 \leq \xi \leq x_1 & & \eta \text{ durch } y_1 - \eta \text{ für } y_0 \leq \eta \leq y_1 \\ & \text{und} & \\ \xi \text{ durch } x_1 + \xi \text{ für } x_1 \leq \xi \leq x_2 & & \eta \text{ durch } y_1 + \eta \text{ für } y_1 \leq \eta \leq y_2, \end{array}$$

so wird

$$Q_1(x_1 - \xi) = \frac{\xi}{6}\left(\xi - \frac{x_2 - x_0}{2}\right)^2, \quad R_1(y_1 - \eta) = \frac{\eta}{6}\left(\eta - \frac{y_2 - y_0}{2}\right)^2$$
$$Q_2(x_1 + \xi) = -\frac{\xi}{6}\left(\xi - \frac{x_2 - x_0}{2}\right)^2, \quad R_2(y_1 + \eta) = -\frac{\eta}{6}\left(\eta - \frac{y_2 - y_0}{2}\right)^2.$$

Der Differentialoperator $\mathfrak{Z}$ geht durch die Transformationen bei allen vier Integralen in

$$\mathfrak{Z}_3\left\{-\frac{\xi}{6}\left(\xi - \frac{x_2 - x_0}{2}\right)^2, -\frac{\eta}{6}\left(\eta - \frac{y_2 - y_0}{2}\right)^2\right\}$$

über, so daß das Restglied durch ein einziges Doppelintegral über den Bereich

$$0 \leq \xi \leq \frac{x_2 - x_0}{2}, \quad 0 \leq \eta \leq \frac{y_2 - y_0}{2}$$

ausgedrückt werden kann. Die Quadraturformel lautet dann

$$\int_{x_0}^{x_2}\int_{y_0}^{y_2} f(x, y)\,dx\,dy = \frac{(x_2 - x_0)(y_2 - y_0)}{36}\{f(x_0, y_0) + f(x_2, y_0) + f(x_2, y_2) + f(x_0, y_2)$$
$$+ 4\big(f(x_0, y_1) + f(x_1, y_0) + f(x_2, y_1) + f(x_1, y_2)\big) + 16 f(x_1, y_1)\} \tag{15, 2}$$
$$+ \int_0^{\frac{x_2 - x_0}{2}}\int_0^{\frac{y_2 - y_0}{2}} \mathfrak{Z}_3\left\{-\frac{\xi}{6}\left(\xi - \frac{x_2 - x_0}{2}\right)^2, -\frac{\eta}{6}\left(\eta - \frac{y_2 - y_0}{2}\right)^2\right\} \bar{f}(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta,$$

wobei unter $\bar{f}$ die Funktion

$$\bar{f} = f(x_1 - \xi, y_1 - \eta) + f(x_1 - \xi, y_1 + \eta) + f(x_1 + \xi, y_1 - \eta) + f(x_1 + \xi, y_1 + \eta)$$

zu verstehen ist.

e) Für $n = 2$, die Intervallstellen $x_0, x_1 = \frac{x_0 + x_2}{2}$, x_2 und $k_0 = k_2 = 0$; $k_1 = m$ und die Nebenbedingungen

$$A_{00} = A_{20} = 0$$

erhält man aus der Identität

$$A_{10} \frac{(x_1 - \xi)^m}{m!} + \cdots + A_{1m} \equiv \frac{(x_2 - \xi)^{m+1} - (x_0 - \xi)^{m+1}}{(m+1)!}$$

als Koeffizienten

$$A_{1\sigma} = 0; \ \sigma = 1, 3, \ldots$$

$$A_{1\sigma} = \frac{2}{(\sigma+1)!} \left(\frac{x_2 - x_0}{2}\right)^{\sigma+1}; \ \sigma = 0, 2, \ldots .$$

Die erzeugenden Polynome lauten

$$Q_1(\xi) = \frac{(x_0 - \xi)^{m+1}}{(m+1)!}; \ x_0 \leq \xi \leq x_1$$

$$Q_2(\xi) = \frac{(x_2 - \xi)^{m+1}}{(m+1)!}; \ x_1 \leq \xi \leq x_2,$$

so daß für $m = 2\nu$ die Maclaurinsche Quadraturformel

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = 2 \sum_{i=0}^{\nu} \frac{\left(\frac{x_2 - x_0}{2}\right)^{2i+1}}{(2i+1)!} f^{(2i)}(x_1) + \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x_0 - \xi)^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} f^{(2\nu+1)}(\xi)\,d\xi + \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x_2 - \xi)^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} f^{(2\nu+1)}(\xi)\,d\xi$$

entsteht. Ersetzt man auch hier im ersten Integral des Restgliedes ξ durch $x_1 - \xi$, im zweiten ξ durch $x_1 + \xi$, so gewinnt man die übersichtliche Form

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx &= 2 \sum_{i=0}^{\nu} \frac{\left(\frac{x_2 - x_0}{2}\right)^{2i+1}}{(2i+1)!} f^{(2i)}(x_1) \\ &+ \frac{1}{(2\nu+1)!} \int_0^{\frac{x_2 - x_0}{2}} \left(\frac{x_2 - x_0}{2} - \xi\right)^{2\nu+1} \left\{ f^{(2\nu+1)}(x_1 + \xi) - f^{(2\nu+1)}(x_1 - \xi) \right\} d\xi. \end{aligned} \tag{16,1}$$

Die Erweiterung dieser Betrachtungen auf Doppelintegrale liefert schließlich die Quadraturformel

$$\int_{x_0}^{x_2} \int_{y_0}^{y_2} f(x, y)\,dx\,dy = 4 \sum_{i,j=0}^{\nu} \frac{\left(\frac{x_2 - x_0}{2}\right)^{2i+1} \left(\frac{y_2 - y_0}{2}\right)^{2j+1}}{(2i+1)!\,(2j+1)!} \frac{\partial^{2(i+j)}}{\partial x^{2i}\,\partial y^{2j}} f(x_1, y_1) + Z, \tag{16,2}$$

worin

$$Z = \int_0^{\frac{x_2 - x_0}{2}} \int_0^{\frac{y_2 - y_0}{2}} \mathfrak{Z}_{2\nu+1} \left\{ -\frac{\left(\xi - \frac{x_2 - x_0}{2}\right)^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}, -\frac{\left(\eta - \frac{y_2 - y_0}{2}\right)^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} \right\} \bar{f}(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta,$$

$$\bar{f} = f(x_1 - \xi, y_1 - \eta) + f(x_1 - \xi, y_1 + \eta) + f(x_1 + \xi, y_1 - \eta) + f(x_1 + \xi, y_1 + \eta)$$

zu setzen ist.

Eingegangen 12. Januar 1945.

Bemerkungen zu der Arbeit von O. Nehring „Über ein Dreiecksproblem".

Von *Max Zacharias* in Berlin.

Der Verfasser der obigen Arbeit[1]) liebt es, die von ihm gefundenen elementargeometrischen Sätze mit den Methoden der Koordinatengeometrie zu verifizieren. Dieses Verfahren hat den Nachteil, daß die einfachen geometrischen Zusammenhänge nicht ohne weiteres anschaulich erkennbar werden. Besonders kraß tritt dies bei dem $1^1/_2$ Druckseiten umfassenden analytischen Beweis des Satzes 1 zutage, der sich durch einen wenige Zeilen benötigenden rein geometrischen Beweis ersetzen läßt. Dies will ich im folgenden zeigen.

Die Fußpunkte der von einem Punkt P auf die Seiten A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 des Dreiecks $A_1A_2A_3$ gefällten Lote seien P_1, P_2, P_3. Dann ist A_iP der Durchmesser des Umkreises des Dreiecks $A_iP_kP_l$, also $P_1P_2 = A_3P \sin A_3$, $P_1P_3 = A_2P \sin A_2$. Soll das Dreieck $P_1P_2P_3$ gleichschenklig, insbesondere $P_1P_2 = P_1P_3$ sein, so müssen sich $A_2P : A_3P = \sin A_3 : \sin A_2 = A_1A_2 : A_1A_3$ verhalten, d. h. P muß auf dem „Apollonischen Kreis" liegen, der durch A_1 und durch die Fußpunkte der beiden durch A_1 gehenden Winkelhalbierenden geht. Umgekehrt: Liegt P auf diesem Kreis, so verhält sich

$$A_2P : A_3P = A_1A_2 : A_1A_3 = \sin A_3 : \sin A_2,$$

und es ist $P_1P_2 = P_1P_3$. Das ist der Inhalt des Satzes 1.

Der Verfasser nennt die in der neueren Dreiecksgeometrie viel behandelten Apollonischen Kreise des Dreiecks Erzeugerkreise.

Die folgenden Sätze des Verfassers enthalten zum Teil bekannte Eigenschaften der drei Apollonischen Kreise; sie sind ebenfalls alle ohne Rechnung rein geometrisch beweisbar. Einzig für den eine Extremaufgabe betreffenden Satz 20 dürfte die analytische Behandlung angemessen sein.

Der Verfasser schließt mit der Mitteilung eines Satzes (Satz 21) ohne Beweis und mit der Bemerkung: „Der Beweis wurde wegen seiner Umständlichkeit nur für einen speziellen Fall geführt und soll deshalb hier nicht gebracht werden". Daß dem Verfasser der vollständige Beweis dieses Satzes nicht gelungen ist, hat seinen Grund einerseits in dem Bestreben des Verfassers, alles analytisch zu errechnen, andrerseits darin, daß die Voraussetzungen dieses Satzes zu eng sind und dadurch die Rechnung komplizieren. Der Satz des Verfassers lautet mit der in der neueren Dreiecksgeometrie üblichen Bezeichnungsweise: Ist PQ eine durch den Umkreismittelpunkt des Dreiecks $A_1A_2A_3$ gehende Sehne des durch A_1 gehenden Apollonischen Kreises, so sind die Fußpunkt-

[1]) O. Nehring, Über ein Dreiecksproblem, dies. Journ. **186**, 70—77 (1945).

dreiecke von P und Q „ortholog“ (d. h. die Lote von den Ecken des einen Dreiecks auf die entsprechenden Seiten des anderen schneiden sich je in einem Punkt).

Der allgemeine, den Nehringschen Fall umfassende Satz lautet: Ist P ein beliebiger Punkt in der Ebene des Dreiecks A_i ($i = 1, 2, 3$) und M der Umkreismittelpunkt des Dreiecks, so sind die Fußpunktdreiecke aller Punkte der geraden Linie PM und nur diese dem Fußpunktdreieck von P ortholog.

Ich beweise diesen Satz in drei Schritten.

I. Das Fußpunktdreieck M_i des Umkreismittelpunktes M des Dreiecks A_i ist dem Fußpunktdreieck P_i jedes beliebigen anderen Punktes P der Ebene ortholog.

Beweis. Die Seiten des Dreiecks M_i sind den entsprechenden Seiten des Dreiecks A_i parallel, und die Lote von den Ecken des Dreiecks P_i auf die entsprechenden Seiten von M_i schneiden sich daher in P. Die Dreiecke M_i und P_i sind also ortholog.

II. Sind die Fußpunktdreiecke P_i und N_i zweier Punkte P und N der Ebene des Dreiecks A_i ortholog, so ist auch das Fußpunktdreieck Q_i jedes Punktes Q der geraden Linie PN zu P_i (und zu N_i) ortholog.

Beweis. Die Lote $N_i N_i'$ von den Ecken von N_i auf die entsprechenden Seiten von P_i schneiden sich in einem Punkt N'. Die Höhen $P_i H_i$ des Dreiecks P_i schneiden sich in H. Die Gerade HN' schneide die Lote $Q_i Q_i'$ von den Ecken von Q_i auf die entsprechenden Seiten von P_i in den Punkten R_i. Dann verhält sich $HN' : N'R_i = P_i N_i : N_i Q_i$ und, weil P, N, Q in einer geraden Linie liegen, auch $P_i N_i : N_i Q_i = PN : NQ$ ($i = 1, 2, 3$). Also ist $R_1 \equiv R_2 \equiv R_3 \equiv Q'$, d. h. die Dreiecke Q_i und P_i sind ortholog.

Folgerung aus I und II. Die Fußpunktdreiecke aller Punkte der geraden Linie PM sind dem Dreieck P_i ortholog.

III. Liegt der Punkt S in der Ebene des Dreiecks A_i nicht auf der geraden Linie PM, so ist sein Fußpunktdreieck S_i nicht ortholog P_i.

Beweis. Angenommen, das Dreieck S_i sei ortholog P_i, d. h. die Lote $S_i S_i'$ von den Ecken von S_i auf die entsprechenden Seiten von P_i schneiden sich in einem Punkt S'. SS_1 schneidet die Gerade PM in einem Punkt Q. Das Fußpunktdreieck Q_i von Q ist nach der Folgerung aus I und II zu P_i ortholog; die Lote von seinen Ecken auf die entsprechenden Seiten von P_i schneiden sich in einem Punkt Q'. Man kann zeigen, daß dann das Fußpunktdreieck von S_1 zu dem Dreieck P_i ortholog sein müßte. Dieses Fußpunktdreieck heiße $S_1 S_{12} S_{13}$ ($S_1 S_{12} \perp A_1 A_3$, $S_1 S_{13} \perp A_1 A_2$). Das Lot von S_1 auf $P_2 P_3$ ist $S_1 S_1'$. Die Lote von S_{12} auf $P_1 P_3$ und von S_{13} auf $P_1 P_2$ mögen $S_1 S_1'$ in T_2 und T_3 schneiden. Dann verhält sich

$$S_1 Q : QS = S_{12} Q_2 : Q_2 S_2 = T_2 Q' : Q' S' \quad \text{und} \quad S_1 Q : QS = S_{13} Q_3 : Q_3 S_3 = T_3 Q' : Q' S'.$$

Folglich wäre $T_2 \equiv T_3$ und, wie gesagt, das Fußpunktdreieck von S_1 ortholog zu P_i.

Nun ist die Unmöglichkeit unserer Annahme, daß das Dreieck S_i dem Dreieck P_i ortholog sei, leicht einzusehen. Daraus würde zunächst nach II folgen, daß die Fußpunktdreiecke aller Punkte der geraden Linie PS zu P_i ortholog sind. Was soeben für den Punkt S_1, den Fußpunkt des Lotes von S auf $A_2 A_3$, bewiesen wurde, müßte für alle Punkte von $A_2 A_3$ gelten: Die Fußpunktdreiecke aller Punkte von $A_2 A_3$ wären zu P_i ortholog. Dann wären aber nach II die Fußpunktdreiecke aller Punkte der Ebene überhaupt zu P_i ortholog. Es würde überhaupt keine zwei Fußpunktdreiecke geben, die nicht ortholog wären. Das ist aber, wie z. B. die Fußpunktdreiecke zweier Höhenfußpunkte zeigen, falsch.

Eingegangen am 15. Oktober 1944.

Konforme Abbildung einfach zusammenhängender Gebiete, die von Bögen konzentrischer logarithmischer Spiralen berandet sind.

Von *Helmut Epheser* in Hannover.

Einleitung.

Diese Arbeit ist eine veränderte Fassung meiner Arbeit „Über einige Verallgemeinerungen des Schwarz-Christoffelschen Integralansatzes", die 1944 von der naturwissenschaftlichen Fakultät der Deutschen Technischen Hochschule Brünn als Dissertation angenommen wurde. Für die Anregung zu dieser Untersuchung danke ich Herrn Prof. Dr. W. von Koppenfels. —

Es sei $\mathfrak{G}_t$ das einfach zusammenhängende, schlichte, ganz im Endlichen gelegene Innengebiet eines Geraden-n-Ecks in der Ebene einer komplexen Veränderlichen t. Dieses wird durch die Funktion

$$\text{(I)} \qquad \eta = e^t$$

auf einen Bereich der η-Ebene abgebildet, der die Punkte $\eta = 0$ und $\eta = \infty$ weder zu inneren Punkten noch zu Randpunkten hat und dessen Rand sich aus n Bögen logarithmischer Spiralen mit dem Zentrum $\eta = 0$ zusammensetzt[1]). Der so erhaltene Bereich $\mathfrak{G}_\eta$ ist dann und nur dann schlicht, wenn auf jeder Geraden $R(t) = \text{Const.}$ die dem Gebiet $\mathfrak{G}_t$ angehörenden Punkte auf einer Strecke liegen, deren Länge nicht größer als 2π ist. Andererseits kann jedes beliebige Gebiet $\mathfrak{G}_\eta$ der gekennzeichneten Art durch die Funktion (I) aus einem Geradenpolygon erhalten werden. Nun hat eine analytische Funktion, die die konforme Abbildung einer Halbebene $J(x) > 0$ auf den Bereich $\mathfrak{G}_t$ vermittelt, allgemein die Form des Schwarz-Christoffelschen Integrals:

$$\text{(IIa)} \qquad t = C \int_{x_0}^{x} (x - a_1)^{-\alpha_1} (x - a_2)^{-\alpha_2} \cdots (x - a_n)^{-\alpha_n}\, dx + C',$$

wobei $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \ldots, \alpha_n\pi$ die Außenwinkel des Polygons bedeuten, die unter den gemachten Voraussetzungen den Einschränkungen

$$-1 \leq \alpha_\nu < 1 \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

unterworfen sind und zwischen denen die Bedingung

$$\text{(IIa*)} \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 2$$

[1]) Der asymptotische Punkt einer logarithmischen Spirale wird im folgenden kurz als ihr Zentrum bezeichnet; Spiralen mit dem gleichen Zentrum sollen konzentrisch genannt werden. Der Begriff „Bogen einer logarithmischen Spirale mit dem Zentrum $\eta = 0$" soll auch die Grenzfälle eines Kreisbogens mit $\eta = 0$ als Mittelpunkt und einer radialen Strecke mit umfassen.

besteht. Hiernach stellen (I) und (IIa) zusammen den Abbildungsansatz für ein beliebig gegebenes Gebiet $\mathfrak{G}_\eta$ der oben festgelegten Art mit den Außenwinkeln $\alpha_\nu \pi$ dar.

Durch eine Verallgemeinerung dieser einfachen Überlegung kann man nun zu neuen Abbildungen gelangen. Fügt man nämlich zu den reellen Verzweigungspunkten $x = a_\nu$ des Schwarz-Christoffelschen Integrals noch ein Paar konjugiert komplexer Pole erster Ordnung hinzu:

$$\text{(IIb)} \qquad t = C \int_{x_0}^{x} \frac{(x-a_1)^{-\alpha_1}(x-a_2)^{-\alpha_2}\cdots(x-a_n)^{-\alpha_n}}{(x-l)(x-\bar{l})}\,dx + C',$$

so ist diese Funktion nicht mehr in der oberen Halbebene eindeutig, sondern nur modulo $2\pi i R$ bestimmt, wenn R das Residuum des Integranden für $x = l$ bedeutet; diese Vieldeutigkeit kann man aber durch die Periodizität der Exponentialfunktion (I) kompensieren, wenn man C so bestimmt, daß das Residuum R auf 1 reduziert wird. So entsteht eine in der oberen Halbebene eindeutige Funktion $\eta(x)$, die bei $x = l$ eine einfache Nullstelle hat. Der im Integranden neu aufgenommene Faktor ist auf der reellen Achse reellwertig und beeinflußt somit das Verhalten von $\operatorname{arc}\frac{dt}{dx}$ auf dem Rande nicht. Es entsprechen also auch hier den einzelnen Intervallen der Achse reeller x geradlinige Strecken der t-Ebene und damit Bögen logarithmischer Spiralen in der η-Ebene. Als konformes Abbild der Halbebene $J(x) > 0$ entsteht somit wieder ein Gebiet, das von Bögen konzentrischer logarithmischer Spiralen berandet wird, das aber deren gemeinsames Zentrum $\eta = 0$ im Inneren enthält. Soll hierbei dem uneigentlichen Punkt $x = \infty$ keine $(n+1)$-te Bereichecke entsprechen, so muß sich der Integrand dort wie x^{-2} verhalten, und das ergibt für die Exponenten α_ν die Bedingung:

$$\text{(IIb*)} \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 0.$$

In weiterer Verfolgung dieses Gedankens seien nun Integrale betrachtet, die neben den n Verzweigungspunkten a_ν auf der reellen Achse noch m Paare $(l_1, \bar{l}_1), (l_2, \bar{l}_2), \ldots, (l_m, \bar{l}_m)$ konjugiert komplexer Pole erster Ordnung aufweisen $(J(l_\mu) > 0,\ \mu = 1, 2, \ldots, m)$. Stehen die Residuen R_μ der Pole $x = l_\mu$ in rationalen Verhältnissen, so daß man

$$R_\mu = k_\mu R \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

mit ganzen rationalen k_μ ohne gemeinsamen Teiler setzen kann, und reduziert man R auf 1, so ist $\eta = e^t$ eine in der oberen Halbebene eindeutige Funktion von x. Aus dem Verhalten ihrer logarithmischen Ableitung ist zu entnehmen, daß einem Punkt $x = l_\mu$ als Bild ein Windungspunkt der Ordnung $|k_\mu| - 1$ entspricht, der im Fall $k_\mu > 0$ über $\eta = 0$, im Fall $k_\mu < 0$ über $\eta = \infty$ liegt. Alle übrigen Punkte im Inneren der oberen x-Halbebene sind regulär, und den Teilstrecken des Randes entsprechen wiederum Bögen logarithmischer Spiralen mit $\eta = 0$ als Zentrum.

Bei Beschränkung auf schlichte Bildbereiche kommen für k_μ nur die Werte ± 1 in Frage, und die Zahl m der zusätzlichen Polpaare kann nicht größer als 2 sein. Für $m = 2$ müssen dann die Residuen der beiden Pole einander entgegengesetzt gleich sein, damit sich der eine dieser Punkte in $\eta = 0$, der anderen in $\eta = \infty$ abbildet. Der Abbildungsansatz lautet dann:

$$\text{(IIc)} \qquad t = C \int_{x_0}^{x} \frac{(x-a_1)^{-\alpha_1}(x-a_2)^{-\alpha_2}\cdots(x-a_n)^{-\alpha_n}}{(x-l_0)(x-\bar{l}_0)(x-l_\infty)(x-\bar{l}_\infty)}\,dx + C',$$

wobei die Forderung

$$R_0 + R_\infty = 0$$

erfüllt werden muß, unter R_0 und R_∞ die Residuen der Pole bei $x = l_0$ und $x = l_\infty$ verstanden, und wo durch geeignete Bestimmuug der Konstanten C das Residuum R_0 auf 1 zu reduzieren ist. Die Bedingung für reguläres Verhalten des Integrals im Punkt $x = \infty$ lautet für diesen Fall:

$$\text{(IIc*)} \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = -2.$$

Die vorstehenden Überlegungen haben zu Abbildungsansätzen für Bereiche der η-Ebene geführt, deren Rand sich aus einer endlichen Anzahl von Bögen logarithmischer Spiralen mit gemeinsamem (nach $\eta = 0$ gelegtem) Zentrum zusammensetzt. Beschränkt man sich auf schlichte Gebiete, so sind drei Typen zu unterscheiden:

Typ A. Bereiche, die die Punkte $\eta = 0$ und $\eta = \infty$ nicht enthalten.
Typ B. Bereiche, die einen der Punkte $\eta = 0$ oder $\eta = \infty$ im Inneren enthalten.
Typ C. Bereiche, die sowohl $\eta = 0$ als auch $\eta = \infty$ zu inneren Punkten haben.

Hiervon können die Polygone des Typs A als erledigt betrachtet werden; denn deren Abbildung beherrscht man in dem gleichen Grade wie die der schlichten Geradenpolygone. Eine weitere Untersuchung erfordern aber noch die Typen B und C. Hier muß noch gezeigt werden, daß die erhaltenen Ansätze geeignet sind, die Abbildungsfunktion für jedes beliebig vorgegebene Polygon des betreffenden Typs auch wirklich zu liefern. Ein wesentlicher Punkt dieses Beweises wird sein, die Gleichungen (IIb*) und (IIc*) auf Grund geometrischer Tatsachen als Bedingungen für die Außenwinkelsummen der Bereiche des Typs B bzw. C zu gewinnen.

Im folgenden wird im ersten Abschnitt der verlangte Nachweis geführt; daran schließt sich in Abschnitt 2 die Behandlung einiger konkreter Abbildungsaufgaben, die auch einen Einblick in die mit ihnen verknüpften Parameterprobleme gestatten; schließlich wird im Anhang untersucht, in welcher Beziehung diese Abbildungen zur Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom Fuchsschen Typus stehen.

Abschnitt 1.

Aufbau der Abbildungsfunktion für einen beliebig vorgegebenen Bereich.

1.1. Bereiche des Typs B.

Es sei $\mathfrak{G}_\eta$ ein einfach zusammenhängendes, schlichtes Gebiet der η-Ebene, das den Punkt $\eta = 0$ im Inneren enthält, den Punkt $\eta = \infty$ weder zum inneren Punkt noch zum Randpunkt hat[2]) und dessen Rand sich aus n Bögen logarithmischer Spiralen mit dem Zentrum $\eta = 0$ zusammensetzt. Die Eckpunkte dieses Bereiches seien mit $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ bezeichnet. Der zur Ecke η_ν gehörige Außenwinkel $\alpha_\nu \pi$ ist definiert als derjenige Sprung, den der Stützwinkel beim Überschreiten dieser Ecke erleidet, wenn man den Rand so durchläuft, daß das Gebiet $\mathfrak{G}_\eta$ dabei zur Linken liegt. Dabei gelten die Einschränkungen

$$(1) \qquad -1 \leq \alpha_\nu < 1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Die Außenwinkelsumme σ muß für alle Polygone des Typs B den gleichen Wert haben; denn man überzeugt sich leicht davon, daß durch Anfügen oder Abschneiden von Polygonen des Typs A der Wert dieser Summe nicht geändert wird, und andererseits können zwei beliebige Polygone des Typs B durch eine endliche Anzahl solcher Prozesse

[2]) Die Punkte $\eta = 0$ und $\eta = \infty$ sind völlig gleichberechtigt und können auch die Rollen vertauschen.

ineinander übergeführt werden. Um den gesuchten Summenwert zu finden, setze man alle $\alpha_\nu > -1$ voraus und bedenke, daß dann die zu $\mathfrak{G}_\eta$ komplementäre Punktmenge wieder ein Gebiet des Typs B mit Einschluß des Randes ist. Da nun beim Übergang von $\mathfrak{G}_\eta$ zum komplementären Bereich die Außenwinkel ihre Vorzeichen umkehren, folgt $\sigma = -\sigma$, also

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 0 \tag{2}$$

als charakteristische Winkelbedingung für Polygone des Typs B.

Unter $\eta = \varphi(x)$ werde jetzt eine analytische Funktion verstanden, die die Halbebene $J(x) > 0$ konform auf das Gebiet $\mathfrak{G}_\eta$ abbildet. Geht man durch linear-gebrochene Transformation von der Halbebene zum Inneren des Einheitskreises einer x^*-Ebene über[3]), so muß sich bei der Abbildung auf die η-Ebene eine eineindeutige und stetige Ränderzuordnung ergeben. In der x-Ebene seien mit a_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ diejenigen Punkte der reellen Achse bezeichnet, die den Bereichecken η_ν entsprechen:

$$\eta_\nu = \varphi(a_\nu) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Dabei darf angenommen werden, daß keine der Stellen a_ν in den uneigentlichen Punkt $x = \infty$ fällt. Ferner werde der dem Nullpunkt der η-Ebene entsprechende Punkt im Inneren der oberen Halbebene mit $x = l$ bezeichnet:

$$\varphi(l) = 0 \qquad (J(l) > 0).$$

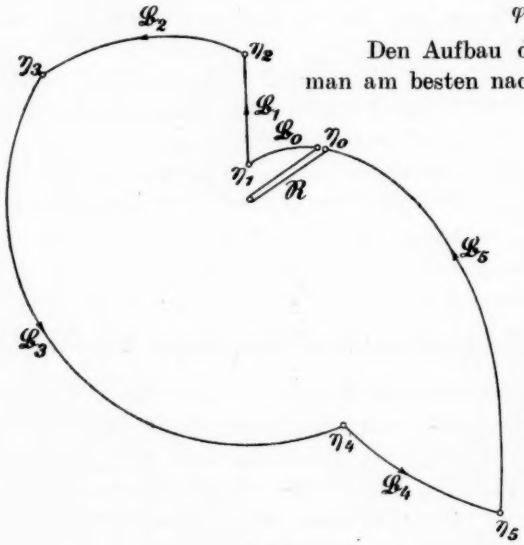


Fig. 1

Den Aufbau der Abbildungsfunktion $\varphi(x)$ überblickt man am besten nach Übergang zur Veränderlichen

$$t = \log \eta. \tag{3}$$

Zur eindeutigen Erklärung des Logarithmus muß die η-Ebene längs einer von $\eta = 0$ nach $\eta = \infty$ laufenden Linie geschlitzt werden. Dieser Schlitz werde vom Nullpunkt aus längs einer geradlinigen Strecke $\mathfrak{R}$ durch $\mathfrak{G}_\eta$ geführt, bis man den Rand in einem Punkt η_0 trifft, und dann so fortgesetzt, daß er nicht wieder in das Gebiet $\mathfrak{G}_\eta$ eintritt[4]) (Fig. 1). Es empfiehlt sich an dieser Stelle, η_0 mit keiner der Bereichecken zusammenfallen zu lassen[5]). Dem längs $\mathfrak{R}$ eingeschlitzten Bereich $\mathfrak{G}'_\eta$ entspricht in der t-Ebene ein schlichtes Gebiet $\mathfrak{G}'_t$; dabei gehen die Schlitzufer $\mathfrak{R}^+$ und $\mathfrak{R}^-$ in zwei Halbgeraden über, die die Richtung der Halbachse $t < 0$ haben und deren Ausgangspunkte t_0^+ und t_0^- der Bedingung

$$t_0^+ - t_0^- = 2\pi i$$

[3]) Diese Transformation ist hier nur eingeschaltet, um durchweg von einer stetigen Ränderzuordnung sprechen zu können und damit eine gesonderte Formulierung für den Punkt $x = \infty$ zu vermeiden.

[4]) Diese Fortsetzung ist nicht immer geradlinig möglich.

[5]) Bei der Behandlung spezieller Abbildungsaufgaben, deren Parameterprobleme am einfachsten an Hand der geometrischen Verhältnisse in der t-Ebene diskutiert werden, ist es demgegenüber zweckmäßiger, η_0 in eine Bereichecke zu verlegen, weil man auf diese Weise eine zusätzliche Willkürlichkeit vermeidet.

genügen, und die Spiralbögen werden in geradlinige Strecken übergeführt, die zusammen einen von t_0^- nach t_0^+ führenden Polygonzug $\mathfrak{C}$ ausmachen (Fig. 1*). Die erste und die letzte Strecke dieses Polygonzuges sind parallel und gleichgerichtet; das kann aus der Winkelbedingung (2) geschlossen werden, ergibt sich aber auch unmittelbar aus der Tatsache, daß η_0 keine Ecke des Bereiches $\mathfrak{G}_\eta$ sein soll.

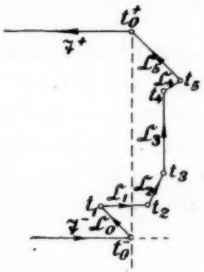


Fig. 1*

Die Funktion $\eta = \varphi(x)$ läßt die Strecke $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{G}_\eta$ als Bild eines analytischen Kurvenbogens $\mathfrak{K}$ erscheinen, der bei $x = l$ beginnt, ganz in der oberen Halbebene verläuft und in einem Punkt $x_0 \neq a_\nu$ auf der reellen Achse endet. Demnach bildet die Funktion $t = \log \varphi(x)$ die längs $\mathfrak{K}$ eingeschlitzte obere x-Halbebene so auf den Bereich $\mathfrak{G}_t'$ ab, daß die Schlitzufer längs $\mathfrak{K}$ den beiden Halbgeraden entsprechen, während die einzelnen Intervalle der Achse reeller x in die Teilstrecken des Polygonzuges $\mathfrak{C}$ übergeführt werden. Die Ableitung

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$$

ist eine in der Halbebene $J(x) > 0$ eindeutige analytische Funktion, die wegen

$$\varphi(l) = 0, \qquad \varphi'(l) \neq 0$$

bei $x = l$ einen einfachen Pol mit dem Residuum 1 besitzt und sich sonst im Inneren der oberen Halbebene überall regulär verhält. Hinsichtlich des Verhaltens auf dem Rande entnimmt man der Abbildung, daß $\operatorname{arc} \frac{dt}{dx}$ für reelles x abschnittsweise konstant ist und nur an den Stellen $x = a_\nu$ Sprünge um $\alpha_\nu \pi$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ macht[6]). Demnach läßt sich $\frac{dt}{dx}$ auf Grund der bekannten Schlußweise von H. A. Schwarz in der Form

$$\frac{dt}{dx} = C \psi(x)\,(x - a_1)^{-\alpha_1}\,(x - a_2)^{-\alpha_2} \cdots (x - a_n)^{-\alpha_n}$$

darstellen, worin $\psi(x)$ eine in der oberen Halbebene eindeutige, auf der reellen Achse beständig reguläre und reellwertige Funktion bedeutet. Aus den bisherigen Ergebnissen ist zu schließen, daß $\psi(x)$ als einzige Singularität in der oberen Halbebene einen einfachen Pol bei $x = l$ besitzt. Analytische Fortsetzung in die untere Halbebene läßt erkennen, daß $\psi(x)$ auch bei $x = \bar{l}$ einen einfachen Pol aufweist und sich sonst überall regulär verhält. Da dem uneigentlichen Punkt $x = \infty$ ein gewöhnlicher Randpunkt von $\mathfrak{G}_t'$ entspricht, muß $\frac{dt}{dx}$ dort wie x^{-2} gegen Null gehen, und wegen (2) hat dann $\psi(x)$ die gleiche Eigenschaft. Durch diese Angaben ist $\psi(x)$ bis auf einen willkürlichen reellen konstanten Faktor bestimmt, und es kann

$$\psi(x) = \frac{1}{(x - l)(x - \bar{l})}$$

gesetzt werden. In der damit erhaltenen Darstellung

$$\frac{dt}{dx} = C \frac{(x - a_1)^{-\alpha_1}\,(x - a_2)^{-\alpha_2} \cdots (x - a_n)^{-\alpha_n}}{(x - l)(x - \bar{l})} \tag{4}$$

bestimmt sich die Konstante C noch aus der Tatsache, daß das Residuum von $\frac{dt}{dx}$ für den Pol bei $x = l$ den Wert 1 hat.

---

[6]) Bei x_0 tritt kein Sprung ein, weil die erste und letzte Teilstrecke von $\mathfrak{C}$ parallel sind.

Damit ist nun gezeigt, daß die Abbildungsfunktion $\eta = \varphi(x)$ in der Tat bei beliebig vorgegebenem Bildbereich des Typs B die in der Einleitung angegebene, durch (I) und (IIb) beschriebene Gestalt hat.

Nachdem hiermit der allgemeine Ansatz der Abbildungsfunktion angegeben und seine Tragweite erkannt ist, liegt das Schwergewicht einer jeden konkreten Abbildungsaufgabe in der Diskussion des Parameterproblems. Um den Bildbereich nach Vorgabe der Außenwinkel bis auf Drehstreckungen festzulegen, sind noch $n-1$ Angaben erforderlich. Demgegenüber enthält die Abbildungsfunktion $n+2$ reelle Parameter; von diesen können jedoch in jedem Falle drei willkürlich vorgeschrieben werden, da man die Halbebene immer durch eine linear gebrochene Transformation mit reellen Koeffizienten so auf sich selbst abbilden kann, daß drei Randpunkte in vorgeschriebene Lagen kommen. Dies wird man zweckmäßig zu einer formalen Vereinfachung des Abbildungsansatzes ausnutzen, indem man einen der Verzweigungspunkte in den uneigentlichen Punkt $x = \infty$ legt, so daß sich die Anzahl der im Zähler des Integranden auftretenden Faktoren um 1 vermindert.

1.2. Bereiche des Typs C.

Unter $\mathfrak{G}_\eta$ werde jetzt ein einfach zusammenhängendes, schlichtes Gebiet der η-Ebene verstanden, das von n Bögen logarithmischer Spiralen mit dem gemeinsamen Zentrum $\eta = 0$ berandet ist und die Punkte $\eta = 0$ und $\eta = \infty$ im Inneren enthält. Ebenso wie im vorigen Abschnitt erkennt man auch hier, daß die Summe der Außenwinkel $\alpha_\nu \pi$ $(-1 \leq \alpha_\nu < 1)$ für alle derartigen Bereiche den gleichen Wert haben muß. Setzt man alle $\alpha_\nu > -1$ voraus, so ist die zu $\mathfrak{G}_\eta$ komplementäre Punktmenge ein Gebiet des Typs A mit Einschluß des Randes. Für das letztere ist nun die Außenwinkelsumme gleich 2π, und mit Rücksicht auf den umgekehrten Durchlaufungssinn des Randes hat man danach für die Bereiche des Typs C die charakteristische Winkelbedingung

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = -2. \tag{5}$$

Nun bezeichne man wieder mit $\eta = \varphi(x)$ die gesuchte Abbildungsfunktion und nenne die den Bereichecken entsprechenden Punkte der reellen Achse $x = a_\nu$; außerdem seien $x = l_0$ und $x = l_\infty$ die Punkte im Inneren der oberen Halbebene, deren Bilder $\eta = 0$ und $\eta = \infty$ sind. Danach verläuft die weitere Überlegung der von **1.1** parallel. Da die Funktion $\varphi(x)$ bei $x = l_0$ eine einfache Nullstelle, bei $x = l_\infty$ einen einfachen Pol hat, wird ihre logarithmische Ableitung im Punkte l_0 einen einfachen Pol mit dem Residuum 1, bei l_∞ einen solchen mit dem Residuum -1 besitzen. Über das Verhalten der logarithmischen Ableitung auf den Rand erhält man wieder durch Übergang zur Veränderlichen $t = \log \eta$ Aufschluß. Der zur eindeutigen Erklärung dieser Funktion erforderliche, von $\eta = 0$ nach $\eta = \infty$ verlaufende Schlitz $\mathfrak{R}$ wird hier so gelegt, daß er ganz im Inneren von $\mathfrak{G}_\eta$ verläuft[7]). Dann ist $t = \log \eta$ in der vollen, längs $\mathfrak{R}$ geschlitzten η-Ebene eindeutig und bildet diese konform auf ein streifenartiges Gebiet der t-Ebene ab, das zwei erreichbare Randpunkte über $t = \infty$ besitzt und dessen Rand im übrigen aus zwei zueinander punktfremden stückweise glatten Kurvenzügen $\mathfrak{T}^+$ und $\mathfrak{T}^-$ besteht, von denen der eine durch eine Verschiebung um $2\pi i$ in den anderen übergeht. Die Berandung von $\mathfrak{G}_\eta$ bildet sich dabei auf einen geschlossenen, sich selbst nicht überschneidenden Polygonzug aus geradlinigen Strecken ab, der ganz im Inneren des streifenartigen

[7]) Wenn möglich, wird man diesen Schnitt natürlich geradlinig annehmen. Dies ist jedoch mit Rücksicht auf die obige Forderung nicht immer durchführbar. In jedem Falle werden die Kurven, längs deren R verläuft, stückweise glatt vorausgesetzt.

Gebietes liegt. Das Abbild des geschlitzten Gebietes $\mathfrak{G}'_\eta$ ist somit ein (im allgemeinen krummer) Parallelstreifen, in den ein von geraden Strecken berandetes Loch geschnitten ist. Hiermit ergeben sich über das Verhalten von arc $\frac{dt}{dx}$ auf der Achse reeller x die gleichen Aussagen wie in **1.1**, und daraus ist hier zu schließen, daß man

$$\frac{d}{dx}\log\varphi(x) = C\,\frac{(x-a_1)^{-\alpha_1}(x-a_2)^{-\alpha_2}\cdots(x-a_n)^{-\alpha_n}}{(x-l_0)(x-\bar{l}_0)(x-l_\infty)(x-\bar{l}_\infty)} \tag{6}$$

ansetzen kann. Zwischen den hier auftretenden $n+4$ reellen Konstanten $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $R(l_0)$, $J(l_0)$, $R(l_\infty)$, $J(l_\infty)$ bestehen zwei Nebenbedingungen, die zum Ausdruck bringen, daß die Residuen an den Stellen l_0 und l_∞ einander entgegengesetzt gleich sein müssen; die Konstante C ist dann dazu bestimmt, das Residuum bei $x = l_0$ auf 1 zu reduzieren. Damit hat sich die durch die Gleichungen (I) und (IIc) der Einleitung gekennzeichnete Form der Abbildungsfunktion zwangsläufig ergeben.

Natürlich besteht auch hier wieder die Möglichkeit, drei der in der Abbildungsfunktion auftretenden reellen Parameter willkürlich vorzuschreiben, und dann hat man mit Rücksicht auf die beiden schon erwähnten Nebenbedingungen wieder die zu erwartende Anzahl von $n-1$ unabhängigen Parametern. Insbesondere empfiehlt es sich wieder, einen der Verzweigungspunkte a_ν nach $x = \infty$ zu verlegen.

Abschnitt 2.

Lösung spezieller Abbildungsaufgaben.

2.1. Das Zweieck.

In der Ebene der komplexen Veränderlichen

$$\eta = \varrho\, e^{i\vartheta} \tag{7}$$

seien $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ zwei nicht zu Kreisen entartete logarithmische Spiralen mit dem gemeinsamen Zentrum $\eta = 0$; $\gamma_1\pi$ und $\gamma_2\pi$ seien die Winkel zwischen Radiusvektor uud Kurventangente für $\mathfrak{S}_1$ bzw. $\mathfrak{S}_2$, wobei

$$-\tfrac{1}{2} < \gamma_2 < \gamma_1 < \tfrac{1}{2} \tag{8}$$

vorausgesetzt werde. Die Verschiedenheit von γ_1 und γ_2 hat die Existenz abzählbar unendlich vieler Schnittpunkte beider Spiralen zur Folge, von denen einer durch geeignete Normierung nach $\eta = 1$ gebracht werden kann (Fig. 2). Dann lauten die Gleichungen der beiden Spiralen[8]):

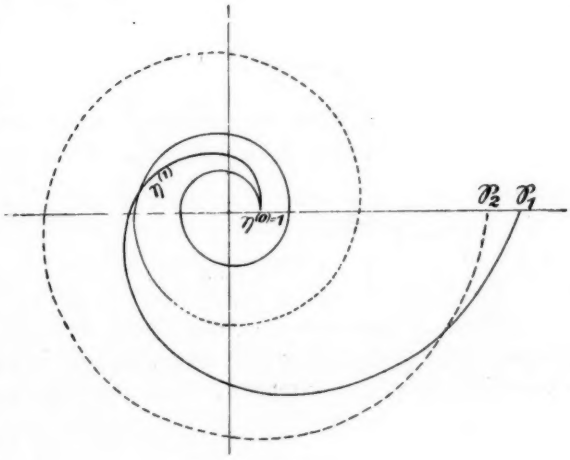


Fig. 2

$$\begin{cases} \vartheta_1(\varrho) = \operatorname{tg}\gamma_1\pi\log\varrho & (\mathfrak{S}_1) \\ \vartheta_2(\varrho) = \operatorname{tg}\gamma_2\pi\log\varrho & (\mathfrak{S}_2), \end{cases} \tag{9}$$

[8]) $\log\varrho$ bedeutet den Hauptwert des Logarithmus.

und man erhält die Gesamtheit ihrer Schnittpunkte, wenn man ϱ aus den Gleichungen

$$\vartheta_1(\varrho) - \vartheta_2(\varrho) = 2\pi\nu \qquad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

bestimmt und die zugehörigen Werte von ϑ aus einer der Spiralengleichungen berechnet. Es stellt sich heraus, daß die Schnittpunkte durch die Potenzen $(\eta^{(1)})^\nu$ $(\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ gegeben sind, wobei der Punkt $\eta^{(1)}$ die Koordinaten

$$(10) \qquad \left| \begin{array}{l} \varrho^{(1)} = e^{\frac{2\pi}{\operatorname{tg}\gamma_1\pi - \operatorname{tg}\gamma_2\pi}} > 1 \\ \vartheta^{(1)} = \dfrac{2\pi \operatorname{tg}\gamma_1\pi}{\operatorname{tg}\gamma_1\pi - \operatorname{tg}\gamma_2\pi} \end{array} \right.$$

besitzt.

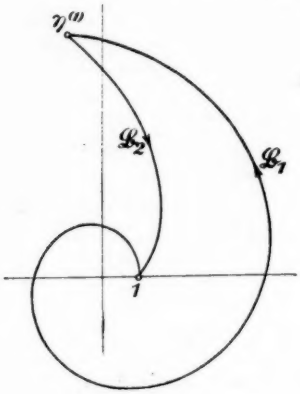


Fig. 3a.

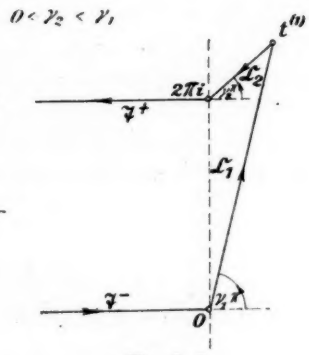


Fig. 3a*.

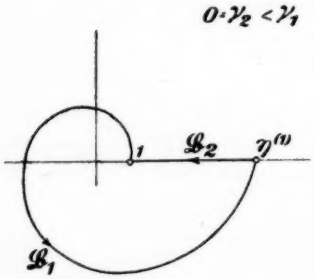


Fig. 3b.

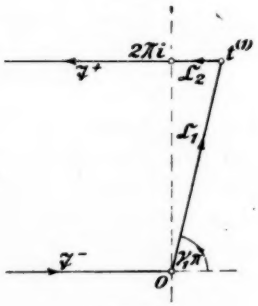


Fig. 3b*.

Durchläuft man, bei $\eta = 1$ beginnend, die Spirale $\mathfrak{S}_1$ bis zum Punkt $\eta^{(1)}$ und kehrt von dort aus längs $\mathfrak{S}_2$ wieder zum Ausgangspunkt zurück, so hat man eine doppeltpunktfreie geschlossene Linie durchlaufen. Da sich hierbei das Argument ϑ um

$$\vartheta_1(\varrho^{(1)}) - \vartheta_2(\varrho^{(1)}) = 2\pi$$

vermehrt, fällt der Nullpunkt in das Innengebiet $\mathfrak{G}_\eta$ dieser Kurve, das bei dem ausgeführten Umlauf zur Linken lag.

Das so entstandene Zweieck stellt den einfachsten Bereich des Typs B dar[9]). Seine geometrischen Bestimmungsstücke sind γ_1 und γ_2. Man bemerkt leicht, daß die Sub-

[9]) Jedes Schnittpunktepaar $((\eta^{(1)})^\nu, (\eta^{(1)})^{\nu+1})$ liefert ein ähnliches Zweieck, das aus dem obigen durch eine Drehstreckung mit dem Fixpunkt $\eta = 0$ hervorgeht.

stitution
$$\gamma_1' = -\gamma_2, \quad \gamma_2' = -\gamma_1$$
eine Spiegelung des Bereiches an der reellen Achse wiedergibt; demnach überblickt man die Möglichkeiten für die Gestalt des Bereiches schon vollständig, wenn man sich darauf beschränkt,
$$\gamma_1 + \gamma_2 \geqq 0$$
anzunehmen (Fig. 3a—d).

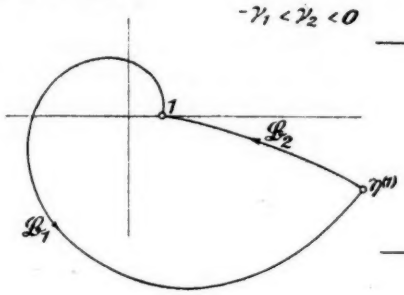


Fig. 3c.

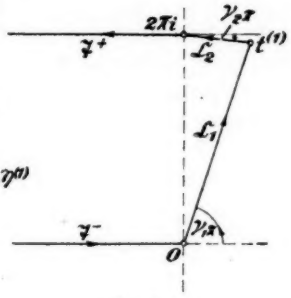


Fig. 3c*.

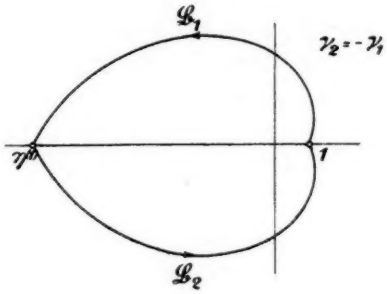


Fig. 3d.

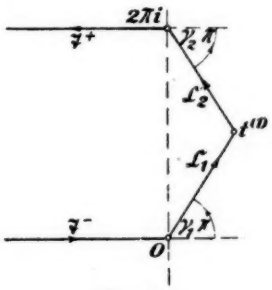


Fig. 3d*

Die einspringende Ecke $\eta = 1$ ist in bezug auf $\eta = 0$ der nächste Randpunkt; daher liegt die Strecke $0 < \eta < 1$ ganz in $\mathfrak{G}_\eta$. Der für den Übergang zur Veränderlichen
$$t = \log \eta$$
notwendige Schlitz werde, vom Nullpunkt ausgehend, entlang dieser Strecke bis $\eta = 1$ geführt und dann außerhalb $\mathfrak{G}_\eta$ bis zum uneigentlichen Punkt fortgesetzt (vgl. Fußnote[4])). Hierdurch geht $\mathfrak{G}_\eta$ in das längs $0 < \eta < 1$ eingeschlitzte Gebiet $\mathfrak{G}_\eta'$ über, dem in der t-Ebene ein geradlinig berandeter Bereich $\mathfrak{G}_t'$ entspricht (Fig. 3a*—d*).

Die Abbildung der Halbebene $J(x) > 0$ auf den Bereich $\mathfrak{G}_\eta$ werde so normiert, daß sich $x = 0$ in $\eta = 1$ und $x = \infty$ in $\eta = \eta^{(1)}$ abbildet und daß ferner die Stelle $x = l$, deren Bild der Punkt $\eta = 0$ ist, auf dem Einheitskreis liegt:

(11) $$l = e^{i\lambda} \quad (0 < \lambda < \pi).$$

Da die Ecke $\eta = 1$ den Außenwinkel $(\gamma_1 - \gamma_2 - 1)\pi$ besitzt, lautet der Abbildungsansatz nach den früheren Entwicklungen:

(12) $$\begin{cases} \eta = e^t \\ t = C \displaystyle\int_0^x \frac{x^{1-\gamma_1+\gamma_2}}{(x - e^{i\lambda})(x - e^{-i\lambda})}\, dx, \end{cases}$$

worin die Potenz auf Grund der Festsetzung

$$0 \leq \operatorname{arc} x \leq \pi \tag{13}$$

eindeutig definiert werden kann und

$$C = 2\,i \sin \lambda\, e^{i(\gamma_1 - \gamma_2 - 1)\lambda} \tag{14}$$

zu setzen ist, damit das Residuum bei $x = e^{i\lambda}$ den Wert 1 annimmt.

Um nun noch den Parameter λ der Abbildungsfunktion durch die Konstanten γ_1 und γ_2 des Bildbereiches auszudrücken, geht man davon aus, daß die Strecke $\mathfrak{C}_1$ (Fig. 3a* bis 3d*) gegen die Halbachse $t > 0$ um den Winkel $\gamma_1 \pi$ gedreht ist und daß sich der gleiche Winkel andererseits auch durch

$$\left(\operatorname{arc} \frac{dt}{dx}\right) x > 0 = \operatorname{arc} C = \frac{\pi}{2} + (\gamma_1 - \gamma_2 - 1)\,\lambda$$

ausdrücken läßt. Das ergibt sofort:

$$\lambda = \frac{\frac{1}{2} - \gamma_1}{1 - \gamma_1 + \gamma_2}\,\pi = \frac{\pi}{2\left(1 + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{1 - 2\gamma_1}\right)}, \tag{15}$$

und mit der Angabe dieses Zusammenhanges ist die Abbildungsaufgabe vollständig gelöst. Die letzte Gleichung läßt erkennen, daß den Bereichen mit $\gamma_1 + \gamma_2 > 0$ (Fig. 3a—c) Parameterwerte $\lambda < \frac{\pi}{2}$, den gespiegelten Bereichen mit $\gamma_1 + \gamma_2 < 0$ dagegen Parameterwerte $\lambda > \frac{\pi}{2}$ zugehören, während dem symmetrischen Bereich der Fig. 3d der Wert $\lambda = \frac{\pi}{2}$ zugeordnet ist[10]).

Zu einem bemerkenswerten Grenzfall gelangt man, wenn $\gamma_2 = \gamma_1 = \gamma$ wird. Hält man die Ecke $\eta = 1$ fest, so rückt die zweite Ecke dann ins Unendliche, und der Bereich geht in die von $\eta = 1$ bis $\eta = \infty$ längs einer logarithmischen Spirale geschlitzte η-Ebene über. Setzt man $\gamma_2 = \gamma_1 = \gamma$ in die gefundene Abbildungsfunktion ein, so erhält man:

$$\left\{\begin{aligned} \eta &= e^t \\ t &= 2 \cos \gamma \pi\, e^{i\gamma\pi} \int_0^x \frac{x}{(x - e^{i(\frac{1}{2}-\gamma)\pi})(x - e^{-i(\frac{1}{2}-\gamma)\pi})}\, dx, \end{aligned}\right. \tag{16a}$$

und indem man die allgemeinen Überlegungen der Einleitung sinngemäß auf diesen Fall überträgt, erkennt man, daß hierdurch in der Tat die Halbebene $J(x) > 0$ auf den beschriebenen Schlitzbereich abgebildet wird[11]). Durch Auswerten des Integrals bringt man die Abbildungsfunktion in die einfachste Gestalt:

$$\eta = \left(1 - \frac{x}{l}\right)\left(1 - \frac{x}{\bar{l}}\right)^{\varepsilon}, \tag{16b}$$

wobei

$$l = e^{i(\frac{1}{2}-\gamma)\pi}, \quad \varepsilon = e^{2i\gamma\pi}$$

zu setzen ist und derjenige Zweig der Potenz $\left(1 - \frac{x}{\bar{l}}\right)^{\varepsilon}$ genommen werden muß, der für $x = 0$ den Wert 1 annimmt.

---

[10]) Diese letztere Tatsache kann natürlich auch unmittelbar aus der Symmetrie geschlossen werden.

[11]) Die Abbildungsfunktion ist für $x = \infty$ wesentlich singulär, der zugeordnete Randpunkt $\eta = \infty$ ist jedoch ein erreichbarer Randpunkt.

2.2. Das Spiralbogendreieck des Typs B.

Der nächsthöhere Fall ist ein von drei Bögen logarithmischer Spiralen berandeter, ganz im Endlichen gelegener Bereich $\mathfrak{G}_\eta$, der das gemeinsame Zentrum $\eta = 0$ seiner Randbögen im Inneren enthält. Die Halbebene $J(x) > 0$ soll auf dieses Gebiet so abgebildet werden, daß den Randpunkten $x = 0$, $x = 1$, $x = \infty$ die Bereichecken zugeordnet sind, die entsprechend mit η_0, η_1, η_∞ bezeichnet seien. Da auf jedem der Spiralbögen der Radius ϱ eine monotone Funktion des Winkels ϑ ist, hat mindestens einer der drei Eckpunkte die Eigenschaft, daß kein anderer Randpunkt dem Nullpunkt näher liegt; es darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß dies für die Ecke η_0 der Fall ist, und zur Normierung werde $\eta_0 = 1$ gesetzt. Dann gilt hinsichtlich der Schlitzung der η-Ebene das gleiche wie in **2.1**, und dem längs $0 < \eta < 1$ eingeschlitzten Gebiet $\mathfrak{G}'_\eta$ entspricht in der Ebene der Veränderlichen $t = \log \eta$ der Bereich $\mathfrak{G}'_t$ (Fig. 4 und 4*). Zwischen den Außenwinkeln $\alpha_0\pi$, $\alpha_1\pi$, $\alpha_\infty\pi$ besteht nach **1.1** die Bedingung:

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_\infty = 0. \tag{17}$$

Zur Festlegung des Bereiches sind noch zwei weitere geometrische Konstanten erforderlich, und es können dazu die Länge c der Strecke $\mathfrak{C}_1$ (Fig. 4*) und der Winkel $\gamma\pi$ zwischen der Strecke $\mathfrak{C}_1$ und der Halbachse $t > 0$ dienen.

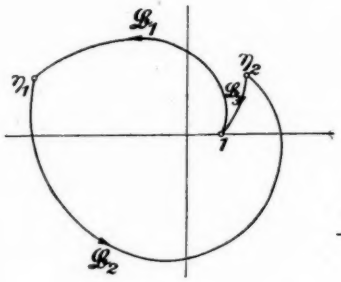


Fig. 4

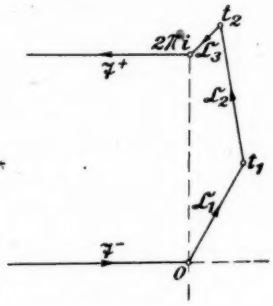


Fig. 4*

Der Abbildungsansatz hat die Form:

$$\begin{cases} \eta = e^t \\ t = C \displaystyle\int_0^x \frac{x^{-\alpha_0}(1-x)^{-\alpha_1}}{(x-l)(x-\bar{l})}\, dx, \end{cases} \tag{18}$$

wobei die Potenzen auf Grund der Festsetzungen

$$0 \leq \operatorname{arc} x \leq \pi, \qquad -\pi \leq \operatorname{arc}(1-x) \leq 0 \tag{19}$$

eindeutig erklärt werden sollen. Das Residuum von $\frac{dt}{dx}$ bei $x = l$ wird durch

$$C = (l - \bar{l})\, l^{\alpha_0} (1-l)^{\alpha_1} \tag{20}$$

auf 1 reduziert.

Da die Strecke $\mathfrak{C}_1$ (Fig. 4*) das Bild des Intervalls $0 < x < 1$ ist, gilt:

$$\gamma\pi = \operatorname{arc} \frac{dt}{dx} \qquad (0 < x < 1)$$

und aus der Reellwertigkeit des Integranden in diesem Intervall ergibt sich hierfür der Wert arc C. Die Abhängigkeit der Konstanten $\gamma\pi$ von der Lage des Punktes l wird also durch

$$(21)\quad \gamma\pi = \frac{\pi}{2} + \alpha_0 \operatorname{arc} l + \alpha_1 \operatorname{arc}(1-l) \quad (0 < \operatorname{arc} l < \pi, \quad -\pi < \operatorname{arc}(1-l) < 0)$$

dargestellt.

Um auch die Konstante c durch die Parameter der Abbildungsfunktion auszudrücken, geht man von

$$(22)\qquad c = t_1 e^{-i\pi\gamma}$$

aus und erhält durch Einsetzen von $t_1 = t(1)$:

$$(23)\qquad c = 2J(l)\,|l|^{\alpha_0}\,|1-l|^{\alpha_1} \int_0^1 \frac{x^{-\alpha_0}(1-x)^{-\alpha_1}}{(x-l)(x-\bar{l})}\,dx,$$

worin natürlich die positiv reellen Werte der Potenzen $|l|^{\alpha_0}$ und $|1-l|^{\alpha_1}$ zu nehmen sind. Zerlegt man den rationalen Faktor des Integranden in Teilbrüche, so ergibt sich:

$$\int_0^1 \frac{x^{-\alpha_0}(1-x)^{-\alpha_1}}{(x-l)(x-\bar{l})}\,dx = \frac{1}{l-\bar{l}}\left(\int_0^1 \frac{x^{-\alpha_0}(1-x)^{-\alpha_1}}{x-l}\,dx - \int_0^1 \frac{x^{-\alpha_0}(1-x)^{-\alpha_1}}{x-\bar{l}}\,dx\right),$$

und daraus gewinnt man für c schließlich die Darstellung

$$(24)\qquad c = 2\,|l|^{\alpha_0}\,|1-l|^{\alpha_1}\,J\left(\int_0^1 \frac{x^{-\alpha_0}(1-x)^{-\alpha_1}}{x-l}\,dx\right).$$

Zur praktischen Auswertung dieser Formel wird man das in ihr auftretende hypergeometrische Integral in hypergeometrische Reihen entwickeln; man findet[12]) für $|l| > 1$:

$$(25\text{a})\quad \int_0^1 \frac{x^{-\alpha_0}(1-x)^{-\alpha_1}}{x-l}\,dx = \frac{\Gamma(1-\alpha_0)\,\Gamma(1-\alpha_1)}{\Gamma(2-\alpha_0-\alpha_1)}\,(-l)^{-1}\,F(1, 1-\alpha_0, 2-\alpha_0-\alpha_1;\ 1/l),$$

für $|l| < 1$:

$$(25\text{b})\quad \int_0^1 \frac{x^{-\alpha_0}(1-x)^{-\alpha_1}}{x-l}\,dx = \frac{\Gamma(-\alpha_0)\,\Gamma(1-\alpha_1)}{\Gamma(1-\alpha_0-\alpha_1)}\,F(1,\ \alpha_0+\alpha_1,\ \alpha_0+1;\ l) + \frac{\pi}{\sin\alpha_0\pi}\,(-l)^{-\alpha_0}\,(1-l)^{-\alpha_1},$$

$$(-\pi < \operatorname{arc}(-l) < 0,\ -\pi < \operatorname{arc}(1-l) < 0).$$

2.3. Besondere Fälle des Vierecks.

Für das Viereck, bei dem neben seinen Außenwinkeln noch drei geometrische Konstanten auftreten, ist das Parameterproblem der konformen Abbildung mit bestimmten Integralen verknüpft, die mehr als vier Verzweigungspunkte besitzen und damit von mehr als einem Parameter abhängig werden. Dieser Umstand macht, ebenso wie beim Geradenpolygon mit fünf oder mehr Ecken, für beliebige Werte der Außenwinkel die Diskussion sehr schwierig, und daher soll im folgenden nur auf spezielle Fälle eingegangen werden, in denen rechtwinklige Ecken vorliegen, so daß man auf elliptische Integrale geführt wird.

---

[12]) Zur Herleitung der hier angewandten Fortsetzungsrelation für die hypergeometrische Funktion vgl. W. v. Koppenfels, Konforme Abbildung einfach zusammenhängender polygonaler Bereiche, Abschn. III⁰ B.

2.31. Das Viereck mit den Außenwinkeln $-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$.

$\mathfrak{G}_\eta$ sei ein endliches, schlichtes, einfach zusammenhängendes Gebiet in der η-Ebene, das von vier Bögen logarithmischer Spiralen berandet wird und deren gemeinsames Zentrum $\eta = 0$ im Inneren enthält. Bei positivem Umlaufen des Gebietes treffe man die Eckpunkte[13]) $\eta_\infty, \eta_1, \eta_3, \eta_2$ in dieser Reihenfolge (Fig. 5a); zu den Ecken η_∞ und η_1 gehöre der Außenwinkel $-\frac{\pi}{2}$, zu η_3 und η_2 der Außenwinkel $\frac{\pi}{2}$. Die Normierung ist so gewählt, daß die einspringende Ecke η_∞ in den Punkt $\eta = 1$ fällt. Dieser Punkt ist dann hier zwar nicht immer der nächste Randpunkt in bezug auf den Nullpunkt, man überzeugt sich jedoch davon, daß die Strecke $0 < \eta < 1$ auf jeden Fall ganz in $\mathfrak{G}_\eta$ verläuft. Die Schlitzung der η-Ebene ist dann in der gleichen Weise wie bei den früheren Abbildungen vorzunehmen. Dem geschlitzten Gebiet der η-Ebene entspricht dann in der t-Ebene der in Fig. 5b dargestellte Bereich. Die Konstanten $\gamma\pi$, c_1, c_2, die den Bereich geometrisch festlegen, unterliegen hierbei folgenden Einschränkungen:

$$
\begin{aligned}
&0 < \gamma < 1, \qquad 0 < c_1 < 2\pi \sin \gamma\pi; \\
(26) \qquad &c_2 > 0 \qquad (0 < \gamma \leq \tfrac{1}{2}) \\
&c_2 > -2\pi \cos \gamma\pi \qquad (\tfrac{1}{2} < \gamma < 1).
\end{aligned}
$$

Als abzubildende Halbebene werde hier, abweichend von der sonstigen Gewohnheit, die untere Halbebene $J(x) < 0$ gewählt, da dies für den späteren Übergang zu elliptischen Funktionen bequemer ist[14]). Die (reellen) Verzweigungspunkte, die den Bereichecken $\eta_\infty, \eta_1, \eta_3, \eta_2$ entsprechen, seien $x = \infty$, $x = e_1$, $x = e_3$, $x = e_2$, wobei natürlich $e_1 > e_3 > e_2$ vorausgesetzt ist und überdies

$$(27) \qquad e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

angenommen werden kann; $x = l$ $(J(l) < 0)$ sei die Stelle im Inneren der unteren Halbebene, deren Bild der Punkt $\eta = 0$ ist. Dann muß nach dem in **1.1** entwickelten Prinzip der Abbildungsansatz wie folgt lauten:

$$
\begin{aligned}
(28) \qquad &\eta = e^t, \\
&t = C \int_\infty^x \sqrt{\frac{x - e_1}{(x - e_2)(x - e_3)}} \, \frac{dx}{(x - l)(x - \bar{l})}.
\end{aligned}
$$

Hierin soll das Wurzelzeichen auf Grund der Festsetzungen

$$(29) \qquad -\pi \leq \operatorname{arc}(x - e_k) \leq 0 \qquad (k = 1, 2, 3)$$

eindeutig festgelegt werden. Der Wert der Konstanten C bestimmt sich wieder in der üblichen Weise aus der Residuumsbedingung

$$(30) \qquad C = (l - \bar{l}) \sqrt{\frac{(l - e_2)(l - e_3)}{l - e_1}}.$$

Nach den Festsetzungen (29) wird für $x > e_1$ der Integrand in (28) positiv reell, und daher ist in diesem Intervall

$$\operatorname{arc} \frac{dt}{dx} = \operatorname{arc} C = \tfrac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3) - \frac{\pi}{2},$$

---

[13]) Die Bezeichnungen der Eckpunkte sind mit Rücksicht auf die später erklärten entsprechenden Bezeichnungen in der x-Ebene gewählt.

[14]) Vgl. Anm. [16]).

wenn zur Abkürzung (Fig. 5c)

$$\operatorname{arc}(l - e_k) = -\lambda_k \qquad (k = 1, 2, 3;\ 0 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_1 < \pi)$$

gesetzt wird.

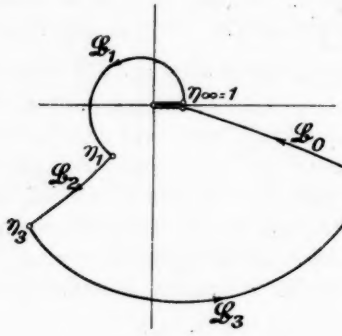


Fig. 5a.

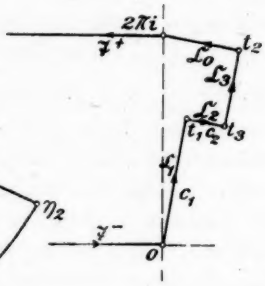


Fig. 5b.

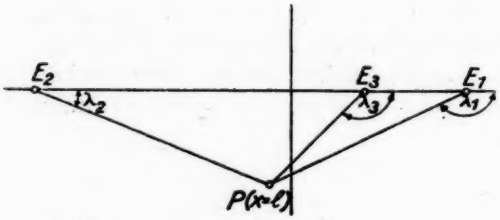


Fig. 5c.

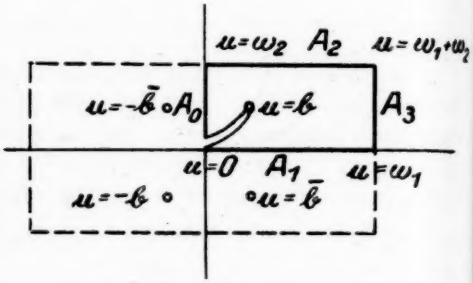


Fig. 5d.

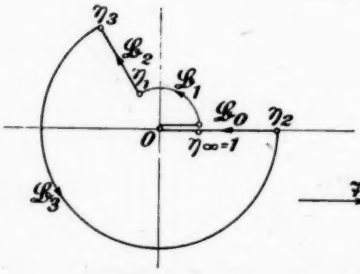


Fig. 6a.

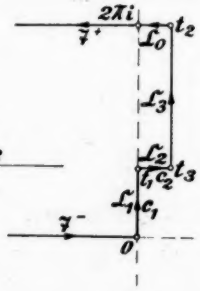


Fig. 6b.

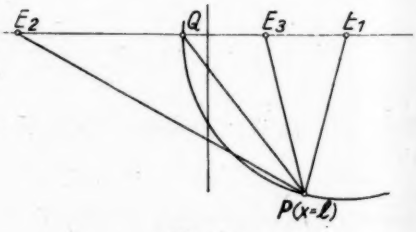


Fig. 6c.

Bedenkt man, daß eine Durchlaufung des Intervalls $\infty > x > e_1$ von rechts nach links einem positiven Durchlaufen der Strecke $\mathfrak{C}_1$ (Fig. 5b) entspricht, so folgt andererseits aus der Figur:

$$\operatorname{arc}\frac{dt}{dx} = (\gamma - 1)\,\pi \qquad (x > e_1).$$

Gleichsetzen beider Ausdrücke führt zu der folgenden Darstellung der geometrischen Konstante γ:

$$\gamma\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3}{2}. \tag{31}$$

An Hand dieser Ergebnisse ist leicht zu überblicken, wie sich der Fall des Kreisbogenvierecks[15]) (Fig. 6a) einordnet: Wenn der in (Fig. 6c mit P bezeichnete) Punkt $x = l$ auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt $E_1\,(x = e_1)$ und dem Radius

$$\varrho_1 = |\sqrt{(e_1 - e_2)\,(e_1 - e_3)}|$$

liegt und Q den zwischen E_2 und E_3 fallenden Schnittpunkt dieses Kreises mit der reellen Achse bezeichnet, so halbiert die Gerade durch P und Q den Winkel $\sphericalangle\, E_2\, P\, E_3$. Danach ist

$$\sphericalangle\, PQE_3 = \frac{\lambda_2 + \lambda_3}{2}\,.$$

Aus der Gleichschenklichkeit des Dreiecks PE_1Q folgt andererseits:

$$\sphericalangle\, PQE_3 = \frac{\lambda_1}{2},$$

und damit ergibt sich nach (31) $\gamma = \frac{1}{2}$. Für diesen Wert von γ werden die Strecken $\mathfrak{C}_\nu$ der Fig. 5b den Achsen parallel (Fig. 6b), d. h. die entsprechenden Spiralbögen in der η-Ebene entarten zu Kreisbögen bzw. zu radialen Strecken. Die Sonderstellung dieses Falles ist dadurch gekennzeichnet, daß die Halbkreislinie $[|x - e_1| = \varrho_1,\ J(x) < 0]$ zur Symmetrielinie wird. Diese Symmetrie bringt es mit sich, daß sich die zusätzlichen komplexen Pole vermeiden lassen, wenn man zunächst den halbierten Bereich abbildet und dann das Spiegelungsprinzip heranzieht[15]).

Zur Auswertung des Abbildungsintegrals (28) werde nun das elliptische Integral erster Gattung

$$u = \tfrac{1}{2} \int_x^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x - e_1)\,(x - e_2)\,(x - e_3)}} \tag{32}$$

als neue unabhängige Veränderliche eingeführt, so daß

$$x = \wp(u) \tag{33}$$

wird[16]). Der Halbebene $J(x) < 0$ entspricht dann das Halbperiodenrechteck der u-Ebene, dessen Ecken $u = 0$, $u = \omega_1$, $u = \omega_1 + \omega_2$, $u = \omega_2$ in dieser Reihenfolge den Punkten ∞, e_1, e_3, e_2 der Achse reeller x zugeordnet sind (Fig. 5d). Es werde noch mit $u = b$ diejenige Stelle im Inneren dieses Rechtecks bezeichnet, die dem Punkt $x = l$ entspricht, so daß

$$l = \wp(b) \tag{34}$$

gilt. Spiegelt man an der unteren Rechtecksseite bzw. an dem ihr entsprechenden Abschnitt $\infty > x > e_1$, so erhält man als Bild des gespiegelten Rechtecks die obere x-Halbebene. Wird $t(x)$ entsprechend analytisch fortgesetzt, so ist zu beachten, daß auf dem Abschnitt der reellen Achse, an dem gespiegelt wird, der Integrand von (28) reellwertig ist. Da dieser bei $x = l$ einen einfachen Pol mit dem Residuum $\frac{1}{C}$ besitzt, liegt danach bei $x = \bar{l}$ wiederum ein einfacher Pol, dessen Residuum $\frac{1}{C}$ beträgt. Die Funktion $\frac{dt}{dx}$,

---

[15]) W. v. Koppenfels, Konforme Abbildung besonderer Kreisbogenvierecke. Journ. f. d. reine und angewandte Mathematik **181**, 83—124 (1939), hier S. 120 und S. 122—124.

[16]) Die verwendete Bezeichnungsweise ist folgende: Perioden der $\wp$-Funktion: $2\omega_1$, $2\omega_2$; $\omega_1 > 0$; $\omega_2/i > 0$. $\wp(\omega_1) = e_1$, $\wp(\omega_2) = e_2$, $\wp(\omega_3) = \wp(\omega_1 + \omega_2) = e_3$. Mit Rücksicht auf $\wp'(u) = -\frac{2}{u^3} + u\,\mathfrak{P}(u)$ ist $\wp'(u) < 0$ für $0 < u < \omega_1$. Da das Vorzeichen der Quadratwurzel auf Grund von (29) festgelegt wurde, erklärt sich aus dieser Bemerkung das Vorzeichen in (32) sowie die Wahl der unteren Halbebene als Ausgangsbereich.

bei der das Residuum bei $x = l$ auf 1 reduziert ist, hat demnach an dem Pol $x = \bar{l}$ das Residuum

$$\frac{C}{\bar{C}} = -e^{i(\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)} = e^{2i\pi\gamma}.$$

Spiegelt man in der u-Ebene noch einmal an der linken Rechtecksseite, so daß das volle Periodenrechteck mit den Ecken $\omega_1 - \omega_2$, $\omega_1 + \omega_2$, $-\omega_1 + \omega_2$, $-\omega_1 - \omega_2$ entsteht, so entspricht dessen linker Hälfte ein zweites Blatt über der x-Ebene, in dem die Quadratwurzel das andere Zeichen hat. Übereinanderliegenden Punkten beider Blätter sind Werte von u zugeordnet, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden; wird die Funktion $t(x)$ in dieses Nebenblatt fortgesetzt, so zeigt sich, daß auch die Werte von t, die zu übereinanderliegenden Punkten der beiden Blätter gehören, einander entgegengesetzt gleich sind. Danach ist t eine ungerade Funktion von u, und die Transformation des Differentials dt muß für $\frac{dt}{du}$ eine gerade elliptische Funktion vierter Ordnung mit den Perioden $2\omega_1$ und $2\omega_2$ ergeben, die bei $u = b$ und bei $u = \bar{b}$ einfache Pole aufweist, wobei zu $u = b$ das Residuum 1, zu $u = \bar{b}$ das Residuum $e^{2i\pi\gamma}$ gehört. Durch diese Angaben ist $\frac{dt}{du}$ bereits vollständig bestimmt, und zwar gilt[17]):

$$\frac{dt}{du} = \frac{\wp'(b)}{\wp(u) - \wp(b)} + e^{2i\pi\gamma} \frac{\wp'(\bar{b})}{\wp(u) - \wp(\bar{b})}.$$

Integration zwischen den Grenzen 0 und u liefert dann:

$$t = \log \frac{\sigma(b-u)}{\sigma(b+u)} + 2\zeta(b)\,u + \left\{\log \frac{\sigma(\bar{b}-u)}{\sigma(\bar{b}+u)} + 2\zeta(\bar{b})\,u\right\} e^{2\pi i\gamma}. \tag{35}$$

Um diese Funktion in dem ursprünglichen, im ersten Quadranten gelegenen Halbperiodenrechteck eindeutig zu erklären, ist dort ein Schnitt angebracht zu denken, der von $u = 0$ nach $u = b$ führt und dessen Ufer den beiden Halbgeraden $\mathfrak{T}^+$ und $\mathfrak{T}^-$ der t-Ebene zugeordnet sind. Im übrigen ist die Ränderzuordnung so, daß den Rechtecksseiten $\mathfrak{A}$, bezüglich die Strecken $\mathfrak{C}$, der t-Ebene entsprechen (Fig. 5b, d).

Als wesentliche Parameter der Abbildungsfunktion sind die beiden reellen Bestimmungsgrößen von l bzw. b und das Doppelverhältnis der vier Verzweigungspunkte ∞, e_1, e_3, e_2 bzw. das (rein imaginäre) Periodenverhältnis $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ anzusehen. Um aus ihnen die geometrischen Konstanten c_1 und c_2 des Bildbereiches zu bestimmen, werden nun die Eckpunkte t_1 und t_3 berechnet. Setzt man

$$(\mathfrak{A}_1) \int_0^{\omega_1} \frac{\wp'(b)}{\wp(u) - \wp(b)}\, du = I_1,$$

$$(\mathfrak{A}_2) \int_{\omega_1}^{\omega_1 + \omega_2} \frac{\wp'(b)}{\wp(u) - \wp(b)}\, du = I_2$$

und beachtet man, daß $\wp(u)$ sowohl auf $\mathfrak{A}_1$ als auch auf $\mathfrak{A}_2$ reellwertig ist, so erhält man:

$$t_1 = I_1 + e^{2i\pi\gamma}\,\overline{I_1} = 2R[I_1 \cdot e^{-i\pi\gamma}]\, e^{i\pi\gamma},$$

$$t_3 - t_1 = I_2 - e^{2i\pi\gamma}\,\overline{I_2} = 2iJ[I_2 \cdot e^{-i\pi\gamma}]\, e^{i\pi\gamma}.$$

---

[17]) Natürlich kann man zu diesem Ergebnis auch rein rechnerisch gelangen, indem man den rationalen Faktor des Integranden in Teilbrüche zerlegt und die Substitution (33) ausführt, wobei (vgl. Anm. [16])) $\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)} = -\frac{1}{2}\wp'(u)$ zu setzen ist.

Führt man zur Berechnung von I_1 und I_2 die Integrationsgrenzen in (35) ein, so ergeben sich mit Rücksicht auf

$$\frac{\sigma(b+\omega_k)}{\sigma(b-\omega_k)} = -e^{-2b\zeta(\omega_k)} \quad (k = 1, 2)$$

zunächst die Darstellungen:

$$I_1 = 2\,[\omega_1\zeta(b) - b\zeta(\omega_1)] + (2\mu+1)\,\pi i,$$
$$I_2 = 2\,[\omega_2\zeta(b) - b\zeta(\omega_2)] + 2\nu\,\pi\, i,$$

worin die ganzen Zahlen μ und ν von b nicht abhängen. Zu ihrer Bestimmung lasse man b gegen ω_2 rücken und beachte, daß bei diesem Grenzübergang wegen $\wp'(\omega_2) = 0$ der Integrand auf $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ gleichmäßig gegen Null strebt, so daß

$$\lim_{b\to\omega_2} I_1 = \lim_{b\to\omega_2} I_2 = 0$$

gilt. Daraus entnimmt man unmittelbar $\nu = 0$ und bei Beachtung der Legendreschen Relation auch $\mu = 0$. Da nun nach Fig. 5b

$$(36) \qquad \begin{cases} t_1 = c_1\, e^{i\pi\gamma} \\ t_3 - t_1 = c_2\, e^{i\pi(\gamma-\frac{1}{2})} \end{cases}$$

ist, ergeben sich die folgenden Parametergleichungen:

$$(37) \qquad \begin{cases} c_1 = 4R\,\{[\omega_1\,\zeta(b) - b\zeta(\omega_1)]\, e^{-i\pi\gamma}\} + 2\pi\sin\gamma\pi \\ c_2 = -4J\,\{[\omega_2\,\zeta(b) - b\zeta(\omega_2)]\, e^{-i\pi\gamma}\}. \end{cases}$$

2.32. Das Viereck mit den Außenwinkeln $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$.

Die jetzt zu behandelnden Bereiche unterscheiden sich von denen des vorigen Abschnitts dadurch, daß hier gleichwinklige Ecken einander gegenseitig trennen. Bleibt

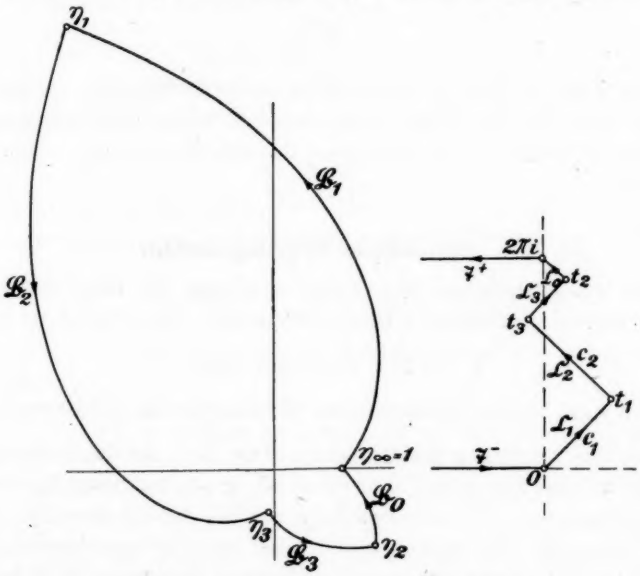


Fig. 7a. Fig. 7b.

man bei den Bezeichnungen von **2.31**, so gehört nun zu den Ecken $\eta_\infty = 1$ und η_3 der Außenwinkel $-\frac{\pi}{2}$, zu η_1 und η_2 der Außenwinkel $\frac{\pi}{2}$ (Fig. 7a). Geht man wieder zur

t-Ebene über und führt die Konstanten γ, c_1 und c_2 auf Grund von (36) ein, so unterliegen diese Konstanten hier den Einschränkungen

$$(38) \qquad 0 < \gamma < \tfrac{1}{2},\ 0 < c_1 < 2\pi \sin \gamma\pi,\ \ -2\pi \cos \gamma\pi < c_2 < 0.$$

Hiermit hängt unmittelbar zusammen, daß eine Entartung zu einem Kreisbogenviereck nicht eintreten kann[18]). Weiterhin verläuft die Überlegung völlig parallel mit der in **2.31** durchgeführten und erfordert keine neue Rechnung. Im Ansatz der Abbildungsfunktion sind e_1 und e_3 zu vertauschen, und dementsprechend tritt an die Stelle von (28):

$$(39) \qquad \begin{cases} \eta = e^t, \\ t = C \displaystyle\int_{\infty}^{x} \sqrt{\frac{x - e_3}{(x - e_1)(x - e_2)}} \frac{dx}{(x - l)(x - \bar{l})}. \end{cases}$$

Die zugehörige Bestimmungsgleichung für C lautet dann:

$$(40) \qquad C = (l - \bar{l}) \sqrt{\frac{(l - e_1)(l - e_2)}{l - e_3}},$$

und da sich hieraus mit den Abkürzungen

$$\operatorname{arc}(l - e_k) = -\lambda_k \qquad (k = 1,\ 2,\ 3)$$

in diesem Fall

$$\operatorname{arc} C = \tfrac{1}{2}(\lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_2 - \pi)$$

ergibt, gewinnt man hier als Bestimmungsgleichung für γ:

$$(41) \qquad \gamma\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{\lambda_3 - \lambda_2 - \lambda_1}{2}.$$

Man erkennt nun, daß hier wie in **2.31**

$$\frac{C}{\bar{C}} = e^{2i\pi\gamma}$$

ist, und aus dieser Tatsache folgt, daß sämtliche weiteren Ergebnisse mit denen von **2.31** gleichlautend sein müssen. Der Unterschied zwischen beiden Fällen liegt nur darin, daß das in den Formeln (35) und (37) auftretende γ das eine Mal aus (31), das andere Mal aus (41) zu bestimmen ist.

2.4. Der endliche Spiralbogenschlitz.

Als Beispiel eines Bereiches vom Typ C wird nun die längs eines Bogens einer logarithmischen Spirale geschlitzte η-Ebene behandelt. Der Schlitz sei gegeben durch

$$(42) \qquad \varrho = e^{\vartheta \operatorname{ctg} \gamma\pi} \ (-\beta \leq \vartheta \leq \beta).$$

Dann sind β und γ die beiden geometrischen Konstanten des Bildbereichs.

Hinsichtlich der Abbildung der Halbebene $J(x) > 0$ auf dieses Gebiet werde festgesetzt, daß sich die Punkte $x = 0$ und $x = \infty$ in die Schlitzenden abbilden sollen. Durch diese Forderung ist die Veränderliche x nur bis auf einen reellen positiven Normierungsfaktor festgelegt, der weiter unten noch zweckentsprechend bestimmt wird. Werden nun mit l_0 und l_∞ diejenigen Stellen im Inneren der oberen Halbebene bezeichnet, die dem Nullpunkt bzw. dem unendlich fernen Punkt der η-Ebene entsprechen, so hat

[18]) Ein Kreisbogenviereck mit diesen Winkeln muß die Grundpunkte des Steinerschen Netzes, dem seine Seiten angehören, hier also die Punkte $\eta = 0$ und $\eta = \infty$, als Randpunkte besitzen.

die Abbildungsfunktion auf Grund der Ausführungen des vorigen Paragraphen die Gestalt:

$$\eta = e^t,$$

$$(43) \qquad t = C \int \frac{x\,d\,x}{(x - l_0)(x - \bar{l}_0)(x - l_\infty)(x - \bar{l}_\infty)}.$$

Hierin unterliegen die Parameter l_0 und l_∞ noch einer Nebenbedingung, die man aus der Forderung errechnen kann, daß die Residuen bei l_0 und l_∞ entgegengesetzt gleich sein müssen (vgl. **1.2**). Es werde jedoch statt dieser Ausrechnung der Weg einer geometrischen Betrachtung eingeschlagen, die sich auf die zentrische Symmetrie des Bildbereichs stützt. Diese besteht darin, daß der Bildbereich durch die Transformation

$$\eta' = \frac{1}{\eta}$$

unter Vertauschung der Schlitzenden in sich übergeführt wird. Der Symmetriepunkt, also der Fixpunkt dieser Transformation, ist $\eta = -1$. Dies muß nun, auf die Veränderliche x übertragen, eine Transformation ergeben, bei der die Halbebene $J(x) > 0$ unter Vertauschung der Punkte 0 und ∞ eineindeutig und konform auf sich selbst abgebildet wird. Eine derartige Transformation hat notwendigerweise die Gestalt

$$x' = -\frac{m^2}{x} \qquad (m > 0),$$

und der in der oberen Halbebene liegende Fixpunkt ist $x = im$. Demnach müssen die Stellen $x = im$ und $\eta = -1$ einander zugeordnet sein, und es werde jetzt über den bei x noch freien Normierungsfaktor so verfügt, daß $m = 1$ ausfällt. Dann lautet die obige Transformation:

$$x' = -\frac{1}{x},$$

und ihr Fixpunkt ist $x = i$. Da nun die Transformation $\eta \to \eta'$ die Punkte $\eta = 0$ und $\eta = \infty$ vertauscht, muß die Transformation $x \to x'$ die entsprechenden Punkte $x = l_0$ und $x = l_\infty$ ebenfalls vertauschen, und daraus folgt die gesuchte Nebenbedingung:

$$(44) \qquad l_0\, l_\infty = -1.$$

Auf Grund der Symmetrie bezüglich $x = i$ bzw. $\eta = -1$ kann der Parameter l_0 auf die rechte obere Viertelebene beschränkt bleiben, und dementsprechend werde

$$(45) \qquad l_0 = L e^{i\lambda} \qquad \left(0 < \lambda \leq \frac{\pi}{2},\ L > 0\right)$$

gesetzt. Die Konstante C in (43), die das Residuum bei $x = l_0$ auf 1 reduzieren soll, erhält dann den Wert:

$$(46) \qquad C = -2(L + L^{-1}) \sin\lambda\, [(L - L^{-1}) \sin\lambda - i(L + L^{-1}) \cos\lambda].$$

Durch Auswerten des Integrals in (43) ergibt sich folgende Darstellung der Abbildungsfunktion:

$$(47) \qquad t = \log\frac{x - l_0}{x - l_\infty} + \frac{C}{C}\log\frac{x - l_0}{x - \bar{l}_\infty} + C'.$$

Darin können die beiden Logarithmen so erklärt werden, daß sie für reelle positive Werte ihrer Argumente reell ausfallen, und die Integrationskonstante C' ist so zu wählen, daß $t(\infty) = -t(0)$ wird.

Um Richtung und Länge des geradlinigen Schlitzes in der t-Ebene zu ermitteln, berechnet man

$$t(\infty) - t(0) = \log \frac{l_\infty}{l_0} + \frac{C}{\bar{C}} \log \frac{\bar{l}_\infty}{\bar{l}_0}.$$

Dieser Ausdruck geht bei Einführung reeller Funktionen mit Berücksichtigung von (44), (45), (46) über in

$$t(\infty) - t(0) = -4 \frac{(L - L^{-1}) \log L \sin \lambda + (L + L^{-1}) \left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) \cos \lambda}{(L - L^{-1})^2 + 4 \cos^2 \lambda} \cdot \tag{48}$$
$$\cdot [(L - L^{-1}) \sin \lambda - i (L + L^{-1}) \cos \lambda].$$

Da sich die Konstanten β und γ offenbar aus

$$\operatorname{ctg} \gamma \pi = \frac{R(t_\infty - t_0)}{J(t_\infty - t_0)}, \qquad 2\beta = J(t_\infty - t_0)$$

ergeben, erhält man für diese danach die Darstellungen:

$$\operatorname{ctg} \gamma \pi = \frac{1 - L^2}{1 + L^2} \operatorname{tg} \lambda, \tag{49}$$

$$\beta = 2 \cos \lambda \frac{L^2 + 1}{(L^2 - 1)^2 + 4 L^2 \cos^2 \lambda} \cdot \left[(L^2 - 1) \log L \sin \lambda + (L^2 + 1) \left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) \cos \lambda\right]. \tag{50}$$

Hiermit ist die Abbildungsaufgabe bis zur Konstantenbestimmung gelöst.

Sind die Verzweigungspunkte l_0 und l_∞ im besonderen so angeordnet, daß in der Halbebene $J(x) > 0$ eine lineare Symmetrie besteht, so treten Entartungen ein. Das ist auf zweierlei Art möglich:

a) Liegen die beiden Pole auf der imaginären Achse, ist also $\lambda = \frac{\pi}{2}$, so wird nach (46) C reell und folglich $C/\bar{C} = 1$, und aus (47) folgt nach richtiger Bestimmung der Integrationskonstante und Übergang zur Veränderlichen η:

$$\eta = \frac{x^2 + L^2}{L^2 x^2 + 1}. \tag{51}$$

Der Spiralbogenschlitz ist hier zu einem geradlinigen Schlitz geworden, dessen Enden bei $\eta = L^2$ und $\eta = L^{-2}$ liegen. In der Formel (49) kommt dieser Ausnahmefall dadurch zum Ausdruck, daß für $\lambda = \frac{\pi}{2}$ der Wert von $\operatorname{ctg} \gamma \pi$ unendlich wird.

b) Fallen die Pole auf den Einheitskreis, ist also $L = 1$, so liefert (46) einen rein imaginären Wert für C, so daß $C/\bar{C} = -1$ wird, und die Abbildungsfunktion lautet:

$$\eta = \frac{1 - e^{2i\lambda} x^2}{x^2 - e^{-2i\lambda}}. \tag{52}$$

Der Bildbereich ist die längs des Kreisbogens $[\varrho = 1, \ -(\pi - 2\lambda) \leq \vartheta \leq \pi - 2\lambda]$ geschlitzte η-Ebene. Die Konstante $\operatorname{ctg} \gamma \pi$ hat für diesen Fall den Wert Null.

Anhang.

Zusammenhang mit linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Der bekannte Zusammenhang zwischen der konformen Abbildung von Kreisbogenpolygonen und der Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom Fuchsschen Typ gibt Anlaß zu der Frage, ob und in welchem Umfang sich dieser auf die hier behandelten Abbildungen überträgt.

Um hierüber Aufschluß zu erhalten, ist der Schwarzsche Differentialausdruck der Abbildungsfunktion zu bilden. Dazu beachte man, daß sich aus

$$\eta(x) = e^{t(x)}$$

die Beziehung

$$[\eta]_x = [t]_x - \tfrac{1}{2}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 \tag{53}$$

ergibt. Da sich nun bei den behandelten Abbildungen der Differentialausdruck $[t]_x$ als rationale Funktion von x ergibt, hat $[\eta]_x$ dann und nur dann dieselbe Eigenschaft, wenn $\left(\frac{dt}{dx}\right)^2$ rational ist; letzteres tritt aber sicher nur dann ein, wenn die Winkel des Bildbereiches ganze Vielfache von $\frac{\pi}{2}$ betragen.

Aus dieser Bemerkung wird bereits klar, daß eine einfache Übertragung des Zusammenhanges zwischen Differentialgleichung und Abbildungsfunktion von den Kreisbogenpolygonen auf die hier behandelten Spiralbogenpolygone im allgemeinen nicht zu erwarten ist. Es ist aber interessant, daß eine solche einfache Übertragung in einem bestimmten Spezialfall eintritt, nämlich beim Viereck des Typs A mit vier rechten Außenwinkeln. Die Abbildungsfunktion hat hierfür die Gestalt:

$$\begin{cases} \eta = e^t, \\ t = C \displaystyle\int_{\infty}^{x} \frac{dx}{\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}, \end{cases} \tag{54}$$

wenn die Bereichecken Bilder der Stellen e_1, e_2, e_3, ∞ der Achse reeller x sind. C bedeutet eine willkürliche komplexe Konstante, deren Arcus die Verdrehung des Rechtecks in der t-Ebene gegen die dortigen Koordinatenachsen angibt. Bei reellen und rein imaginären Werten von C erhält man in der η-Ebene Kreisbogenvierecke.

Bildet man nun aus der obigen Abbildungsfunktion den Schwarzschen Differentialausdruck, so ergibt sich:

$$[\eta]_x = 2q(x) - \tfrac{1}{2}p^2(x) - p'(x), \tag{55}$$

wobei

$$p(x) = \frac{\frac{1}{2}}{x-e_1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-e_2} + \frac{\frac{1}{2}}{x-e_3} \tag{55a}$$

$$q(x) = \frac{-\frac{1}{4}C^2}{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)} \tag{55b}$$

gesetzt ist. Daraus ist zu schließen, daß die Abbildungsfunktion der Quotient zweier linear unabhängigen Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0 \tag{56}$$

ist. Es handelt sich dabei um eine Differentialgleichung des Fuchsschen Typs mit vier Singularitäten, die somit einen akzessorischen Parameter enthält[19]). Dieser hat den Wert $-\frac{1}{4}C^2$. Die obige Bemerkung, nach der sich für reelle Werte dieses Parameters Kreisbogenvierecke ergeben, erscheint an dieser Stelle im Rahmen der Theorie der Fuchsschen Differentialgleichungen ganz selbstverständlich. Das Interessante aber ist, daß die nicht reellen Werte des akzessorischen Parameters hier auf die Abbildungen von Vierecken

[19]) Wegen der Invarianz des Schwarzschen Differentialausdrucks gegen linear-gebrochene Transformationen ergeben sich ebenso solche Bereiche, die aus den behandelten Spiralbogenvierecken durch linear-gebrochene Transformation hervorgehen, deren Berandung sich also aus Bögen von Loxodromen eines Steinerschen Kreisbüschels zusammensetzt.

führen, die anstatt von Kreisbögen von Bögen konzentrischer logarithmischer Spiralen berandet sind[20]).

Es bleibt noch zu prüfen, ob bei rechtwinkligen Polygonen der Typen B und C, wo der Schwarzsche Differentialausdruck ebenfalls eine rationale Funktion wird, die Verhältnisse ähnlich einfach liegen. An den Stellen $x = a_\nu$, die den Bereichecken entsprechen, ändert sich nichts. Für die zusätzlichen Pole ergibt sich folgendes: Hat $\frac{dt}{dx}$ bei $x = p$ einen einfachen Pol mit dem Residuum R, so daß die zugehörige Laurent-Entwicklung die Gestalt

$$\frac{dt}{dx} = \frac{R}{x-p} + c_0 + c_1(x-p) + \cdots$$

annimmt, so lautet die entsprechende Entwicklung der Funktion $[\eta]_x$ nach (53):

$$[\eta]_x = \frac{1}{2}(1-R^2)\frac{1}{(x-p)^2} + \frac{c_0}{R}(1-R^2)\frac{1}{x-p} + \cdots$$

Hieraus ersieht man, daß die Funktion $[\eta]_x$ dann und nur dann bei $x = p$ regulär ist, wenn das Residuum R von $\frac{dt}{dx}$ für diese Stelle gleich $+1$ oder gleich -1 ist. An den Stellen $x = l$ im Inneren der abgebildeten Halbebene, wo im Abbildungsansatz R auf 1 reduziert wurde, verhält sich $[\eta]_x$ also regulär. An den Spiegelpunkten $x = \bar{l}$ dagegen, bei denen das Residuum gleich $C/\bar{C}$ ist (vgl. **2.3**), ergibt sich hiernach im allgemeinen eine zusätzliche, keiner Bereichecke entsprechende Singularität der Differentialgleichung, deren Exponenten nicht reell sind. Diese zusätzlichen Singularitäten fallen nur dann fort, wenn $C/\bar{C} = \pm 1$ ist, also bei reellem oder rein imaginärem C. Das sind aber gerade diejenigen Fälle, in denen der Bildbereich zu einem Kreisbogenpolygon entartet (vgl. **2.31**, **2.32**).

[20]) Diese Gleichung ist in der Literatur über automorphe Funktionen als „Fuchssches Beispiel" bekannt.

Eingegangen 20. Februar 1945.

Neue Beiträge zur ersten Hauptaufgabe der Geodäsie für eine Drehfläche, insbesondere das Erdsphäroid.

Von *H. Voderberg* (†).

1. Einleitung.

Die Drehfläche $\mathfrak{F}$ entstehe durch Umdrehung eines ebenen (stetig differenzierbaren) orientierten Kurvenstücks C

$$x_1 = f_1(r),$$

wobei die x_1-Achse die Drehachse, r der Abstand eines Flächenpunktes von der Drehachse bedeuten. Wir wählen auf $\mathfrak{F}$ als Parameter das orthogonale System der Meridiane und Parallelkreise mit den Krümmungsradien M bzw. r. In Analogie zur Kugel definieren wir:

die „geographische Breite B" als den Winkel der Meridiannormalen mit der Ebene des Parallelkreises, von letzterer aus gezählt;

die „geographische Länge L" als den von einer bestimmten Meridianebene, der $x_2 x_1$-Ebene, aus gerechneten Drehwinkel — der Drehsinn ist so gewählt, daß zusammen mit der positiven Richtung der x_1-Achse eine Rechtsschraubung entsteht —;

das „Azimut α" als den Winkel der Tangente einer Flächenkurve mit der positiven Richtung des Meridians im Berührungspunkt, vom Meridian aus gezählt; der Drehsinn ist entgegengesetzt dem der Länge L.

Die beiden Hauptkrümmungsradien (Meridian- und Querkrümmungshalbmesser) M und N sind Funktionen der geographischen Breite B:

$$(1) \qquad M = M(B), \qquad N = N(B) = r(B) \cdot \sec B;$$

ferner gilt stets:

$$(2) \quad \frac{dr}{dB} = -\varepsilon M \cdot \sin B \quad \text{mit} \quad \varepsilon = \begin{Bmatrix} +1 \\ -1 \end{Bmatrix}, \text{ wenn } C \begin{Bmatrix} \text{konkav} \\ \text{konvex} \end{Bmatrix} \text{ gegen die } x_1\text{-Achse.}$$

Die Drehfläche $\mathfrak{F}$ erhält somit die Parameterdarstellung

$$(3) \qquad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}(B, L) = \{x_1(B), r(B) \cos L, r(B) \sin L\}\ ^{1)}$$

mit $-\frac{\pi}{2} \leq B_1 \leq B \leq B_2 \leq +\frac{\pi}{2}; \quad -\pi \leq L \leq \pi.$

Auf $\mathfrak{F}$ seien gegeben: ein Punkt P_1 mit den geographischen Koordinaten B_1, L_1 und das Bogenstück s einer von ihm unter dem Azimut α_1 auslaufenden geodätischen Linie. Gesucht sind die geographischen Koordinaten B_2, L_2 und das Azimut α_2 für den Endpunkt P_2 des Bogens s.

[1]) Siehe irgendein Lehrbuch der Differentialgeometrie, etwa Kommerell [7] I, S. 80, 110. — Die Hinweise in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

Diese Aufgabe speziell für das Erdsphäroid und die Erdkugel pflegt man als geodätische Übertragung oder erste geodätische Hauptaufgabe zu bezeichnen.

Als Ausgangspunkt für die Lösung dieses Problems dienen gewöhnlich:

1. das simultane Differentialgleichungssystem 1. Ordnung der geodätischen Linie für B, L, α[2]):

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{-dB}{ds} = B' = M^{-1}\cdot\cos\alpha \\ \dfrac{-dL}{ds} = L' = r^{-1}\cdot\sin\alpha \\ \dfrac{-d\alpha}{ds} = \alpha' = -M^{-1}\dfrac{dr}{dB}\cdot L' \end{cases} \quad \text{mit den Anfangswerten} \quad \begin{cases} B_{|s=0} = B_1 \\ L_{|s=0} = L_1 \\ \alpha_{|s=0} = \alpha_1\,; \end{cases}$$

2. das Differentialgleichungssystem 2. Ordnung für B, L:

$$(5)\quad \begin{cases} M^2 B'' = -\dfrac{1}{2}\dfrac{dM^2}{dB}B'^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{dr^2}{dB}\cdot L'^2 \\ r^2 L'' = -\dfrac{dr^2}{dB}\cdot B' L' \end{cases} \quad \text{mit den Anfangsbedingungen} \quad \begin{cases} B_{|s=0} = B_1;\ B'_{|s=0} = \beta_1 = M_1^{-1}\cos\alpha_1 \\ L_{|s=0} = L_1;\ L'_{|s=0} = \lambda_1 = r_1^{-1}\sin\alpha_1, \end{cases}$$

das aus (4) durch Differentiation nach s und Eliminieren von α entsteht[3]). Zur Berechnung von α ziehen wir auch hier die Differentialgleichung 1. Ordnung von (4) heran.

Für eine bestimmte geodätische Linie mit festem Azimut α_1 kann die Integration von (4) bzw. (5) bekanntlich in einer gewissen Umgebung von P_1 durch Potenzreihen in s geleistet werden[4]):

$$(6)\quad \begin{cases} \Delta B = B_2 - B_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i}{i!} s^i \\ \Delta L = L_2 - L_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{i!} s^i \\ \Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_i}{i!} s^i, \end{cases}$$

deren Konvergenz durch die allgemeine Theorie in einer „hinreichend kleinen" Umgebung von P_1 gesichert ist[5]). Unsere Aufgabe besteht somit in der Berechnung der unbestimmten Koeffizienten β_i, λ_i und A_i der Reihen (6).

Nimmt man die als bekannt vorausgesetzten Größen M, r als konvergente Potenzreihen der Breitendifferenz $\Delta B = B_2 - B_1$ an, so ergeben sich die gesuchten Koeffizienten aus (4) bzw. (5) durch Vergleich entsprechender Potenzen von s, oder man macht von der Tatsache Gebrauch, daß nach dem Cauchy-Taylorschen Satz die Koeffizienten von (6) gerade die Werte sind, welche die Ableitungen der Funktionen B, L und α für $s = 0$ annehmen. Somit erhält man eindeutig bestimmte endliche Werte für β_i, λ_i und A_i, wenn man die Differentialgleichungen (5) bzw. (6) wiederholt nach s differentiiert, indem man ihre rechten Seiten als Funktionen von s auffaßt und hierin $s = 0$, $B = B_1$, $L = L_1$, $\alpha = \alpha_1$ setzt.

---

[2]) Vgl. Helmert [2], S. 280, 296; Jordan-Eggert III, 2 [4] §§ 69, 80.

[3]) Vgl. L. Krüger [8].

[4]) Vgl. E. Kamke [5], I, S. 38; J. Horn [3], S. 101.

[5]) Nach Abschätzungen von Helmert [2] sind die ersten fünf (bzw. vier bei $\Delta\alpha$) Koeffizienten für die in der Geodäsie verlangte Genauigkeit erforderlich. Es sei auch auf das in Bälde erscheinende Werk über die mathematischen Theorien der höheren Geodäsie von R. König und Weise im Verlag Springer, Berlin (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften) hingewiesen, in dem neue, genauere und exakte Konvergenzuntersuchungen im Komplexen angestellt werden.

In der geodätischen Literatur werden auf diese Weise oft nach weitgehenden Umformungen gewöhnlich die ersten fünf Koeffizienten der Reihenentwicklungen (6) auf dem Sphäroid (Erdellipsoid) angegeben. Sie sind geschlossene Ausdrücke der Ausgangsbreite B_1, des Ausgangsazimuts α_1 und der Erdkonstanten[6]), aber in den höheren Ordnungen ($i \geq 4$) bereits recht kompliziert und unübersichtlich. Neben dieser Koeffizientendarstellung 1. Art (in geschlossener Form) hat neuerdings H. Boltz[7]) für das Sphäroid eine Koeffizientendarstellung 2. Art angegeben, bei der die Koeffizienten β_i, λ_i und A_i trigonometrische Reihen der Ausgangsbreite B_1 und des Ausgangsazimuts α_1 sind mit Funktionen der Erdkonstanten[8]) als deren Koeffizienten. Dieses Boltzsche Verfahren beruht im Grunde genommen darauf, daß man M und r nach trigonometrischen Funktionen der Vielfachen von B entwickelt annimmt. Es erweist sich als besonders günstig für die rein numerische Berechnung (also allein mit Hilfe von Rechenmaschinen) der Koeffizienten. Als Ausgangspunkt dient ihm das System 1. Ordnung (4).

Im vorliegenden Aufsatz soll die Koeffizientendarstellung 2. Art auf eine andere, besonders durchsichtige Weise hergeleitet werden. Als Ausgangspunkt wird das System 2. Ordnung (5) gewählt. Während Boltz für den praktischen Zweck die ersten fünf bzw. vier Koeffizienten in den ersten Stellen angibt, werden hier zum erstenmal allgemeine Rekursionsformeln für sie aufgestellt und mittels einer geeignet gewählten Symbolik weitgehende Aussagen über den Aufbau der Koeffizienten in der allgemeinsten Form gemacht und schließlich die Koeffizienten in der allgemeinen Form hingeschrieben. Zum Schluß geben wir für die Koeffizienten bis zur 5. Ordnung einschließlich eine genaue Darstellung ohne Vernachlässigung irgendwelcher Glieder mit ihrem genauen Bildungsgesetz und für diejenigen bis zur 3. Ordnung einschließlich ihre explizite Form an.

2. Allgemeine Lösung der Hauptaufgabe auf Drehflächen.

Das ursprüngliche Problem — die verallgemeinerte erste Hauptaufgabe der Geodäsie — haben wir zurückgeführt auf die Berechnung der unbestimmten Koeffizienten β_i, λ_i und A_i der Reihen (6). Denken wir uns jetzt α_1 veränderlich, $\alpha_1 = \varphi$, betrachten wir also das Büschel geodätischer Linien durch P_1, so werden die Koeffizienten β_i, λ_i und A_i homogene Funktionen i-ten Grades in $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, wie man sofort aus (4) erkennen kann. Daher lassen sich ΔB, ΔL und $\Delta\alpha$ in (6) durch Reihen nach den kanonischen Veränderlichen $u = s \cdot \cos\varphi$, $v = s \cdot \sin\varphi$:

$$
(7) \qquad \begin{cases}
\Delta B = B_2 - B_1 = \sum\limits_{i,\,k=0}^{\infty} \dfrac{\beta_{i,\,2k}}{i!\,(2k)!}\, u^i v^{2k} \\[2ex]
\Delta L = L_2 - L_1 = \sum\limits_{i,\,k=0}^{\infty} \dfrac{\lambda_{i,\,2k+1}}{i!\,(2k+1)!}\, u^i v^{2k+1} \\[2ex]
\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = \sum\limits_{i,\,k=0}^{\infty} \dfrac{A_{i,\,2k+1}}{i!\,(2k+1)!}\, u^i v^{2k+1}
\end{cases}
$$

---

[6]) Meist treten die Erdkonstanten in der Form der Exzentrizitäten bzw. deren Quadrate $e^2 = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2}$ oder $e'^2 = \dfrac{a^2 - b^2}{b^2}$ auf, worin a, b ($a > b$) die Halbachsen der Meridianellipse bedeuten.

[7]) Vgl. H. Boltz [1].

[8]) Boltz verwendet Potenzen der Halbachse a und der Exzentrizität e'^2.

oder nach den Riemannschen Normalkoordinaten $\overline{u} = M_1^{-1} \cdot s \cdot \cos\varphi$, $\overline{v} = r_1^{-1} \cdot s \cdot \sin\varphi$:

$$(8)\qquad \begin{cases} \Delta B = B_2 - B_1 = \sum\limits_{i,k=0}^{\infty} \dfrac{\overline{\beta}_{i,2k}}{i!\,(2k)!}\,\overline{u}^i\,\overline{v}^{2k} \\ \Delta L = L_2 - L_1 = \sum\limits_{i,k=0}^{\infty} \dfrac{\overline{\lambda}_{i,2k+1}}{i!\,(2k+1)!}\,\overline{u}^i\,\overline{v}^{2k+1} \\ \Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = \sum\limits_{i,k=0}^{\infty} \dfrac{\overline{A}_{i,2k+1}}{i!\,(2k+1)!}\,\overline{u}^i\,\overline{v}^{2k+1} \end{cases}$$

darstellen. Die hierin auftretenden Koeffizienten $\beta_{i,2k}$, $\lambda_{i,2k+1}$, $A_{i,2k+1}$ und $\overline{\beta}_{i,2k}$, $\lambda_{i,2k+1}$, $\overline{A}_{i,2k+1}$ sind jetzt nur noch Funktionen der Ausgangsbreite B_1. Wegen $\beta_1 s = \overline{u}$, $\lambda_1 s = \overline{v}$ ist die Reihendarstellung (8) besonders vorteilhaft; zwischen den Koeffizienten von (6) und (8) besteht nämlich folgende Abhängigkeit:

$$(9)\qquad \begin{cases} \beta_i = \sum\limits_{\mu=0}^{[i/2]} \binom{i}{2\mu}\ \overline{\beta}_{i-2\mu,\,2\mu}\,\beta_1^{i-2\mu}\,\lambda_1^{2\mu} \\ \lambda_i = \sum\limits_{\mu=0}^{[(i-1)/2]} \binom{i}{2\mu+1}\,\overline{\lambda}_{i-(2\mu+1),\,2\mu+1}\,\beta_1^{i-(2\mu+1)}\,\lambda_1^{2\mu+1}, \\ A_i = \sum\limits_{\mu=0}^{[(i-1)/2]} \binom{i}{2\mu+1}\,\overline{A}_{i-(2\mu+1),\,2\mu+1}\,\beta_1^{i-(2\mu+1)}\,\lambda_1^{2\mu+1} \end{cases}$$

wie sich durch Vergleich entsprechender Potenzen von s ergibt. Die Koeffizienten β_i, λ_i und A_i sind homogene Polynome i-ten Grades in β_1, λ_1.

Diese Tatsache legt es nahe, die Reihen (6) als Lösungen des Systems 2. Ordnung (5) zu betrachten. Durch Auflösung nach B'' und L'' geht (5) über in:

$$(10)\qquad \begin{cases} B'' = -\dfrac{d\lg M}{dB}\,B'^2 - \left(\dfrac{r}{M}\right)\dfrac{d\lg r}{dB}\,L'^2 \\ L'' = -2\dfrac{d\lg r}{dB}\,B'\,L' \end{cases}$$

mit den Anfangswerten

$$(11)\qquad \begin{aligned} B_{|s=0} &= B_1; \quad B'_{|s=0} = \beta_1; \\ L_{|s=0} &= L_1; \quad L'_{|s=0} = \lambda_1. \end{aligned}$$

Die Krümmungsradien M und r setzen wir längs der geodätischen Linie als analytische Funktionen der Breite B voraus. Ist $N = Q \cdot M$, also

$$(12)\qquad r = N \cdot \cos B = M \cdot Q \cdot \cos B,$$

und beachten wir (2), so ergeben (10) und die Differentialgleichung 1. Ordnung für α in (4) das System

$$(13)\qquad \begin{cases} B'' = -\dfrac{d\lg M}{dB}\,B'^2 + \dfrac{\varepsilon}{2} \cdot Q \sin 2B \cdot L'^2 \\ L'' = -2\left(\dfrac{d\lg N}{dB} - \operatorname{tg} B\right) B'\,L' \\ \alpha' = \varepsilon \cdot \sin B \cdot L' \end{cases}$$

mit den Anfangswerten (11) und $\alpha_{|s=0} = \alpha_1$. Durch i-fache Differentiation erhalten wir aus (13) unter Verwendung der Leibnizschen Produktformel:

$$
(14)\quad \begin{cases}
B^{(i+2)} = -\sum\limits_{\nu=0}^{i}\sum\limits_{\mu=0}^{\nu}\binom{i}{\nu}\binom{\nu}{\mu}\Big[B^{(\mu+1)}\,B^{(\nu-\mu+1)}\Big(\dfrac{d\lg M}{dB}\Big)^{(i-\nu)} \\
\qquad\qquad -\dfrac{\varepsilon}{2}L^{(\mu+1)}\,L^{(\nu-\mu+1)}\,(Q\sin 2B)^{(i-\nu)}\Big] \\
L^{(i+2)} = -2\sum\limits_{\nu=0}^{i}\sum\limits_{\mu=0}^{\nu}\binom{i}{\nu}\binom{\nu}{\mu}B^{(\mu+1)}\,L^{(\nu-\mu+1)}\Big(\dfrac{d\lg N}{dB}-\operatorname{tg}B\Big)^{(i-\nu)} \\
\alpha^{(i+1)} = \varepsilon\sum\limits_{\nu=0}^{i}\binom{i}{\nu}L^{(\nu+1)}\sin^{(i-\nu)}B.
\end{cases}
$$

Für $s = 0$ liefert (14) die gesuchten Koeffizienten β_i, λ_i, A_i als Rekursionsformeln:

$$
(15)\quad \boxed{\begin{aligned}
\beta_{i+2} &= -\sum_{\nu=0}^{i}\sum_{\mu=0}^{\nu}\binom{i}{\nu}\binom{\nu}{\mu}\Big[\beta_{\mu+1}\,\beta_{\nu-\mu+1}\Big(\frac{d\lg M}{dB}\Big)^{(i-\nu)}_{s=0}-\frac{\varepsilon}{2}\lambda_{\mu+1}\,\lambda_{\nu-\mu+1}\,(Q\sin 2B)^{(i-\nu)}_{s=0}\Big] \\
\lambda_{i+2} &= -2\sum_{\nu=0}^{i}\sum_{\mu=0}^{\nu}\binom{i}{\nu}\binom{\nu}{\mu}\beta_{\mu+1}\,\lambda_{\nu-\mu+1}\Big(\frac{d\lg N}{dB}-\operatorname{tg}B\Big)^{(i-\nu)}_{s=0} \\
A_{i+1} &= \varepsilon\sum_{\nu=0}^{i}\binom{i}{\nu}\lambda_{\nu+1}\,(\sin B)^{(i-\nu)}_{s=0}.
\end{aligned}}
$$

Sie gelten allgemein auf Drehflächen.

3. Spezialisierung für das Sphäroid und Koeffizientendarstellung 2. Art.

Wir wenden nun die Gleichungen (13) bis (15) auf das Sphäroid an. Auf ihm sind Meridian- und Querkrümmungshalbmesser M und N Funktionen der Breite B und der Erdkonstanten. Wir benutzen eine Darstellung nach R. König[9]):

$$
(16)\quad \begin{cases}
M = \dfrac{a+b}{2}(1-n^2)^2\,F^{-3/2} \\
N = \dfrac{a+b}{2}(1+n)^2\cdot F^{-1/2},
\end{cases}
$$

worin a, b $(a > b)$ die Halbachsen der Meridianellipse, $n = \dfrac{a-b}{a+b}$ ihre sog. dritte Abplattung und F die Fundamentalfunktion

$$
(17)\qquad F = 1 + n^2 + 2n\cdot\cos 2B
$$

bedeuten. Daraus folgt:

$$
(18)\quad \begin{cases}
Q = N\cdot M^{-1} = (1-n)^{-2}\,F \\
\dfrac{d\lg M}{dB} = \dfrac{d\lg F^{-3/2}}{dB} = -\dfrac{3}{2}\dfrac{d\lg F}{dB} \\
\dfrac{d\lg N}{dB} = \dfrac{d\lg F^{-1/2}}{dB} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{d\lg F}{dB}.
\end{cases}
$$

Setzen wir (18) in (13) ein und beachten, daß für das Sphäroid $\varepsilon = +1$ gilt, so erhalten wir das Differentialgleichungssystem:

$$
(19)\quad \begin{cases}
B'' = \dfrac{3}{2}\dfrac{d\lg F}{dB}B'^2 + \dfrac{1}{2}(1-n)^{-2}\,F\sin 2B\cdot L'^2 \\
L'' = \Big(\dfrac{d\lg F}{dB} + 2\operatorname{tg}B\Big)B'\,L' \\
\alpha' = \sin B\cdot L'
\end{cases}
$$

---

[9]) Vgl. Literatur-Verzeichnis [6], insbesondere S. 70. Dort ist berichtigend in F das doppelte Argument zu setzen.

und durch wiederholte Differentiation entsprechend (14):

$$
(20)\quad \begin{cases}
B^{(i+2)} = \sum\limits_{\nu=0}^{i} \sum\limits_{\mu=0}^{\nu} \binom{i}{\nu}\binom{\nu}{\mu} \Big[\frac{3}{2} B^{(\mu+1)} B^{(\nu-\mu+1)} \Big(\frac{d \lg F}{dB}\Big)^{(i-\nu} \\
\qquad + \frac{1}{2}(1-n)^{-2} L^{(\mu+1)} L^{(\nu-\mu+1)} (F \sin 2B)^{(i-\nu)}\Big] \\
L^{(i+2)} = \sum\limits_{\nu=0}^{i} \sum\limits_{\mu=0}^{\nu} \binom{i}{\nu}\binom{\nu}{\mu} B^{(\mu+1)} L^{(\nu-\mu+1)} \Big(\frac{d \lg F}{dB} + 2 \operatorname{tg} B\Big)^{(i-\nu)} \\
\alpha^{(i+1)} = \sum\limits_{\nu=0}^{i} \binom{i}{\nu} L^{(\nu+1)} (\sin B)^{(i-\nu)}.
\end{cases}
$$

Ersetzen wir nach jeder Differentiation sofort die auf der rechten Seite auftretenden zweiten Ableitungen B'', L'' durch die ersten nach (19), so erhalten wir für $s = 0$ die gesuchten Koeffizienten in der Form (9).

Wir ziehen nun die trigonometrische Entwicklung der Fundamentalfunktion $F^{\varkappa}$ heran[10]); sie liefert für $-\pi \leq B \leq +\pi$ eine absolut und gleichmäßig konvergente trigonometrische Reihe

$$
(21)\qquad F^{\varkappa} = c_0^{\varkappa} + 2 \sum_{\lambda=1}^{\infty} c_{2\lambda}^{(\varkappa)} \cos 2\lambda B
$$

mit den Koeffizienten

$$
(22)\qquad c_{2\lambda}^{(\varkappa)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\varkappa}{\nu}\binom{\varkappa}{\nu+\lambda} n^{2\nu+\lambda} \quad \text{für} \quad \lambda \geq 0.
$$

Besonders einfach wird die Reihenentwicklung für $\lg F$:

$$
(23)\qquad \lg F = -2 \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} (-n)^{\lambda} \cdot \cos 2\lambda B.
$$

Somit lassen sich alle Koeffizienten von B' und L' in (19) durch im Intervall $-\pi \leq B \leq +\pi$ absolut und gleichmäßig konvergente Reihen und höchstens endlich viele von ihnen abgespaltete, Singularitäten enthaltende Summanden (hier der Summand $2 \cdot \operatorname{tg} B$) ausdrücken:

$$
(24)\qquad \begin{cases}
B'' = \tau_{20}^{00} B'^2 + \tau_{02}^{00} L'^2 \\
L'' = (\tau_{11}^{00} + 2 \cdot \operatorname{tg} B)\, B' L' \\
\alpha' = \tau_{01}^{01} L'
\end{cases}
$$

mit

$$
(25)\qquad \begin{cases}
\tau_{01}^{01} = \sin B \\
\tau_{20}^{00} = 6 \sum\limits_{\lambda=1}^{\infty} (-n)^{\lambda} \sin 2\lambda B \\
\tau_{02}^{00} = \frac{1}{2}(1-n)^{-2} [(1+n)^2 \sin 2B + n \sin 4B] \\
\tau_{11}^{00} = 4 \sum\limits_{\lambda=1}^{\infty} (-n)^{\lambda} \sin 2\lambda B.
\end{cases}
$$

Die Abhängigkeit von den Erdkonstanten tritt hier nur als Potenz der dritten Abplattung n auf. Daß dadurch die Konvergenz gegenüber derjenigen bei Benutzung von e'^2 verbessert wird, zeigt leicht ein Vergleich der beiden Konstanten, die für das Besselsche Sphäroid

---

[10]) Vgl. R. König [6], insbes. S. 77ff. Dort sind die Glieder $c_{2\lambda} \cos 2\lambda B$ für $\lambda \geq 1$ berichtigend mit dem Faktor 2 zu versehen. Weitergehende Untersuchungen, insbesondere den Konvergenzbereich betreffend, findet man in dem in [5]) genannten Werk von R. König-Weise. Ihm sind auch die Entwicklungen für $\lg F$ entnommen.

von Jordan-Eggert[11]) mit

$$(26)\qquad \begin{aligned} n &= 0,\ 001\ 674\ 184\ 800\ 816 \\ e'^2 &= 0,\ 006\ 719\ 218\ 797\ 065\ 5 \end{aligned}$$

angegeben werden.

Wegen der absoluten und gleichmäßigen Konvergenz der trigonometrischen Reihen τ können wir (24) gliedweise differenzieren und so die folgenden Ableitungen erhalten. Ihr Aufbau soll noch genauer untersucht werden.

4. Das Rechnen mit trigonometrischen Reihen unter Verwendung einer geeigneten Symbolik.

Wir führen das Symbol τ_{lm}^{ik} ein für eine im Intervall $-\pi \leq B \leq +\pi$ absolut und gleichmäßig konvergierende Reihe der Form

$$(27)\qquad \tau_{lm}^{ik} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \gamma_{2\lambda+k}^{(lm)} \sin\left[(2\lambda + k)\, B + i\frac{\pi}{2}\right] \quad \text{mit} \quad \begin{cases} i, k = 0, 1 \\ l, m = 0, 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

wobei die Koeffizienten $\gamma_{2\lambda+k}^{(lm)}$ Funktionen von n, etwa Potenzreihen in n sind.

Durch Anwendung der bekannten Additionstheoreme erhält man für (27) die folgenden Multiplikations- und Differentiationsregeln:

$$(28)\qquad \begin{cases} \tau_{lm}^{ik} \cdot \tau_{l'm'}^{ik} = \tau_{l''m''}^{10} \\ \tau_{lm}^{ik} \cdot \tau_{l'm'}^{i'k} = \tau_{l''m''}^{00} \\ \tau_{lm}^{ik} \cdot \tau_{l'm'}^{ik'} = \tau_{l''m''}^{11} \\ \tau_{lm}^{ik} \cdot \tau_{l'm'}^{i'k'} = \tau_{l''m''}^{01} \end{cases} \quad \text{wobei} \quad i \neq i',\ k \neq k'$$

und

$$(29)\qquad \frac{d}{dB}(\tau_{lm}^{ik}) = \dot{\tau}_{lm}^{ik} = {}'\tau_{lm}^{i'k}$$

mit der Festlegung, daß bei $'\tau$ die Summierung erst bei 1 beginnen soll, und unter Verwendung der Gleichungen

$$(30)\qquad \begin{cases} \sin 2\lambda B \cdot \operatorname{tg} B = -\cos 2\lambda B - 2\sum\limits_{\nu=1}^{\lambda-1} (-1)^{\lambda-\nu} \cos 2\nu B - (-1)^{\lambda} \\ \cos 2\lambda B \cdot \operatorname{tg} B = \sin 2\lambda B + 2\sum\limits_{\nu=1}^{\lambda-1} (-1)^{\lambda-\nu} \sin 2\nu B + (-1)^{\lambda} \operatorname{tg} B \\ \sin (2\lambda+1) B \cdot \operatorname{tg} B = -\cos (2\lambda+1) B - 2\sum\limits_{\nu=0}^{\lambda-1} (-1)^{\lambda-\nu} \cos (2\nu+1) B + (-1)^{\lambda} \sec B \\ \cos (2\lambda+1) B \cdot \operatorname{tg} B = \sin (2\lambda+1) B + 2\sum\limits_{\nu=0}^{\lambda-1} (-1)^{\lambda-\nu} \sin (2\nu+1) B \\ \sin 2\lambda B \cdot \sec B = -2\sum\limits_{\nu=0}^{\lambda-1} (-1)^{\lambda-\nu} \sin (2\nu+1) B \\ \cos 2\lambda B \cdot \sec B = -2\sum\limits_{\nu=0}^{\lambda-1} (-1)^{\lambda-\nu} \cos (2\nu+1) B + (-1)^{\lambda} \sec B \\ \sin (2\lambda+1) B \cdot \sec B = 2\sum\limits_{\nu=1}^{\lambda} (-1)^{\lambda-\nu} \sin 2\nu B + (-1)^{\lambda} \operatorname{tg} B \\ \cos (2\lambda+1) B \sec B = 2\sum\limits_{\nu=1}^{\lambda} (-1)^{\lambda-\nu} \cos 2\nu B + (-1)^{\lambda} \end{cases}$$

[11]) Siehe Literatur-Verzeichnis [4], III, 1, S. 241/243.

gelten die Produktbildungen:

$$(31)\qquad \begin{cases} \tau_{lm}^{ik} \cdot \operatorname{tg} B = \tau_{l'm'}^{i'k} + (i-k)\, c_{l'm'} \cdot \operatorname{tg} B \cdot \sin^{-i'} B \\ \tau_{lm}^{ik} \cdot \sec B = \tau_{l'm'}^{ii'} + (i-k)\, c_{l'm'} \cdot \operatorname{tg} B \cdot \sin^{-i'} B . \end{cases}$$

Mittels dieses Symbols τ_{lm}^{ik} und seiner Rechengesetze (28) bis (31) gelingt es uns, den Aufbau der Koeffizienten β_i, λ_i und A_i der Darstellung 2. Art in der allgemeinsten Form zu ergründen und sie niederzuschreiben.

5. Der Aufbau der Koeffizienten der Darstellung zweiter Art in der allgemeinsten Form.

Wir denken uns jetzt die wiederholte Differentiation von (24) ausgeführt und die nach jeder Differentiation darin auftretenden zweiten Ableitungen sofort durch B', L' nach (24) ersetzt und beachten die Gesetze (28) bis (31) für die im Intervall $-\pi \leq B \leq +\pi$ absolut und gleichmäßig konvergierenden Reihen τ_{lm}^{ik}. Dann erhalten wir aus dem System zweiter Ordnung

$$(32)\qquad \begin{cases} B'' = \tau_{20}^{00} B'^2 + \tau_{02}^{00} L'^2 \\ L'' = (\tau_{11}^{00} + 2!\operatorname{tg} B)\, B' L' \\ \alpha'' = (\bar{\tau}_{11}^{11} + 2!\sec B)\, B' L', \end{cases}$$

worin

$$(33)\qquad \bar{\tau}_{11}^{11} + 2!\sec B = \dot{\bar{\tau}}_{01}^{01} + \bar{\tau}_{01}^{01}(\tau_{11}^{00} + 2\operatorname{tg} B)$$

ist das System 3. Ordnung

$$(34)\qquad \begin{cases} B''' = \tau_{30}^{10} B'^3 + \tau_{12}^{10} B' L'^2 \\ L''' = (\tau_{21}^{10} + 3!\operatorname{tg}^2 B)\, B'^2 L' + \tau_{03}^{10} L'^3 \\ \alpha''' = (\bar{\tau}_{21}^{01} + 3!\operatorname{tg} B \sec B)\, B'^2 L' + \bar{\tau}_{03}^{01} L'^3, \end{cases}$$

worin

$$(35)\qquad \begin{cases} \tau_{30}^{10} = \dot{\tau}_{20}^{00} + 2(\tau_{20}^{00})^2 \\ \tau_{12}^{10} = \dot{\tau}_{02}^{00} + 2(\tau_{20}^{00} + \tau_{11}^{00})\, \tau_{02}^{00} + 4\, \tau_{02}^{00} \operatorname{tg} B \\ \tau_{21}^{10} = \dot{\tau}_{11}^{00} + 2 + (\tau_{20}^{00} + \tau_{11}^{00})\, \tau_{11}^{00} + 2(\tau_{20}^{00} + \tau_{11}^{00}) \operatorname{tg} B \\ \tau_{03}^{10} = \tau_{11}^{00} \tau_{02}^{00} + 2\tau_{02}^{00} \operatorname{tg} B \\ \bar{\tau}_{21}^{01} = \dot{\bar{\tau}}_{11}^{11} + (\tau_{20}^{00} + \tau_{11}^{00})\, \bar{\tau}_{11}^{11} + 2\,(\tau_{20}^{00} + \tau_{11}^{00}) \sec B + 2\,\bar{\tau}_{11}^{11} \operatorname{tg} B \\ \bar{\tau}_{03}^{01} = \bar{\tau}_{11}^{11} \tau_{02}^{00} + 2\tau_{02}^{00} \sec B . \end{cases}$$

Allgemein entsteht das System n-ter Ordnung:

$$(36)\qquad \begin{cases} B^{(n)} = \sum\limits_{\mu=0}^{[n/2]} \Big(\tau_{n-2\mu,\,2\mu}^{\varepsilon 0} + 2\mu \operatorname{tg}^{\varepsilon+1} B \sum\limits_{i=1}^{[n/2]-\mu} c_{n-2\mu,\,2\mu}^{(i)} \operatorname{tg}^{2(i-1)} B\Big) B'^{n-2\mu} L'^{2\mu} \\ L^{(n)} = \sum\limits_{\mu=0}^{[(n-1)/2]} \Big(\tau_{n-(2\mu+1),\,2\mu+1}^{\varepsilon 0} + (2\mu+1)\operatorname{tg}^{\varepsilon+1} B \sum\limits_{i=1}^{[n/2]-\mu} c_{n-(2\mu+1),\,2\mu+1}^{(i)} \operatorname{tg}^{2(i-1)} B\Big) B'^{n-(2\mu+1)} L' \\ \alpha^{(n)} = \sum\limits_{\mu=0}^{[(n-1)/2]} \Big(\bar{\tau}_{n-(2\mu+1),2\mu+1}^{\eta 1} + (2\mu+1)\operatorname{tg}^{1-\eta} B \sec B \sum\limits_{i=1}^{[n/2]-\mu} \bar{c}_{n-(2\mu+1),2\mu+1}^{(i)} \sec^{2(i-1)} B\Big) B'^{n-(2\mu+1)} L' \end{cases}$$

worin

$$(37)\qquad \varepsilon = n - 2\left[\frac{n}{2}\right], \quad \eta = n \pm 1 - 2\left[\frac{n \pm 1}{2}\right].$$

Von der Richtigkeit des Systems (36) für $n = 2$ und 3 überzeugt man sich sofort durch Vergleich mit (32) und (34); für beliebiges n ist der Nachweis durch vollständige Induktion zu führen. Wir zeigen, daß aus (36) der gleiche Aufbau für $B^{(n+1)}$, $L^{(n+1)}$ und $\alpha^{(n+1)}$ folgt, indem wir (36) nach s differenzieren, B'', L'' und α'' nach (32) durch B', L' ersetzen

und die Regeln (28) bis (31) beachten. Die Differentiation ergibt:

$$
(38)\quad
\begin{cases}
B^{(n+1)} = \sum\limits_{\mu=0}^{[n/2]} \Big\{ \Big(\dot{\tau}^{\varepsilon 0}_{n-2\mu,2\mu} + 2\mu \operatorname{tg}^{\varepsilon} B \sum\limits_{i=1}^{[n/2]-\mu} (2i-1+\varepsilon)\, c^{(i)}_{n-2\mu,2\mu} \operatorname{tg}^{2(i-1)} B (1+\operatorname{tg}^2 B) \Big) B'^{n+1-2\mu} L'^{2\mu} \\
\quad + \Big(\tau^{\varepsilon 0}_{n-2\mu,2\mu} + 2\mu \operatorname{tg}^{\varepsilon+1} B \sum\limits_{i=1}^{[n/2]-\mu} c^{(i)}_{n-2\mu,2\mu} \operatorname{tg}^{2(i-1)} B \Big) \Big((n-2\mu)\, \tau^{00}_{20} + 2\mu (\tau^{00}_{11} + 2 \operatorname{tg} B) \Big) B'^{n+1-2\mu} L'^{2\mu} \\
\quad + (n-2\mu)\, \tau^{00}_{02} \Big(\tau^{\varepsilon 0}_{n-2\mu,2\mu} + 2\mu \operatorname{tg}^{\varepsilon+1} B \sum\limits_{i=1}^{[n/2]-\mu} c^{(i)}_{n-2\mu,2\mu} \operatorname{tg}^{2(i-1)} B \Big) B'^{n-1-2\mu} L'^{2(\mu+1)} \Big\} \\
L^{(n+1)} = \sum\limits_{\mu=0}^{[(n-1)/2]} \Big\{ \Big(\dot{\tau}^{\varepsilon 0}_{n-(2\mu+1),2\mu+1} \\
\quad + (2\mu+1) \operatorname{tg}^{\varepsilon} B \sum\limits_{i=1}^{[n/2]-\mu} (2i-1+\varepsilon)\, c^{(i)}_{n-(2\mu+1),2\mu+1} \operatorname{tg}^{2(i-1)} B (1+\operatorname{tg}^2 B) \Big) B'^{n+1-(2\mu+1)} L'^{2\mu+1} \\
\quad + \Big(\tau^{\varepsilon 0}_{n-(2\mu+1),2\mu+1} + (2\mu+1) \operatorname{tg}^{\varepsilon+1} B \sum\limits_{i=1}^{[n/2]-\mu} c^{(i)}_{n-(2\mu+1),2\mu+1} \operatorname{tg}^{2(i-1)} B \Big) \cdot \\
\quad \cdot \Big((n-(2\mu+1))\, \tau^{00}_{20} + (2\mu+1)(\tau^{00}_{11} + 2 \operatorname{tg} B) \Big) B'^{n+1-(2\mu-1)} L'^{2\mu+1} \\
\quad + \Big(n-(2\mu+1) \Big) \tau^{00}_{02} \Big(\tau^{\varepsilon 0}_{n-(2\mu+1),2\mu+1} + (2\mu+1) \operatorname{tg}^{\varepsilon+1} B \sum\limits_{i=1}^{[n/2]-\mu} c^{(i)}_{n-(2\mu+1),2\mu+1} \operatorname{tg}^{2(i-1)} B \Big) B'^{n-1-(2\mu+1)} L'^{2\mu+3} \Big\} \\
\alpha^{(n+1)} = \sum\limits_{\mu=0}^{[(n-1)/2]} \Big\{ \Big(\dot{\tau}^{\eta 1}_{n-(2\mu+1),2\mu+1} \\
\quad + (2\mu+1) \operatorname{tg}^{-\eta} B \sec B \sum\limits_{i=1}^{[n/2]-\mu} c^{(i)}_{n-(2\mu+1),2\mu+1} \sec^{2(i-1)} B \Big((2i-\eta) \sec^2 B - (2i-1) \Big) B'^{n+1-(2\mu+1)} L'^{2\mu+1} \\
\quad + \Big(\tau^{\eta 1}_{n-(2\mu+1),2\mu+1} + (2\mu+1) \operatorname{tg}^{1-\eta} B \sec B \sum\limits_{i=1}^{[n/2]-\mu} c^{(i)}_{n-(2\mu+1),2\mu+1} \sec^{2(i-1)} B \Big) \cdot \\
\quad \cdot \Big((n-(2\mu+1)\, \tau^{00}_{20} + (2\mu+1) \Big(\tau^{00}_{11} + (2 \operatorname{tg} B) \Big) B'^{n+1-(2\mu+1)} L'^{2\mu+1} + (n-(2\mu+1)) \cdot \\
\quad \cdot \tau^{00}_{02} \Big(\tau^{\eta 1}_{n-(2\mu+1),2\mu+1} + (2\mu+1) \operatorname{tg}^{1-\eta} B \sec B \sum\limits_{i=1}^{[n/2]-\mu} c^{(i)}_{n-(2\mu+1),2\mu+1} \sec^{2(i-1)} B \Big) B'^{n-1-(2\mu+1)} L'^{2\mu+3} \Big\}
\end{cases}
$$

oder unter Berücksichtigung der Gleichungen

$$
(39)\qquad 1-\varepsilon = \eta, \quad \left[\frac{n}{2}\right] + \varepsilon = \left[\frac{n+1}{2}\right], \quad \left[\frac{n-1}{2}\right] + \eta = \left[\frac{n}{2}\right],
$$

die aus (37) folgen:

$$
(40.1)\quad
\begin{cases}
B^{(n+1)} = \sum\limits_{\mu=0}^{[(n+1)/2]-1+\eta} \Big\{ \dot{\tau}^{\varepsilon 0}_{n-2\mu,2\mu} + \tau^{\varepsilon 0}_{n-2\mu,2\mu} \Big((n-2\mu)\, \tau^{00}_{20} + 2\mu (\tau^{00}_{11} + 2 \operatorname{tg} B) \Big) \\
\quad + 2\mu \operatorname{tg}^{\varepsilon+1} B \sum\limits_{i=1}^{[(n+1)/2]-\varepsilon-\mu} c^{(i)}_{n-2\mu,2\mu} \operatorname{tg}^{2(i-1)} B \Big((n-2\mu)\, \tau^{00}_{20} + 2\mu\, \tau^{00}_{11} \Big) \\
\quad + 2\mu \operatorname{tg}^{\varepsilon+2} B \sum\limits_{i=1}^{[(n+1)/2]-\varepsilon-\mu} \Big((2i-\eta+4\mu)\, c^{(i)}_{n-2\mu,2\mu} \operatorname{tg}^{2(i-1)} B \\
\quad + (2i-\eta)\, c^{(i)}_{n-2\mu,2\mu} \operatorname{tg}^{2(i-2)} B \Big) \Big\} B'^{n+1-2\mu} L'^{2\mu} \\
\quad + \sum\limits_{\mu=1}^{[(n+1)/2]+\eta} \Big\{ \Big(n-2(\mu-1) \Big) \tau^{00}_{02} \tau^{\varepsilon 0}_{n-2(\mu-1),2(\mu-1)} \\
\quad + 2(\mu-1) \Big(n-2(\mu-1) \Big) \operatorname{tg}^{\varepsilon+1} B \sum\limits_{i=1}^{[(n+1)/2]+\eta+\mu} c^{(i)}_{n-2(\mu-1),2(\mu-1)} \operatorname{tg}^{2(i-1)} B\, \tau^{00}_{02} \Big\} B'^{n+1-2\mu} L'^{2\mu}
\end{cases}
$$

$$
(40.2)\quad
\begin{cases}
L^{(n+1)} = \sum\limits_{\mu=0}^{[n/2]-\eta} \Big\{ \dot{\tau}^{\varepsilon 0}_{n-(2\mu+1),2\mu+1} + \tau^{\varepsilon 0}_{n-(2\mu+1),2\mu+1} \Big(\Big(n-(2\mu+1) \Big) \tau^{00}_{20} + (2\mu+1)(\tau^{00}_{11} + 2 \operatorname{tg} B) \Big) \\
\quad + (2\mu+1) \operatorname{tg}^{\varepsilon+1} B \sum\limits_{i=1}^{[(n+1)/2]-\varepsilon-\mu} c^{(i)}_{n-(2\mu+1),2\mu+1} \operatorname{tg}^{2(i-1)} B \Big(\Big(n-(2\mu+1) \Big) \tau^{00}_{20} + (2\mu+1)\, \tau^{00}_{11} \Big) \\
\quad + (2\mu+1) \operatorname{tg}^{\varepsilon+2} B \sum\limits_{i=1}^{[(n+1)/2]-\varepsilon-\mu} \Big(\Big(2i-\eta+2(2\mu+1) \Big) c^{(i)}_{n-(2\mu+1),2\mu+1} \operatorname{tg}^{2(i-1)} B \\
\quad + (2i-\eta)\, c^{(i)}_{n-(2\mu+1),2\mu+1} \operatorname{tg}^{2(i-2)} B \Big) \Big\} B'^{n+1-(2\mu+1)} L'^{2\mu+1} \\
\quad + \sum\limits_{\mu=1}^{[n/2]+\varepsilon} \Big\{ \Big(n-(2\mu-1) \Big) \tau^{00}_{02} \tau^{\varepsilon 0}_{n-(2\mu-1),2\mu-1} \\
\quad + (2\mu-1) \Big(n-2(\mu-1) \Big) \operatorname{tg}^{\varepsilon+1} B \sum\limits_{i=1}^{[(n+1)/2]+\eta-\mu} c^{(i)}_{n-(2\mu-1),2\mu-1} \operatorname{tg}^{2(i-1)} B \cdot \tau^{00}_{02} \Big\} B'^{n+1-(2\mu+1)} L'^{2\mu+1}
\end{cases}
$$

$$
(40.3)\left\{
\begin{aligned}
\alpha^{(n+1)} = \sum_{\mu=0}^{[n/2]-\eta} \Big\{ & \bar{\tau}^{\eta 1}_{n-(2\mu+1),\,2\mu+1} + \bar{\tau}^{\eta 1}_{n-(2\mu+1),\,2\mu+1}\big(\big(n-(2\mu+1)\big)\,\tau^{00}_{20} + (2\mu+1)\,(\tau^{00}_{11} + 2\,\mathrm{tg}\,B)\big) \\
& + (2\mu+1)\,\mathrm{tg}^{1-\eta} B \sec B \sum_{i=1}^{[(n+1)/2]-\varepsilon-\mu} \bar{c}^{(i)}_{n-(2\mu+1),\,2\mu+1} \sec^{2(i-1)} B \big(\big(n-(2\mu+1)\big)\,\tau^{00}_{20} + (2\mu+1) \\
& + (2\mu+1)\,\mathrm{tg}^{-\eta} B \sec B \sum_{i=1}^{[(n+1)/2]-\varepsilon-\mu} \bar{c}^{(i)}_{n-(2\mu+1),\,2\mu+1} \big(\big(2i-\eta+2\,(2\mu+1)\big) \sec^{2i} B \\
& - \big(2\,(i+2\mu)+1\big) \sec^{2(i-1)} B\big)\Big\}\, B'^{\,n+1-(2\mu+1)}\, L'^{\,2\mu+1} \\
& + \sum_{\mu=1}^{[n/2]+\varepsilon} \Big\{ \big(n-(2\mu-1)\big)\,\tau^{00}_{02}\,\bar{\tau}^{\eta 1}_{n-(2\mu-1),\,2\mu-1} \\
& + (2\mu-1)\big(n-(2\mu-1)\big)\,\mathrm{tg}^{1-\eta} B \sec B \sum_{i=1}^{[(n+1)/2]+\eta-\mu} \bar{c}^{(i)}_{n-(2\mu-1),\,2\mu-1} \sec^{2(i-1)} B\, \tau^{00}_{02}\Big\}\, B'^{\,n+1-(2\mu+1)}\, L'^{\,2\mu}
\end{aligned}
\right.
$$

Nun erhält man durch einfache Umrechnungen und unter Beachtung der Beziehungen (37):

$$
(41)\left\{
\begin{aligned}
& 2\mu \cdot \mathrm{tg}^{\varepsilon+2} B \sum_{i=1}^{[(n+1)/2]-\varepsilon-\mu} (2i-\eta+4\mu)\, c^{(i)}_{n-2\mu,\,2\mu}\, \mathrm{tg}^{2(i-1)} B \\
& = 2\mu\ \mathrm{tg}^{\eta+1} B \sum_{i=2-\eta}^{[(n+1)/2]-\mu} \big(2(i-1)+\eta+4\mu\big)\, c^{(i+1-\eta)}_{n-2\mu,\,2\mu}\, \mathrm{tg}^{2(i-1)} B \\
& 2\mu \cdot \mathrm{tg}^{\varepsilon+2} B \sum_{i=1}^{[(n+1)/2]-\varepsilon-\mu} (2i-\eta)\, c^{(i)}_{n-2\mu,\,2\mu}\, \mathrm{tg}^{2(i-1)} B \\
& = 2\mu\ \mathrm{tg}^{\eta+1} B \sum_{i=1-\eta}^{[(n+1)/2]-1-\mu} (2i+\eta)\, c^{(i+\eta)}_{n-2\mu,\,2\mu}\, \mathrm{tg}^{2(i-1)} B
\end{aligned}
\right.
$$

und

$$
(42)\left\{
\begin{aligned}
& (2\mu+1)\,\mathrm{tg}^{-\eta} B \sec B \sum_{i=1}^{[(n+1)/2]-\varepsilon-\mu} \big(2i-\eta+2\,(2\mu+1)\big)\, \bar{c}^{(i)}_{n-(2\mu+1),2\mu+1} \sec^{2i} B \\
& \quad = (2\mu+1)\,\mathrm{tg}^{1-\varepsilon} B \sec B \sum_{i=1+\varepsilon}^{[(n+1)/2]-\mu} (2i-\varepsilon+1+4\mu)\, \bar{c}^{(i-\varepsilon)}_{n-(2\mu+1),2\mu+1} \sec^{2(i-} \\
& (2\mu+1)\,\mathrm{tg}^{-\eta} B \sec B \sum_{i=1}^{[(n+1)/2]-\varepsilon-\mu} \big(2(i+2\mu)+1\big)\, \bar{c}^{(i)}_{n-(2\mu+1),2\mu+1} \sec^{2(i-1)} B \\
& \quad = (2\mu+1)\,\mathrm{tg}^{1-\varepsilon} B \sec B \sum_{i=\varepsilon}^{[(n+1)/2]-1-\mu} \big(2(i-\varepsilon)+3\big)\, \bar{c}^{(i+1-\varepsilon)}_{n-(2\mu+1),2\mu+1} \sec^{2(i-}
\end{aligned}
\right.
$$

und da nach wiederholter Anwendung von (31) die Beziehungen

$$
(43)\quad
\left\{
\begin{aligned}
& \tau^{00} \cdot \mathrm{tg}^{2i-1+\varepsilon} B = \sum_{\nu=1}^{i-\eta} c^{(\nu)}\, \mathrm{tg}^{2\nu+1-\eta} B + \tau^{\eta 0} \\
& \tau^{00} \cdot \mathrm{tg}^{1-\eta} B \sec^{2i-1} B = \mathrm{tg}^{1-\varepsilon} B \sum_{\nu=1}^{i-\eta} c^{(\nu)} \sec^{2\nu+\varepsilon-1} B + \tau^{\varepsilon 1}
\end{aligned}
\right.
$$

gelten, so ergibt sich

$$
(44)\left\{
\begin{aligned}
& 2\mu\,\mathrm{tg}^{\varepsilon+1} B \sum_{i=1}^{[(n+1)/2]-\varepsilon-\mu} c^{(i)}_{n-2\mu,2\mu}\, \mathrm{tg}^{2(i-1)} B \big((n-2\mu)\,\tau^{00}_{20} + 2\mu\,\tau^{00}_{11}\big) \\
& \quad = \tau^{\eta 0} + 2\mu\,\mathrm{tg}^{1+\eta} B \sum_{i=2-\eta}^{[(n+1)/2]-\eta-\mu} c^{(i)} \mathrm{tg}^{2(i-1)} B \\
& (2\mu+1)\,\mathrm{tg}^{1-\eta} B \sec B \sum_{i=1}^{[(n+1)/2]-\varepsilon-\mu} \bar{c}^{(i)}_{n-(2\mu+1),2\mu+1} \sec^{2(i-1)} B \big(n-(2\mu+1)\,\tau^{00}_{20} + (2\mu+1 \\
& \quad = \bar{\tau}^{\varepsilon 1} + (2\mu+1)\,\mathrm{tg}^{1-\varepsilon} B \sec B \sum_{i=2-\varepsilon}^{[(n+1)/2]-\varepsilon-\mu} \bar{c}^{(i)} \sec^{2(i-1)} B\,,
\end{aligned}
\right.
$$

wobei wir alle gleichartigen trigonometrischen Reihen sofort zu einer Reihe $\tau^{\eta 0}$ bzw. zusammengefaßt und die auftretenden Faktoren von $\mathrm{tg}^{2(i-1)} B$ bzw. $\sec^{2(i-1)} B$ der fachheit halber kurz mit $c^{(i)}$ bzw. $\bar{c}^{(i)}$ bezeichnet haben. Setzen wir nun (41), (42) und

in (40) ein, so folgt unter Beachtung von (28) und nach Umordnung und entsprechenden Zusammenfassungen in der Tat:

$$
(45)\left\{
\begin{aligned}
B^{(n+1)} &= \sum_{\mu=0}^{[(n+1)/2]} \Big(\tau^{\eta 0}_{n+1-2\mu,2\mu} + 2\mu\,\mathrm{tg}^{\eta+1} B \sum_{i=1}^{[(n+1)/2]-\mu} c^{(i)}_{n+1-2\mu,2\mu}\,\mathrm{tg}^{2(i-1)} B\Big) B'^{n+1-2\mu} L'^{2\mu} \\
L^{(n+1)} &= \sum_{\mu=0}^{[n/2]} \Big(\tau^{\eta 0}_{n+1-(2\mu+1),2\mu+1} \\
&\quad + (2\mu+1)\,\mathrm{tg}^{\eta+1} B \sum_{i=1}^{[(n+1)/2]-\mu} c^{(i)}_{n+1-(2\mu+1),2\mu+1}\,\mathrm{tg}^{2(i-1)} B\Big) B'^{n+1-(2\mu+1)} L'^{2\mu+1} \\
\alpha^{(n+1)} &= \sum_{\mu=0}^{[n/2]} \Big(\bar{\tau}^{\varepsilon 1}_{n+1-(2\mu+1),2\mu+1} \\
&\quad + (2\mu+1)\,\mathrm{tg}^{1-\varepsilon} B \sec B \sum_{i=1}^{[(n+1)/2]-\mu} c^{(i)}_{n+1-(2\mu+1),2\mu+1} \sec^{2(i-1)} B\Big) B'^{n+1-(2\mu+1)} L'^{2\mu+1},
\end{aligned}
\right.
$$

und damit ist die Richtigkeit von (36) nachgewiesen.

Für $s = 0$ liefert das System (36) die gesuchten Koeffizienten β_n, λ_n und A_n als homogene Polynome n-ten Grades in β_1, λ_1:

$$
(46)\quad
\boxed{
\begin{aligned}
\beta_n &= \sum_{\mu=0}^{[n/2]} \Big(\tau^{\varepsilon 0}_{n-2\mu,\,2\mu} \\
&\quad + 2\mu \cdot \mathrm{tg}^{\varepsilon+1} B_1 \sum_{i=1}^{[n/2]-\mu} c^{(i)}_{n-2\mu,\,2\mu} \cdot \mathrm{tg}^{2(i-1)} B_1\Big) \beta_1^{n-2\mu} \lambda_1^{2\mu} \\
\lambda_n &= \sum_{\mu=0}^{[(n-1)/2]} \Big(\tau^{\varepsilon 0}_{n-(2\mu+1),\,2\mu+1} \\
&\quad + (2\mu+1)\,\mathrm{tg}^{\varepsilon+1} B_1 \sum_{i=1}^{[n/2]-\mu} c^{(i)}_{n-(2\mu+1),\,2\mu+1}\,\mathrm{tg}^{2(i-1)} B_1\Big) \beta_1^{n-(2\mu+1)} \lambda_1^{2\mu+1} \\
A_n &= \sum_{\mu=0}^{[(n-1)/2]} \bar{\tau}^{\eta 1}_{n-(2\mu+1),\,2\mu+1} \\
&\quad + (2\mu+1)\,\mathrm{tg}^{1-\eta} B_1 \sec B_1 \sum_{i=1}^{[n/2]-\mu} \bar{c}^{(i)}_{n-(2\mu+1),\,2\mu+1} \sec^{2(i-1)} B_1\Big) \beta_1^{n-(2\mu+1)} \lambda_1^{2\mu+1}
\end{aligned}
}
$$

und durch Vergleich mit (9) die Koeffizienten $\bar{\beta}_{i,\,2k}$, $\bar{\lambda}_{i,\,2k+1}$ und $\bar{A}_{i,\,2k+1}$:

$$
(47)\quad
\boxed{
\begin{aligned}
&\binom{n}{2\mu} \bar{\beta}_{n-2\mu,\,2\mu} = \tau^{\varepsilon 0}_{n-2\mu,\,2\mu} + 2\mu\,\mathrm{tg}^{\varepsilon+1} B_1 \sum_{i=1}^{[n/2]-\mu} c^{(i)}_{n-2\mu,\,2\mu} \cdot \mathrm{tg}^{2(i-1)} B_1 \cdot \\
&\quad \cdot \binom{n}{2\mu+1} \bar{\lambda}_{n-(2\mu+1),\,2\mu+1} \\
&= \tau^{\varepsilon 0}_{n-(2\mu+1),\,2\mu+1} + (2\mu+1)\,\mathrm{tg}^{1+\varepsilon} B_1 \sum_{i=1}^{[n/2]-\mu} c^{(i)}_{n-(2\mu+1),\,2\mu+1} \cdot \mathrm{tg}^{2(i-1)} B_1 \cdot \\
&\quad \cdot \binom{n}{2\mu+1} \bar{A}_{n-(2\mu+1),\,2\mu+1} \\
&= \bar{\tau}^{\eta 1}_{n-(2\mu+1),\,2\mu+1} + (2\mu+1)\,\mathrm{tg}^{1-\eta} B_1 \sec B_1 \sum_{i=1}^{[n/2]-\mu} \bar{c}_{n-(2\mu+1),\,2\mu+1} \sec^{2(i-1)} B_1,
\end{aligned}
}
$$

wobei in den Reihen τ und $\bar{\tau}$ stets das Argument B durch B_1 zu ersetzen ist.

6. Ausführliche Darstellung der Koeffizienten bis zur 5. Ordnung einschließlich mit ihren genauen Bildungsgesetzen.

Wegen der besseren Übersicht geben wir die Koeffizienten $\bar{\beta}_{i,\,2k}$, $\bar{\lambda}_{i,\,2k+1}$ und $\bar{A}_{i,\,2k+1}$ für die nach den Riemannschen Normalkoordinaten $\bar{u}$, $\bar{v}$ fortschreitenden Reihen (8) ausführlich bis zur 5. Ordnung einschließlich an, wie sie (47) liefert:

$$
(48)\quad
\begin{cases}
\beta_{10} = 1 & \lambda_{01} = 1 & \bar{A}_{01} = \bar{\tau}^{01}_{01} \\
\beta_{20} = \tau^{00}_{20} & \lambda_{11} = \frac{1}{2}\,(\tau^{00}_{11} + 2!\,\mathrm{tg}\,B_1) & \bar{A}_{11} = \frac{1}{2}\,(\bar{\tau}^{11}_{11} + 2!\,\sec B_1) \\
\beta_{02} = \tau^{00}_{02} & & \\
\beta_{30} = \tau^{10}_{30} & \lambda_{21} = \frac{1}{3}\,(\tau^{10}_{21} + 3!\,\mathrm{tg}^2\,B_1) & \bar{A}_{21} = \frac{1}{3}\,(\bar{\tau}^{01}_{21} + 3!\,\mathrm{tg}\,B_1 \sec B_1) \\
\beta_{12} = \frac{1}{3}\,\tau^{10}_{12} & \lambda_{03} = \tau^{10}_{03} & \bar{A}_{03} = \bar{\tau}^{01}_{03} \\
\beta_{40} = \tau^{00}_{40} & \lambda_{31} = \frac{1}{4}\,(\tau^{00}_{31} + c^{(1)}_{31}\mathrm{tg}\,B_1 + 4!\,\mathrm{tg}^3\,B_1) & \bar{A}_{31} = \frac{1}{4}\,(\bar{\tau}^{11}_{31} + \bar{c}^{(1)}_{31} \sec B_1 + 4!\,\sec^3 B_1) \\
\beta_{22} = \frac{1}{6}\,(\tau^{00}_{22} + 2c^{(1)}_{22}\,\mathrm{tg}\,B_1) & \lambda_{13} = \frac{1}{4}\,(\tau^{00}_{13} + 3c^{(1)}_{13}\,\mathrm{tg}\,B_1) & \bar{A}_{13} = \frac{1}{4}\,(\bar{\tau}^{11}_{13} + 3\bar{c}^{(1)}_{13} \sec B_1) \\
\beta_{04} = \tau^{00}_{04} & & \\
\beta_{50} = \tau^{10}_{50} & \lambda_{41} = \frac{1}{5}\,(\tau^{10}_{41} + c^{(1)}_{41}\mathrm{tg}^2\,B_1 + 5!\,\mathrm{tg}^4\,B_1) & \bar{A}_{41} = \frac{1}{5}\,(\bar{\tau}^{01}_{41} + c^{(1)}_{41}\mathrm{tg}\,B_1 \sec B_1 + 5!\,\mathrm{tg}\,B_1 \sec \\
\beta_{32} = \frac{1}{10}\,(\tau^{10}_{32} + 2c^{(1)}_{32}\mathrm{tg}^2\,B_1) & \lambda_{23} = \frac{1}{10}\,(\tau^{10}_{23} + 3c^{(1)}_{23}\,\mathrm{tg}^2\,B_1) & \bar{A}_{23} = \frac{1}{10}\,(\bar{\tau}^{01}_{23} + 3\bar{c}^{(1)}_{23}\,\mathrm{tg}\,B_1 \sec B_1) \\
\beta_{14} = \frac{1}{5}\,\tau^{10}_{14} & \lambda_{05} = \tau^{10}_{05} & \bar{A}_{05} = \bar{\tau}^{01}_{05}
\end{cases}
$$

Die trigonometrischen Reihen τ^{ik}_{lm} und $\bar{\tau}^{ik}_{lm}$ enthalten das Argument B_1 statt B und s rechnen sich nacheinander aus den vorhergehenden nach (33), (35) und

$$
(49)\quad
\begin{cases}
\tau^{00}_{40} = \dot{\tau}^{10}_{20} + 3\tau^{10}_{30}\,\tau^{00}_{20} \\
\tau^{00}_{22} + 2c^{(1)}_{22}\,\mathrm{tg}\,B_1 = \dot{\tau}^{10}_{12} + 3\tau^{10}_{30}\,\tau^{00}_{02} + \tau^{10}_{12}\,(\tau^{00}_{20} + 2\tau^{00}_{11} + 4\mathrm{tg}\,B_1) \\
\tau^{00}_{04} = \tau^{10}_{12}\,\tau^{00}_{02} \\
\tau^{00}_{31} + c^{(1)}_{31}\,\mathrm{tg}\,B_1 = \dot{\tau}^{10}_{21} + (\tau^{10}_{21} + 6\mathrm{tg}^2\,B_1)\,(2\tau^{00}_{20} + \tau^{00}_{11}) + 2\,(\tau^{10}_{21} + 6)\,\mathrm{tg}\,B_1 \\
\tau^{00}_{13} + 3c^{(1)}_{13}\,\mathrm{tg}\,B_1 = \dot{\tau}^{10}_{03} + 2\,(\tau^{10}_{21} + 6\mathrm{tg}^2\,B_1)\,\tau^{00}_{02} + 3\,(\tau^{00}_{11} + 2\mathrm{tg}\,B_1)\,\tau^{10}_{03} \\
\tau^{11}_{31} + \bar{c}^{(1)}_{31} \sec B_1 = \bar{\dot{\tau}}^{01}_{21} + (\tau^{01}_{21} + 6\mathrm{tg}\,B_1 \sec B_1)\,(2\tau^{00}_{20} + \tau^{00}_{11}) + 2\tau^{01}_{21}\,\mathrm{tg}\,B_1 - 6 \sec B_1 \\
\tau^{11}_{13} + 3\bar{c}^{(1)}_{13} \sec B_1 = \bar{\dot{\tau}}^{01}_{03} + 2(\tau^{01}_{21} + 6\mathrm{tg}\,B_1 \sec B_1)\,\tau^{00}_{02} + 3(\tau^{00}_{11} + 2\mathrm{tg}\,B_1)\,\tau^{01}_{03} \\
\tau^{10}_{50} = \dot{\tau}^{00}_{40} + 4\tau^{00}_{40}\,\tau^{00}_{20} \\
\tau^{10}_{32} = \dot{\tau}^{00}_{22} + 2c^{(1)}_{22} + 4\tau^{00}_{40}\,\tau^{00}_{02} + 2(\tau^{00}_{22} + 2c^{(1)}_{22}\,\mathrm{tg}\,B_1)\,(\tau^{00}_{20} + \tau^{00}_{11}) + 4\tau^{00}_{22}\,\mathrm{tg}\,B_1 \\
\tau^{10}_{14} = \dot{\tau}^{00}_{04} + 2(\tau^{00}_{22} + 2c^{(1)}_{22}\,\mathrm{tg}\,B_1)\,\tau^{00}_{02} + 4\tau^{00}_{04}\,(\tau^{00}_{11} + 2\mathrm{tg}\,B_1) \\
\tau^{10}_{41} + c^{(1)}_{41}\,\mathrm{tg}^2\,B_1 = \dot{\tau}^{00}_{31} + c^{(1)}_{31} + (\tau^{00}_{31} + c^{(1)}_{31}\,\mathrm{tg}\,B_1 + 4!\,\mathrm{tg}^3\,B_1)\,(3\tau^{00}_{20} + \tau^{00}_{11}) \\
\qquad\qquad + 2(\tau^{00}_{31} + c^{(1)}_{31}\,\mathrm{tg}\,B_1)\,\mathrm{tg}\,B_1 + (c^{(1)}_{31} + 3\cdot 4!)\,\mathrm{tg}^2\,B_1 \\
\tau^{10}_{23} + 3c^{(1)}_{23}\,\mathrm{tg}^2\,B_1 = \dot{\tau}^{00}_{13} + 3c^{(1)}_{13} + 3\,(\tau^{00}_{31} + c^{(1)}_{31}\,\mathrm{tg}\,B_1 + 4!\,\mathrm{tg}^3\,B_1)\,\tau^{00}_{02} \\
\qquad\qquad + (\tau^{00}_{13} + 3c^{(1)}_{13}\,\mathrm{tg}\,B_1)\,(\tau^{00}_{20} + 3\tau^{00}_{11} + 6\mathrm{tg}\,B_1) + 3c^{(1)}_{13}\,\mathrm{tg}^2\,B_1 \\
\tau^{10}_{05} = (\tau^{00}_{13} + 3c^{(1)}_{13}\,\mathrm{tg}\,B_1)\,\tau^{00}_{02} \\
\tau^{01}_{41} + \bar{c}^{(1)}_{41}\,\mathrm{tg}\,B_1 \sec B_1 = \bar{\dot{\tau}}^{11}_{31} + \bar{c}^{(1)}_{31}\,\mathrm{tg}\,B_1 \sec B_1 \\
\qquad + (\bar{\tau}^{11}_{31} + \bar{c}_{31} \sec B_1 + 4!\,\sec^3 B_1)\,(3\tau^{00}_{20} + \tau^{00}_{11}) + 2\,(\bar{\tau}^{11}_{31} + \bar{c}^{(1)}_{31} \sec B_1)\,\mathrm{tg}\,B_1 \\
\tau^{01}_{23} + 3\bar{c}^{(1)}_{23}\,\mathrm{tg}\,B_1 \sec B_1 = \bar{\dot{\tau}}^{11}_{13} + \bar{c}^{(1)}_{13} \sec B_1 \cdot \mathrm{tg}\,B_1 + 3\,(\bar{\tau}^{11}_{31} + \bar{c}_{31} \sec B_1 + 4!\,\sec^3 B_1) \\
\qquad\qquad + (\bar{\tau}^{11}_{13} + 3\bar{c}^{(1)}_{13} \sec B_1)\,(\tau^{00}_{20} + 3\tau^{00}_{11} + 6\mathrm{tg}\,B_1) \\
\bar{\tau}^{01}_{05} = (\bar{\tau}^{11}_{13} + 3\bar{c}_{13} \sec B_1)\,\tau^{00}_{02}
\end{cases}
$$

Mit (33), (35) und (49) haben wir das genaue Bildungsgesetz der Koeffizienten bis zur 5. Ordnung einschließlich.

7. Explizite Darstellung der Koeffizienten bis zur 3. Ordnung einschließlich.

Zum Schluß geben wir noch die trigonometrischen Reihen vollständig ohne Vernachlässigung irgendwelcher Glieder für die Koeffizienten bis zur 3. Ordnung einschließlich an:

$$
(50)\quad \begin{cases}
\tau_{10}^{10} = 1 \qquad \tau_{01}^{10} = 1 \qquad \tau_{01}^{01} = \sin B_1 \\
\tau_{20}^{00} = 6 \sum\limits_{\lambda=1}^{\infty} (-n)^\lambda \sin 2\lambda B_1 \qquad \tau_{02}^{00} = \frac{1}{2}\frac{1+n^2}{(1-n)^2} \sin 2B_1 + \frac{1}{2}\frac{n}{(1-n)^2} \sin 4B_1 \\
\tau_{11}^{00} = 4 \sum\limits_{\lambda=1}^{\infty} (-n)^\lambda \sin 2\lambda B_1 \\
\tau_{11}^{11} = -(2n+1)\cos B_1 - 2(n+1) \sum\limits_{\lambda=1}^{\infty} (-n)^\lambda \cos(2\lambda+1) B_1 \\
\tau_{30}^{10} = 36 \sum\limits_{\lambda=1}^{\infty} n^{2\lambda} + 12 \sum\limits_{\lambda=1}^{\infty} (-n)^\lambda \left(3 - 2\lambda + 6 \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} n^{2\nu}\right) \cos 2\lambda B_1 \\
\tau_{12}^{10} = \left(2 - \frac{3n}{(1-n)^2}\right) - \left(1 - \frac{2n}{(1-n)^2}\right) \cos 2B_1 + \frac{5n}{(1-n)^2} \cos 4B_1 \\
\tau_{21}^{10} = 2 + 4 \sum\limits_{\lambda=1}^{\infty} n^\lambda (5n^\lambda - 7) + 4 \sum\limits_{\lambda=1}^{\infty} (-n)^\lambda \left(-2 - 3\lambda + 2 \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} n^\nu (5n^\nu - 7)\right) \cos 2\lambda B_1 \\
\tau_{03}^{10} = 1 - \cos 2B_1 \\
\tau_{21}^{01} = -4 \sin B_1 + \sum\limits_{\lambda=0}^{\infty} (-n)^\lambda \Big(3 - 6\lambda(n+1) \\
\qquad\qquad + 11n + 4 \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} n^\nu \left(5(n+1)n^\nu + 14\right)\Big) \sin(2\lambda+1) B_1 \\
\tau_{03}^{01} = \frac{1}{4}\left(7 + \frac{2n}{(1-n)^2}\right) \sin B_1 - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{3n}{(1-n)^2}\right) \sin 3B_1 + \frac{1}{4}\frac{n}{(1-n)^2} \sin 5B_1
\end{cases}
$$

und lassen eine Aufstellung der Koeffizienten $\beta_{i,2k}$, $\lambda_{i,2k+1}$ und $A_{i,2k+1}$ bis zur 3. Ordnung einschließlich in der expliziten Darstellung nach dem Boltzschen Vorbild[12]) folgen, in der die Koeffizienten der trigonometrischen Reihen (50) in Potenzreihen von n entwickelt sind und diejenigen bis zur 5. Ordnung einschließlich Berücksichtigung finden:

Koeff.	Zahl	n	n^2	n^3	n^4	n^5	
β_{10}	+ 1						1
λ_{01}	+ 1						1
A_{01}	+ 1						$\sin B_1$
β_{20}		− 6					$\sin 2B_1$
			+ 6				$\sin 4B_1$
				− 6			$\sin 6B_1$
					+ 6		$\sin 8B_1$
						− 6	$\sin 10B_1$
							. . . . .
β_{02}	+ ½	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	$\sin 2B_1$
		+ ½	+ 1	+ ³/₂	+ 2	+ ⁵/₂	$\sin 4B_1$

[12]) Siehe Boltz [1], S. VII—X.

Koeff.	Zahl	n	n^2	n^3	n^4	n^5	
$\bar{\lambda}_{11}$	$+1$						tg B_1
		-2					sin $2B_1$
			$+2$				sin $4B_1$
				-2			sin $6B_1$
					$+2$		sin $8B_1$
						-2	sin $10B_1$
							. . . . .
$\bar{A}_{11}$	$+1$						sec B_1
	$-\frac{1}{2}$	-1					cos B_1
		$+1$	$+1$				cos $3B_1$
			-1	-1			cos $5B_1$
				$+1$	$+1$		cos $7B_1$
					-1	-1	cos $9B_1$
						$+1$	cos $11B_1$
							. . . . .
$\bar{\beta}_{30}$			$+36$		$+36$		1
		-12		-72		-72	cos $2B_1$
			-12		$+72$		cos $4B_1$
				$+36$		-72	cos $6B_1$
					-60		cos $8B_1$
						$+84$	cos $10B_1$
							. . . . .
$\bar{\beta}_{12}$	$+\frac{2}{3}$	-1	-2	-3	-4	-5	1
	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$	$+\frac{4}{3}$	$+2$	$+\frac{8}{3}$	$+\frac{10}{3}$	cos $2B_1$
		$+\frac{5}{3}$	$+\frac{10}{3}$	$+5$	$+\frac{20}{3}$	$+\frac{25}{3}$	cos $4B_1$
$\bar{\lambda}_{21}$	$+2$						tg^2 B_1
	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{28}{3}$	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{28}{3}$	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{28}{3}$	1
		$+\frac{20}{3}$	$+\frac{56}{3}$	$+\frac{16}{3}$	$+\frac{56}{3}$	$+\frac{16}{3}$	cos $2B_1$
			$-\frac{32}{3}$	$-\frac{56}{3}$	$-\frac{16}{3}$	$-\frac{56}{3}$	cos $4B_1$
				$+\frac{44}{3}$	$+\frac{56}{3}$	$+\frac{16}{3}$	cos $6B_1$
					$-\frac{56}{3}$	$-\frac{56}{3}$	cos $8B_1$
						$+\frac{68}{3}$	cos $10B_1$
							. . . . .
λ_{03}	$+1$						1
	-1						cos $2B_1$
$\bar{A}_{21}$	$+2$						tg B_1 sec B_1
	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{67}{3}$	$+\frac{76}{3}$	$+\frac{76}{3}$	$+\frac{76}{3}$	$+\frac{76}{3}$	sin B_1
		$+1$	$-\frac{61}{3}$	$-\frac{76}{3}$	$-\frac{76}{3}$	$-\frac{76}{3}$	sin $3B_1$
			-3	$+\frac{55}{3}$	$+\frac{76}{3}$	$+\frac{76}{3}$	sin $5B_1$
				$+5$	$-\frac{49}{3}$	$-\frac{76}{3}$	sin $7B_1$
					-7	$+\frac{43}{3}$	sin $9B_1$
						$+9$	sin $11B_1$
							. . . . .
$\bar{A}_{03}$	$+\frac{7}{4}$	$+\frac{1}{2}$	$+1$	$+\frac{3}{2}$	$+2$	$+\frac{5}{2}$	sin B_1
	$-\frac{1}{4}$	$+\frac{3}{4}$	$+\frac{3}{2}$	$+\frac{9}{4}$	$+3$	$+\frac{15}{4}$	sin $3B_1$
		$+\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{3}{4}$	$+2$	$+\frac{5}{4}$	sin $5B_1$

Für die in der Geodäsie erforderliche Genauigkeit genügt die Kenntnis der ersten Glieder der Reihen; daher spart man bei der praktischen Berechnung der Koeffizienten $\bar{\beta}_{i,2k}$, $\bar{\lambda}_{i,2k+1}$ und $\bar{A}_{i,2k+1}$ durch die nacheinander ausgeführte Differentiation einen großen Teil der für unsere Aufgabe erforderlichen Rechenarbeit.

8. Beziehungen zum Boltzschen Verfahren.

Mittels der hier verwendeten τ-Symbolik lassen sich in der gleichen Art entsprechende Aussagen über den Aufbau der Koeffizienten β_n, λ_n und A_n in der allgemeinsten Form machen, wenn man wie Boltz von dem simultanen System 1. Ordnung (4) ausgeht. β_n, λ_n und A_n sind dann homogene Polynome n-ten Grades in $\cos\alpha_1$, $\sin\alpha_1$. Zu dem gleichen Ergebnis gelangt man natürlich, wenn man in (46) β_1 und λ_1 nach (4) und (16) durch

$$(51)\qquad \begin{cases} \beta_1 = M_1^{-1}\cdot\cos\alpha_1 = \dfrac{2}{a+b}(1-n^2)^{-2}\cdot F_1^{3/2}\cdot\cos\alpha_1 \\ \lambda_1 = r_1^{-1}\cdot\sin\alpha_1 = \dfrac{2}{a+b}(1+n)^{-2}\cdot F_1^{1/2}\cdot\sec B_1\cdot\sin\alpha_1 \end{cases}$$

oder in unserer Symbolik durch die Ausdrücke[13]):

$$(52)\qquad \begin{cases} \dfrac{a+b}{2}\beta_1 = \tau_{10}^{10}\cdot\cos\alpha_1 \\ \dfrac{a+b}{2}\lambda_1 = (\tau_{01}^{11} + c_{01}^{(0)}\cdot\sec B_1)\cdot\sin\alpha_1 \end{cases}$$

mit

$$(53)\qquad \begin{cases} \tau_{10}^{10} = (1-n^2)^{-2}\,(c_0^{(3/2)} + 2\sum\limits_{\lambda=1}^{\infty} c_{2\lambda}^{(3/2)}\cos 2\lambda B_1) \\ \tau_{01}^{11} = 4\,(1+n)^{-2}\sum\limits_{\lambda=0}^{\infty}\sum\limits_{\mu=\lambda}^{\infty}(-1)^{\mu+\lambda}\,c_{2(\mu+1)}^{(1/2)}\cos(2\lambda+1)\,B_1 \\ c_{01}^{(0)} = \dfrac{1-n}{(1+n)^2} \end{cases}$$

ersetzt. Wir erhalten dann das System:

$$(54)\qquad \boxed{\begin{aligned} \left(\frac{a+b}{2}\right)^n\beta_n &= \sum_{\mu=0}^{[n/2]}\Big(\tau_{n-2\mu,\,2\mu}^{\varepsilon 0} \\ &\quad + 2\mu\cdot\mathrm{tg}^{1+\varepsilon}B_1\sum_{i=0}^{[n/2]-1}c_{n-2\mu,\,2\mu}^{(i)}\cdot\mathrm{tg}^{2i}B_1\Big)\cos^{n-2\mu}\alpha_1\cdot\sin^{2\mu}\alpha_1 \\ \left(\frac{a+b}{2}\right)^n\lambda_n &= \sum_{\mu=0}^{[(n-1)/2]}\Big(\tau_{n-(2\mu+1),\,2\mu+1}^{\varepsilon 1} \\ &\quad + (2\mu+1)\sec B_1\,\mathrm{tg}^{1-\varepsilon}B_1\sum_{i=0}^{[(n-1)/2]}c_{n-(2\mu+1),\,2\mu+1}^{(i)}\,\mathrm{tg}^{2i}B_1\Big)\cos^{n-(2\mu+1)}\alpha_1\sin^{2\mu+1}\alpha_1 \\ \left(\frac{a+b}{2}\right)^n A_n &= \sum_{\mu=0}^{[(n-1)/2]}\Big(\bar\tau_{n-(2\mu+1),\,2\mu+1}^{\eta 0} \\ &\quad + (2\mu+1)\,\mathrm{tg}^{1+\eta}B_1\sum_{i=0}^{[(n-1)/2]}\bar c_{n-(2\mu+1),\,2\mu+1}^{(i)}\,\mathrm{tg}^{2i}B_1\Big)\cos^{n-(2\mu+1)}\alpha_1\sin^{2\mu+1}\alpha_1 \end{aligned}}$$

und durch Vergleich mit den aus (6) und (7) folgenden Beziehungen

$$(55)\qquad \begin{cases} \beta_i = \sum\limits_{\mu=0}^{[i/2]}\binom{i}{2\mu}\beta_{i-2\mu,\,2\mu}\cos^{i-2\mu}\alpha_1\sin^{2\mu}\alpha_1 \\ \lambda_i = \sum\limits_{\mu=0}^{[(i-1)/2]}\binom{i}{2\mu+1}\lambda_{i-(2\mu+1),\,2\mu+1}\cos^{i-(2\mu+1)}\alpha_1\sin^{2\mu+1}\alpha_1 \\ A_i = \sum\limits_{\mu=0}^{[(i-1)/2]}\binom{i}{2\mu+1}A_{i-(2\mu+1),\,2\mu+1}\cos^{i-(2\mu+1)}\alpha_1\sin^{2\mu+1}\alpha_1, \end{cases}$$

[13]) Natürlich werden hier unter den Reihen τ und $\bar\tau$ andere verstanden als im vorangehenden Teil.

die Koeffizienten $\beta_{i,2k}$, $\lambda_{i,2k+1}$ und $A_{i,2k+1}$:

$$
(56)\quad \boxed{\begin{aligned}
&\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \binom{i}{2\mu} \beta_{i-2\mu,\,2\mu} \\
&= \tau^{\varepsilon 0}_{n-2\mu,\,2\mu} + 2\mu \operatorname{tg}^{1+\varepsilon} B_1 \sum_{i=0}^{[n/2]-1} c^{(i)}_{n-2\mu,\,2\mu} \operatorname{tg}^{2i} B_1 \\
&\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \binom{i}{2\mu+1} \lambda_{i-(2\mu+1),\,2\mu+1} \\
&= \tau^{\varepsilon 1}_{n-(2\mu+1),\,2\mu+1} + (2\mu+1) \sec B_1 \operatorname{tg}^{1-\varepsilon} B_1 \sum_{i=0}^{[(n-1)/2]} c^{(i)}_{n-(2\mu+1),\,2\mu+1} \operatorname{tg}^{2i} B_1 \cdot \\
&\cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^n \binom{i}{2\mu+1} A_{i-(2\mu+1),\,2\mu+1} \\
&= \bar{\tau}^{\eta 0}_{n-(2\mu+1),\,2\mu+1} + (2\mu+1) \operatorname{tg}^{1+\eta} B_1 \sum_{i=0}^{[(n-1)/2]} \bar{c}^{(i)}_{n-(2\mu+1),\,2\mu+1} \operatorname{tg}^{2i} B_1,
\end{aligned}}
$$

wobei die Reihen τ und $\bar{\tau}$ wieder das Argument B_1 statt B enthalten.

(54) liefert für $n \leq 5$ bzw. 4 bei A_n diejenigen Koeffizienten, die Boltz in seinen Tafeln [1] aufgestellt hat, wo allerdings nur die ersten Stellen und die Koeffizienten der trigonometrischen Reihen als Potenzreihen in e'^2 angegeben sind. Bei einem Vergleich beachte man, daß $\sec^{2i} B_1 = (1 + \operatorname{tg}^2 B_1)^i$ ist.

Literaturübersicht.

1. H. Boltz, Formeln und Tafeln zur numerischen (nicht logarithmischen) Berechnung geographischer Koordinaten aus den Richtungen und Längen der Dreiecksseiten erster Ordnung. Veröffentl. d. Geod. Inst. Potsdam, Neue Folge Nr. 110, Potsdam 1942.
2. F. R. Helmert, Theorien der höheren Geodäsie, I. Bd., Teubner, Leipzig 1880.
3. J. Horn, Gewöhnliche Differentialgleichungen, 3. Aufl., de Gruyter, Berlin/Leipzig 1937.
4. Jordan-Eggert, Handbuch der Vermessungskunde, III, 1. u. 2. Teilband, Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart 1939 (7. Aufl.).
5. E. Kamke, Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen I, 3. Aufl., Akadem. Verlagsges. Leipzig 1944.
6. R. König, Über die Umkehrung einer trigonometrischen Reihe. Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig **90**, 69—82 (1938).
7. V. u. K. Kommerell, Theorie der Raumkurven und krummen Flächen, I, 4. Aufl., de Gruyter, Berlin/Leipzig 1931.
8. L. Krüger, Die Übertragung geographischer Koordinaten mittels Potenzreihen der linearen Länge der geodätischen Linie. Z. V. W. 1918, H. 7.

Eingegangen 21. März 1945.

Sätze über Kreisteilungspolynome und ihre Anwendungen auf einige zahlentheoretische Probleme*). I.

Dem Andenken meines hochverehrten Lehrers Georg Feigl gewidmet.

Von *Hans-Joachim Kanold* in Heidelberg.

Abschnitt I.

In diesem Abschnitt sollen einige Sätze über Kreisteilungspolynome, die an anderer Stelle bewiesen wurden[1]), verallgemeinert und durch einige Größenabschätzungen ergänzt werden. Wir wollen uns dabei eine beliebige rationale Zahl $\frac{x}{y}$ immer so dargestellt denken, daß $(x, y) = 1$ gilt. Weil $\frac{x}{y}$ eine rationale Zahl sein soll, muß $y \neq 0$ sein. Wir wollen nun auch den Fall $x = 0$ ausschließen. Dann umfassen die Ergebnisse dieses Abschnittes im Falle $y = 1$ die früheren. Mit $F_m(x)$ bezeichnen wir wieder das m-te Kreisteilungspolynom, dessen Wurzeln genau die primitiven m-ten Einheitswurzeln sind; $y^{\varphi(m)} F_m\left(\frac{x}{y}\right)$ ist daher eine homogene binäre Form vom Grade $\varphi(m)$. Es gilt

(1) **Satz.** *Ist* $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} > 2$, *sind* $p_1, \ldots, p_k$ *Primzahlen und gilt* $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$, *so besitzt im Falle* $p_k \not\equiv 1 \left(\mathrm{mod}\ \frac{m}{p_k^{\alpha_k}}\right)$ *die Form* $y^{\varphi(m)} F_m\left(\frac{x}{y}\right)$ *nur Primteiler der Restklasse* $1\ (\mathrm{mod}\ m)$. *Im Falle* $p_k \equiv 1 \left(\mathrm{mod}\ \frac{m}{p_k^{\alpha_k}}\right)$ *besitzt* $y^{\varphi(m)} F_m\left(\frac{x}{y}\right)$ *nur Primteiler der Restklasse* $1\ (\mathrm{mod}\ m)$ *und eventuell* p_k. *Soll* p_k *Teiler von* $y^{\varphi(m)} F_m\left(\frac{x}{y}\right)$ *sein, muß* $x^{\frac{m}{p_k}} \equiv y^{\frac{m}{p_k}}\ (\mathrm{mod}\ p_k)$ *gelten. In allen Fällen ist* $y^{\varphi(m)} F_m\left(\frac{x}{y}\right) \not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p_k^2)$.

Beweis. Es ist

$$\frac{x^m - y^m}{x - y} = \sum_{\mu=0}^{m-1} x^\mu y^{m-\mu-1} = \prod_{d|m;\, d \neq 1} y^{\varphi(d)} F_d\left(\frac{x}{y}\right). \tag{2}$$

*) Diese Arbeit wurde im Sommer-Semester 1944 von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Schlesischen Friedrich-Wilhelms-Universität zu Breslau als Habilitationsschrift angenommen.

[1]) Vgl. H. J. Kanold, Untersuchungen über ungerade vollkommene Zahlen, J. f. reine u. angew. Math. **183**, 98—109 (1941) I.

Setzen wir zur Abkürzung $\frac{m}{p_\varkappa} = m_\varkappa$ $(\varkappa = 1, \ldots, k)$, so erhalten wir

$$(3)\qquad \sum_{\mu=0}^{m-1} x^\mu y^{m-\mu-1} = \frac{x^{m_\varkappa} - y^{m_\varkappa}}{x-y} \cdot \frac{x^{m_\varkappa p_\varkappa} - y^{m_\varkappa p_\varkappa}}{x^{m_\varkappa} - y^{m_\varkappa}} = \sum_{\mu=0}^{m_\varkappa - 1} x^\mu y^{m_\varkappa - \mu - 1} \cdot \sum_{\mu=0}^{p_\varkappa - 1} x^{m_\varkappa \mu} y^{m_\varkappa (p_\varkappa - \mu - 1)}.$$

Wir führen noch die Abkürzungen

$$(4)\qquad \sum_{\mu=0}^{m_\varkappa - 1} x^\mu y^{m_\varkappa - \mu - 1} = a_\varkappa, \qquad \sum_{\mu=0}^{p_\varkappa - 1} x^{m_\varkappa \mu} y^{m_\varkappa (p_\varkappa - \mu - 1)} = b_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k)$$

ein und sehen aus (2) und (3), daß

$$(5)\qquad y^{\varphi(m)} F_m\left(\frac{x}{y}\right) \Big| b_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k)$$

ist. Es sei jetzt $r_\varkappa$ eine Primzahl und

$$(6)\qquad r_\varkappa | b_\varkappa.$$

Dann folgt daraus

$$(7)\qquad x^{m_\varkappa p_\varkappa} \equiv y^{m_\varkappa p_\varkappa} \pmod{r_\varkappa}.$$

Ist zunächst

$$(8)\qquad x^{m_\varkappa} \equiv y^{m_\varkappa} \pmod{r_\varkappa},$$

so ergibt sich unter Berücksichtigung von (4) und (6)

$$(9)\qquad b_\varkappa \equiv p_\varkappa x^{m_\varkappa (p_\varkappa - 1)} \equiv p_\varkappa y^{m_\varkappa (p_\varkappa - 1)} \equiv 0 \pmod{r_\varkappa};$$

daraus folgt wegen $(x, y) = 1$

$$(10)\qquad r_\varkappa = p_\varkappa.$$

Auf Grund von (8) und (10) können wir schreiben

$$(11)\qquad x^{m_\varkappa} \equiv A\, p_\varkappa + w_\varkappa \pmod{p_\varkappa^2}; \quad y^{m_\varkappa} \equiv B\, p_\varkappa + w_\varkappa \pmod{p_\varkappa^2},$$

und $(x, y) = 1$ ergibt $0 < w_\varkappa < p_\varkappa$, d. h. $(w_\varkappa, p_\varkappa) = 1$. Setzen wir dies in (4) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}(12)\qquad b_\varkappa &\equiv \sum_{\mu=0}^{p_\varkappa - 1} (A\, p_\varkappa + w_\varkappa)^\mu (B\, p_\varkappa + w_\varkappa)^{p_\varkappa - \mu - 1} \\ &\equiv \sum_{\mu=0}^{p_\varkappa - 1} (\mu\, A\, p_\varkappa\, w_\varkappa^{\mu-1} + w_\varkappa^\mu)\left((p_\varkappa - \mu - 1)\, B\, p_\varkappa\, w_\varkappa^{p_\varkappa - \mu - 2} + w_\varkappa^{p_\varkappa - \mu - 1}\right) \\ &\equiv \sum_{\mu=0}^{p_\varkappa - 1} \left(p_\varkappa\, w_\varkappa^{p_\varkappa - 2} (\mu\, A - \mu\, B - B) + w_\varkappa^{p_\varkappa - 1}\right) \\ &\equiv p_\varkappa\, w_\varkappa^{p_\varkappa - 1} + p_\varkappa\, w_\varkappa^{p_\varkappa - 2}\left(A \sum_{\mu=0}^{p_\varkappa - 1} \mu - B \sum_{\mu=0}^{p_\varkappa - 1} (\mu + 1)\right) \pmod{p_\varkappa^2}.\end{aligned}$$

Ist $p_\varkappa$ eine ungerade Primzahl, so ist $\sum_{\mu=0}^{p_\varkappa - 1} \mu \equiv \sum_{\mu=0}^{p_\varkappa - 1} (\mu + 1) \equiv 0 \pmod{p_\varkappa}$ und daher

$$(13)\qquad b_\varkappa \equiv p_\varkappa\, w_\varkappa^{p_\varkappa - 1} \pmod{p_\varkappa^2}.$$

Weil $(w_\varkappa, p_\varkappa) = 1$ und folglich nach dem kleinen Fermatschen Satze $w_\varkappa^{p_\varkappa - 1} \equiv 1 \pmod{p_\varkappa}$ ist, gilt

$$(14)\qquad b_\varkappa \equiv p_\varkappa \pmod{p_\varkappa^2}.$$

Ist $p_\varkappa = 2$, so ist nach (4)

$$(15)\qquad b_\varkappa = x^{m_\varkappa} + y^{m_\varkappa}.$$

Aus (8) und $(x, y) = 1$ folgt, daß x und y beide ungerade sein müssen. Ist nun $m_\varkappa$ gerade, d. h. $4|m$, so ist auch in diesem Falle

$$(16)\qquad b_\varkappa \equiv 2 \pmod 4.$$

Wir setzen jetzt im zweiten Teil des Beweises

(17) $$x^{m_\varkappa} \not\equiv y^{m_\varkappa} \pmod{r_\varkappa}$$

voraus und bezeichnen mit t den kleinsten positiven Exponenten, für den

(18) $$x^t \equiv y^t \pmod{r_\varkappa}$$

gilt. Ist für eine Zahl Θ die Kongruenz $x^\Theta \equiv y^\Theta \pmod{r_\varkappa}$ erfüllt, so muß $t|\Theta$ sein. Denn wäre das nicht der Fall, so gäbe es eine Zahl ξ mit $0 < \xi < t$ so, daß $\Theta = f \cdot t + \xi$ und $x^\Theta \equiv (x^t)^f x^\xi \equiv y^\Theta \equiv (y^t)^f y^\xi \not\equiv (x^t)^f y^\xi \pmod{r_\varkappa}$, d. h. $x^\xi \equiv y^\xi \pmod{r_\varkappa}$ mit $0 < \xi < t$ wäre. Nach dem kleinen Fermatschen Satze und nach (7) folgt daraus

(19) $$t | r_\varkappa - 1, \quad t | m_\varkappa p_\varkappa.$$

Außerdem muß

(20) $$p_\varkappa^{\alpha_\varkappa} | t$$

sein, weil sonst $t|m_\varkappa$ wäre und sich daraus ein Widerspruch zu (17) herleiten ließe. (19) und (20) besagen

(21) $$p_\varkappa^{\alpha_\varkappa} | r_\varkappa - 1, \quad \text{d. h.} \quad r_\varkappa \equiv 1 \pmod{p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}}.$$

Ist nun r ein Primteiler von $y^{\varphi(m)} F_m\left(\frac{x}{y}\right)$, so folgt nach (5)

(22) $$r | b_\varkappa \quad \text{für} \quad \varkappa = 1, \ldots, k.$$

Aus (6), (8) und (10) folgt, daß

(23) $$r = p_\varkappa \text{ ist, wenn } x^{m_\varkappa} \equiv y^{m_\varkappa} \pmod{r}$$

gilt, und (17) und (21) liefern

(24) $$r \equiv 1 \pmod{p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}}, \text{ wenn } x^{m_\varkappa} \not\equiv y^{m_\varkappa} \pmod{r} \text{ gilt.}$$

Zusammenfassend ergibt dies[2]): Entweder ist

(25) $$r = p_k \equiv 1 \left(\bmod \frac{m}{p_k^{\alpha_k}}\right)$$

oder es ist

(26) $$r \equiv 1 \pmod{m}.$$

Ist $p_k > 2$, so liefert (14)

(27) $$y^{\varphi(m)} F_m\left(\frac{x}{y}\right) \not\equiv 0 \pmod{p_k^2}.$$

Ist $p_k = 2$, d. h. $m = 2^\alpha$, so folgt (27) auf Grund von (16), weil wir $m > 2$, also $\alpha > 1$ vorausgesetzt haben. Damit ist (1) bewiesen.

(28) **Folgerung aus Satz (1).** *Soll für $m > 2$ die Form $y^{\varphi(m)} F_m\left(\frac{x}{y}\right)$ keinen Primteiler der Restklasse 1 (mod m) besitzen, so kann nur $y^{\varphi(m)} F_m\left(\frac{x}{y}\right) = 1$ oder $= p_k$ sein.*

(29) **Satz.** *Ist $\frac{x}{y}$ mit $(x, y) = 1$ eine beliebige rationale Zahl, die von $0, \pm 1, \pm 2$ verschieden ist, ist ferner $m > 2$, so enthält $y^{\varphi(m)} F_m\left(\frac{x}{y}\right)$ stets mindestens einen Primteiler der Restklasse 1 (mod m).*

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß $y^{\varphi(m)} F_m\left(\frac{x}{y}\right)$ symmetrisch in x und y ist, daß also

(30) $$y^{\varphi(m)} F_m\left(\frac{x}{y}\right) \overset{\text{Id.}}{\equiv} x^{\varphi(m)} F_m\left(\frac{y}{x}\right)$$

[2]) Vgl. a. a. O.[1]) I, (15) bis (19).

gilt. Aus (4) ist nämlich sofort ersichtlich, daß $b_\varkappa$ symmetrisch in x und y ist. Nun folgt aus (2) und (3), daß $y^{\varphi(m)} F_m\left(\frac{x}{y}\right)$ der größte gemeinsame Teiler aller $b_\varkappa$ ist; wegen der Symmetrie der $b_\varkappa$ ist aber auch $x^{\varphi(m)} F_m\left(\frac{y}{x}\right)$ der größte gemeinsame Teiler aller $b_\varkappa$. Damit ist die Richtigkeit von (30) nachgewiesen. Aus (30) sehen wir, daß wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit beim Beweise von (29)

$$(31) \qquad |x| > |y|, \quad \text{d. h.} \quad \left|\frac{x}{y}\right| > 1$$

annehmen können. Ist nämlich $|x| < |y|$, so betrachten wir statt $y^{\varphi(m)} F_m\left(\frac{x}{y}\right)$ die damit identische Form $x^{\varphi(m)} F_m\left(\frac{y}{x}\right)$ mit $\left|\frac{y}{x}\right| > 1$. Weil wir $m > 2$ vorausgesetzt haben, ist $F_m(\pm 1) \geqq 1$. Aus einer schon an anderer Stelle durchgeführten Überlegung[3]) folgt

$$(32) \qquad \begin{aligned} F_m\left(\frac{x}{y}\right) > F_m\left(\frac{x_1}{y_1}\right) > F_m(1) \quad &\geqq 1, \text{ wenn } \frac{x}{y} > \frac{x_1}{y_1} > 1, \\ F_m\left(\frac{x}{y}\right) > F_m\left(\frac{x_1}{y_1}\right) > F_m(-1) &\geqq 1, \text{ wenn } \frac{x}{y} < \frac{x_1}{y_1} < -1 \end{aligned}$$

ist. Ist $y \neq \pm 1$, d. h. $\frac{x}{y}$ keine ganze rationale Zahl, so liefert (32)

$$(33) \qquad y^{\varphi(m)} F_m\left(\frac{x}{y}\right) > y^{\varphi(m)} \geqq 2^{p_k - 1} \geqq p_k.$$

Auf Grund von (28) ist damit (29) bewiesen für $y \neq \pm 1$. Wir können jetzt (32) folgendermaßen schreiben:

$$(34) \qquad \begin{aligned} F_m(x) > F_m(2) > 1, \text{ wenn } x > 2, \\ F_m(x) > F_m(-2) > 1, \text{ wenn } x < -2. \end{aligned}$$

Daraus folgt mit Hilfe von (28) die Richtigkeit von (29) für $|x| > 2$ auch im Falle $y = \pm 1$.

(35) **Ergänzung zu Satz (29).** *Ist $x = \pm 2$, so gilt unter der Voraussetzung $m > 2$ die Gleichung $F_m(x) = p_k$ nur für $m = 3$, $x = -2$ und $m = 6$, $x = +2$. In allen anderen Fällen enthält $F_m(\pm 2)$ mindestens einen Primteiler der Restklasse* 1 *(mod m).*

Beweis. Es ist $F_3(-2) = F_6(+2) = 2^2 - 2 + 1 = 3$. Wir benutzen im folgenden die Tatsache, daß

$$(36) \qquad F_m(x) = \prod_{\lambda=1}^{\varphi(m)} |x - \varepsilon_\lambda|, \quad \varepsilon_\lambda = e^{i\frac{2\pi}{m} l_\lambda} \text{ mit } (l_\lambda, m) = 1$$

ist, um $F_m(\pm 2)$ nach unten abzuschätzen. Wegen $m > 2$ ist auch $\varepsilon_{\varphi(m)-\lambda} = e^{i\frac{2\pi}{m}(m - l_\lambda)}$ eine primitive m-te Einheitswurzel, die $\neq \varepsilon_\lambda$ ist, so daß wir je zwei Faktoren in (36) zusammenfassen können. Das liefert

$$(37) \qquad F_m(x) = \prod_{\lambda=1}^{\frac{\varphi(m)}{2}} \left(x^2 + 1 - 2x\cos\frac{2\pi}{m} l_\lambda\right).$$

Auf Grund von (32) gilt

$$(38) \qquad \begin{aligned} F_m(+1) &= \prod_{\lambda=1}^{\frac{\varphi(m)}{2}} \left(2 - 2\cos\frac{2\pi}{m} l_\lambda\right) \geqq 1; \\ F_m(-1) &= \prod_{\lambda=1}^{\frac{\varphi(m)}{2}} \left(2 + 2\cos\frac{2\pi}{m} l_\lambda\right) \geqq 1. \end{aligned}$$

---

[3]) Vgl. a. a. O. [1]), insbesondere Beweis von I, (21) und die dazugehörige Zeichnung.

Setzen wir in (37) $x = \pm 2$ ein, so erhalten wir

$$(39)\quad F_m(\pm 2) = \prod_{\lambda=1}^{\frac{\varphi(m)}{2}} \left(5 \mp 4\cos\frac{2\pi}{m} l_\lambda\right) > \prod_{\lambda=1}^{\frac{\varphi(m)}{2}} 2\left(2 \mp 2\cos\frac{2\pi}{m} l_\lambda\right) = 2^{\frac{\varphi(m)}{2}} F_m(\pm 1) \geqq 2^{\frac{\varphi(m)}{2}}.$$

Nun ist $\varphi(m) = p_1^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2-1} \cdots p_k^{\alpha_k-1} (p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_k-1) = p_k - 1$ nur in den beiden Fällen $m = p_k$ und $m = 2p_k$. Sonst ist $\varphi(m) \geqq 2(p_k-1)$, also $\frac{\varphi(m)}{2} \geqq p_k - 1$. Weil $2^{p_k-1} \geqq p_k$ für jede Primzahl gilt, folgt nach (28) und (39) die Richtigkeit von (35) für alle m, die nicht die Gestalt $m = p_k$ oder $m = 2p_k$ besitzen. Soll nun $F_m(\pm 2) = p_k$ sein, muß $(\pm 2)^m \equiv 1 \pmod{p_k}$ gelten. Das ergibt einen Widerspruch für $p_k = 2$. Im Falle $m = p_k > 2$ folgt $(\pm 2)^{p_k} \equiv \pm 2 \equiv 1 \pmod{p_k}$, d. h. $p_k = 3$. Im Falle $m = 2p_k > 4$ folgt $(\pm 2)^{2p_k} \equiv 4^{p_k} \equiv 4 \equiv 1 \pmod{p_k}$, d. h. $p_k = 3$. Damit ist der Beweis von (35) zu Ende geführt.

(40) **Satz.** *Sind x, y, x_1, y_1 vier beliebige reelle positive Zahlen, die den Bedingungen $xy = x_1 y_1$ und $y_1 < y \leqq x < x_1$ genügen, so gilt für jede positive ganze Zahl m*

$$y^{\varphi(m)} F_m\left(\frac{x}{y}\right) < y_1^{\varphi(m)} F_m\left(\frac{x_1}{y_1}\right).$$

Beweis. Wir setzen

$$(41)\qquad x_1 = x + \xi;\ y_1 = y - \eta.$$

Nach Voraussetzung sind ξ, η beide positiv. $x - y = x_1 - y_1 - (\xi + \eta) < x_1 - y_1$ besagt, daß (40) für $m = 1$ richtig ist.

Aus $xy = x_1 y_1$ ergibt sich $\eta x_1 = \xi y$ und wegen $x_1 > y$

$$(42)\qquad \eta < \xi,$$

also mit $x + y = x_1 + y_1 - (\xi - \eta) < x_1 + y_1$ die Richtigkeit von (40) für $m = 2$. Um (40) für $m > 2$ zu beweisen, knüpfen wir an die Formel (37) an und erhalten

$$(43)\qquad y^{\varphi(m)} F_m\left(\frac{x}{y}\right) = \prod_{\lambda=1}^{\frac{\varphi(m)}{2}} \left(x^2 + y^2 - 2xy\cos\frac{2\pi}{m} l_\lambda\right).$$

Für $y_1^{\varphi(m)} F_m\left(\frac{x_1}{y_1}\right)$ gilt eine analoge Formel. Aus $x + y < x_1 + y_1$ folgt zunächst $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy < x_1^2 + y_1^2 + 2x_1 y_1 = (x_1 + y_1)^2$ und daraus wegen $xy = x_1 y_1$

$$(44)\quad x^2 + y^2 < x_1^2 + y_1^2;\ x^2 + y^2 - 2xy\cos\frac{2\pi}{m} l_\lambda < x_1^2 + y_1^2 - 2x_1 y_1 \cos\frac{2\pi}{m} l_\lambda.$$

Damit ergibt sich aber nach (43) sofort die Richtigkeit von (40).

Setzen wir in (40) $x = y = \sqrt{x_1 y_1}$, so erhalten wir für $m > 1$

$$(45)\qquad (x_1 y_1)^{\frac{\varphi(m)}{2}} \leqq (x_1 y_1)^{\frac{\varphi(m)}{2}} F_m(1) < y_1^{\varphi(m)} F_m\left(\frac{x_1}{y_1}\right).$$

Setzen wir in (40) $y_1 = 1$ und daher $x_1 = xy$, so folgt

$$(46)\qquad y^{\varphi(m)} F_m\left(\frac{x}{y}\right) < F_m(xy) \text{ für } 1 < y \leqq x.$$

Diese letzte Abschätzung können wir sogleich noch etwas verfeinern. Ist nämlich $\cos\frac{2\pi}{m} l_\lambda \geqq 0$, so folgt für $2 \leqq y < x$

$$(47)\qquad \begin{aligned} x^2 y^2 + 1 - 2xy\cos\frac{2\pi}{m} l_\lambda &\geqq x^2 y^2 + 1 - 2xy \\ &> \frac{y^2}{4}(x^2 + y^2) \geqq \frac{y^2}{4}\left(x^2 + y^2 - 2xy\cos\frac{2\pi}{m} l_\lambda\right); \end{aligned}$$

ist $\cos\frac{2\pi}{m} l_\lambda < 0$, so folgt, ebenfalls für $2 \leq y < x$

$$(48)\qquad \begin{aligned} x^2 y^2 + 1 - 2xy\cos\frac{2\pi}{m} l_\lambda &> x^2 y^2 + 1 > \frac{y^2}{4}(x^2 + y^2 + 2x^2) \\ &> \frac{y^2}{4}\left(x^2 + y^2 - 2xy\cos\frac{2\pi}{m} l_\lambda\right). \end{aligned}$$

Nach (43) ist

$$(49)\qquad F_m(xy) = \prod_{\lambda=1}^{\frac{\varphi(m)}{2}}\left(x^2 y^2 + 1 - 2xy\cos\frac{2\pi}{m} l_\lambda\right).$$

Aus (43), (47), (48) und (49) ergibt sich:

(50) Für $2 \leq y < x$ gilt $y^{\varphi(m)} F_m\left(\frac{x}{y}\right) < \left(\frac{2}{y}\right)^{\varphi(m)} F_m(xy)$.

(51) **Satz.** *Für $m > 2$ gilt die Abschätzung*

$$\operatorname{Min}\left(y^{\varphi(m)} F_m\left(\frac{x}{y}\right),\ y^{\varphi(m)} F_m\left(-\frac{x}{y}\right)\right) \leq (x^2 + y^2)^{\frac{\varphi(m)}{2}}.$$

Beweis. Wir gehen von (37) bzw. (43) aus und erhalten

$$(52)\qquad \begin{aligned} & y^{\varphi(m)} F_m\left(\frac{x}{y}\right) \cdot y^{\varphi(m)} F_m\left(-\frac{x}{y}\right) \\ &= \prod_{\lambda=1}^{\frac{\varphi(m)}{2}}\left(x^2 + y^2 - 2xy\cos\frac{2\pi}{m} l_\lambda\right) \cdot \left(x^2 + y^2 + 2xy\cos\frac{2\pi}{m} l_\lambda\right) \\ &= \prod_{\lambda=1}^{\frac{\varphi(m)}{2}}\left((x^2 + y^2)^2 - 4x^2 y^2 \cos^2\frac{2\pi}{m} l_\lambda\right) \leq (x^2 + y^2)^{\varphi(m)}. \end{aligned}$$

Aus (52) folgt sofort die Behauptung (51).

Abschnitt II.

In diesem Abschnitt habe m dieselbe Gestalt wie in I, (1); n sei im Falle $p_k \not\equiv 1 \left(\bmod \frac{m}{p_k^{\alpha_k}}\right)$ eine beliebige positive ganze Zahl, die nur Primteiler der Restklasse 1 (mod m) besitzt; im Falle $p_k \equiv 1 \left(\bmod \frac{m}{p_k^{\alpha_k}}\right)$ soll für n außerdem das p_k-fache einer solchen Zahl zugelassen sein. Dann wird zunächst die Anzahl der (mod n) inkongruenten Zahlen x, für die $n | F_m(x)$, und die Anzahl der (mod n) inkongruenten Zahlenpaare x, y, für die $n | y^{\varphi(m)} F_m\left(\frac{x}{y}\right)$ gilt, bestimmt. Ferner wird gezeigt, daß x und y so gewählt werden können, daß $1 \leq y^2 < x^2 < n$ erfüllt ist; daran schließen sich einige Beispiele und Folgerungen an. x und y brauchen in diesem Abschnitt nicht teilerfremd zu sein. Es gilt

(1) **Satz.** *Es sei q_λ Primzahl, $q_\lambda \equiv 1$ (mod m) für $\lambda = 1, \ldots, l$, ferner sei*

$$\alpha)\ n = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots q_l^{\beta_l} \quad \text{oder} \quad \beta)\ n = p_k q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots q_l^{\beta_l}.$$

Dann ist die Anzahl der Zahlen x, die den Bedingungen $0 < x < n$ und $n | F_m(x)$ genügen, im Falle α) gleich $(\varphi(m))^l$ und im Falle β) gleich $\varphi\left(\frac{m}{p_k^{\alpha_k}}\right)(\varphi(m))^l$. Die Anzahl der Zahlenpaare x, y, die den Bedingungen $0 < y < x < n$, $(xy, n) = 1$ und $n | y^{\varphi(m)} F_m\left(\frac{x}{y}\right)$ genügen, ist im Falle α) gleich $(\varphi(m))^l \frac{\varphi(n)}{2}$ und im Falle β) gleich $\varphi\left(\frac{m}{p_k^{\alpha_k}}\right)(\varphi(m))^l \frac{\varphi(n)}{2}$. Ist insbesondere $(x, y) = h$; $x = hx'$; $y = hy'$, so folgt $n | y'^{\varphi(m)} F_m\left(\frac{x'}{y'}\right)$.

Beweis. Wir nehmen zunächst n als Potenz einer ungeraden Primzahl an: $n = q^\beta$; $q \equiv 1 \pmod{m}$. w sei primitive Wurzel $(\mathrm{mod}\ n)$, die Potenzen $w, w^2, \ldots, w^{\varphi(n)}$ sind also paarweise inkongruent $(\mathrm{mod}\ n)$. $n | F_m(w^\nu)$ mit $1 \leq \nu \leq \varphi(n)$ besagt $w^{\nu m} \equiv 1 \pmod{n}$; $w^{\nu m_\varkappa} \not\equiv 1 \pmod{q}$ für $\varkappa = 1, \ldots, k$. Daraus folgt $\nu = f \cdot \frac{\varphi(n)}{m}$; $1 \leq f \leq m$; $(f, m) = 1$, d. h.

(2) Es gibt $\varphi(m)$ $(\mathrm{mod}\ n)$ inkongruente Zahlen x, für die $n | F_m(x)$.

Aus $n | w^{\mu\varphi(m)} F_m\left(\frac{w^\nu}{w^\mu}\right)$ und $1 \leq \mu < \nu \leq \varphi(n)$ folgt $n | F_m(w^{\nu-\mu})$. Das bedeutet

$$\nu = \mu + f\frac{\varphi(n)}{m} \leq m\frac{\varphi(n)}{m}; \quad 1 \leq \mu \leq \frac{\varphi(n)}{m}(m-f); \quad (f, m) = 1.$$

Bei festgehaltenem f ist für μ die Anzahl der Möglichkeiten gleich $\frac{\varphi(n)}{m}(m-f)$. Summieren wir über alle zu m teilerfremden f, so erhalten wir

$$\frac{\varphi(n)}{m} \sum_{f=1;\,(f,m)=1}^{m} (m-f) = \frac{\varphi(n)}{m} \sum_{f=1;\,(f,m)=1}^{m} f = \frac{\varphi(n)}{m} \cdot \frac{\varphi(m)}{2} \cdot m,$$

d. h.

Es gibt $\varphi(m) \cdot \frac{\varphi(n)}{2}$ $(\mathrm{mod}\ n)$ inkongruente Zahlenpaare x, y, für die

(3) $$(x, n) = (y, n) = 1 \text{ und } n | y^{\varphi(m)} F_m\left(\frac{x}{y}\right).$$

Wir nehmen n nun als Produkt zweier Zahlen an, von denen jede nur aus Primteilern der Restklasse 1 $(\mathrm{mod}\ m)$ besteht: $n = n_1 n_2 = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots q_{l_1}^{\beta_{l_1}} \cdot q_{l_1+1}^{\beta_{l_1+1}} \cdots q_{l_1+l_2}^{\beta_{l_1+l_2}}$. Wir machen jetzt die Induktionsannahme:

(4) Es gibt $(\varphi(m))^{l_i}$ $(\mathrm{mod}\ n_i)$ inkongruente Zahlen x_i, für die $n_i | F_m(x_i)$; $i = 1, 2$.

Für jedes Zahlenpaar x_1, x_2 läßt sich genau eine Zahl x so finden, daß

(5) $$x = x_1 + c_1 n_1 = x_2 + c_2 n_2; \quad 0 \leq c_1 < n_2; \quad 0 \leq c_2 < n_1.$$

Aus $0 \leq x_i < n_i$ folgt dann $0 \leq x < n_1 n_2 = n$ und aus (4) $n | F_m(x)$. Weil umgekehrt aus $n | F_m(x)$ und $0 \leq x < n$ auch folgt, daß x die Gestalt (5) haben muß, können wir aus (4) schließen:

(6) Es gibt $(\varphi(m))^l$ $(\mathrm{mod}\ n)$ inkongruente x, für die $n | F_m(x)$.

Für die Aussage über Zahlenpaare nehmen wir zum Induktionsbeweis an:

(7) Es gibt $(\varphi(m))^{l_i} \frac{\varphi(n_i)}{2}$ $(\mathrm{mod}\ n_i)$ inkongruente Zahlenpaare x_i, y_i, für die

$$(x_i, n_i) = (y_i, n_i) = 1 \text{ und } n_i | y_i^{\varphi(m)} F_m\left(\frac{x_i}{y_i}\right) \quad (i = 1, 2).$$

Je zwei Zahlenpaaren x_1, y_1 und x_2, y_2 entspricht genau ein Paar x, y, das den folgenden Bedingungen genügt:

(8) $$x = x_1 + c_1 n_1 = x_2 + c_2 n_2; \quad 0 \leq c_1, d_1 < n_2;$$
$$y = y_1 + d_1 n_1 = y_2 + d_2 n_2; \quad 0 \leq c_2, d_2 < n_1.$$

Wiederum ergibt sich, daß $n | y^{\varphi(m)} F_m\left(\frac{x}{y}\right)$; $0 \leq x, y < n$; $(x, y) = (y, n) = 1$ dann und nur dann gilt, wenn x, y die Bedingungen (8) erfüllen, vorausgesetzt natürlich, daß x_i und y_i so gewählt worden sind, daß sie den Ungleichungen $0 < x_i, y_i < n_i$; $i = 1, 2$ genügen.

Beachten wir, daß eine Vertauschung von x_2 und y_2 in (8) eine wesentliche Änderung des Zahlenpaares x, y (d. h. nicht nur eine Vertauschung der Werte) nach sich zieht, so folgt aus (7):

(9) Die Anzahl der (mod n) inkongruenten Zahlenpaare x, y, für die

$$(x, n) = (y, n) = 1 \text{ und } n | y^{\varphi(m)} F_m\left(\frac{x}{y}\right),$$

ist gleich $(\varphi(m))^{l_1} \frac{\varphi(n_1)}{2} (\varphi(m))^{l_2} \frac{\varphi(n_2)}{2} \cdot 2 = (\varphi(m))^{l} \frac{\varphi(n)}{2}$.

Als letzten Fall betrachten wir:

$$n = p_k n_1 = p_k q_1^{\beta_1} \cdots q_l^{\beta_l}; \quad q_\lambda \equiv 1 \pmod{m} \text{ für } \lambda = 1, \ldots, l.$$

Zunächst ergibt sich aus (6):

(10) Es gibt $((\varphi(m))^l$ (mod n_1) inkongruente x_1, für die $n_1 | F_m(x_1)$.

Wir wählen nun x_2 so, daß x_2 (mod p_k) zum Exponenten $\frac{m}{p_k^{\alpha_k}}$ gehört, dann können wir aus (2) sogleich schließen:

(11) Es gibt $\varphi\left(\frac{m}{p_k^{\alpha_k}}\right)$ (mod p_k) inkongruente Zahlen x_2, für die $p_k | F_{\frac{m}{p_k^{\alpha_k}}}(x_2)$.

Analog zu (5) können wir sagen: Zu jedem Paar x_1, x_2 gibt es genau ein x so, daß

(12) $$x = x_1 + c_1 n_1 = x_2 + c_2 p_k; \; 0 \leq c_1 < p_k; \; 0 \leq c_2 < n_1.$$

Hieraus folgt mit (10) und (11):

(13) Es gibt $\varphi\left(\frac{m}{p_k^{\alpha_k}}\right)(\varphi(m))^l$ (mod n) inkongruente Zahlen x, für die $n | F_m(x)$.

Nach (9) und (3) folgt:

(14) Die Anzahl der (mod n_1) inkongruenten Paare x_1, y_1, für die $(x_1, n_1) = (y_1, n_1) = 1$ und $n_1 | y_1^{\varphi(m)} F_m\left(\frac{x_1}{y_1}\right)$, ist gleich $(\varphi(m))^l \frac{\varphi(n_1)}{2}$.

(15) Die Anzahl der (mod p_k) inkongruenten x_2, y_2, für die $(x_2, p_k) = (y_2, p_k) = 1$ und $p_k | y_2^{\varphi(m)} F_m\left(\frac{x_2}{y_2}\right)$, ist gleich $\varphi\left(\frac{m}{p_k^{\alpha_k}}\right) \frac{\varphi(p_k)}{2}$.

Ordnen wir analog (8) je zwei Zahlenpaaren x_1, y_1 und x_2, y_2 ein Paar x, y zu, so erhalten wir:

(16) $$\begin{aligned} x &= x_1 + c_1 n_1 = x_2 + c_2 p_k; \; 0 \leq c_1, d_1 < p_k; \\ y &= y_1 + d_1 n_1 = y_2 + d_2 p_k; \; 0 \leq c_2, d_2 < n_1. \end{aligned}$$

Beachten wir die Bemerkung vor (9), so ergibt sich aus (14), (15) und (16):

(17) Die Anzahl der (mod n) inkongruenten Paare x, y, für die $(x, n) = (y, n) = 1$ und $n | y^{\varphi(m)} F_m\left(\frac{x}{y}\right)$, ist gleich $(\varphi(m))^l \frac{\varphi(n_1)}{2} \cdot \varphi\left(\frac{m}{p_k^{\alpha_k}}\right) \frac{\varphi(p_k)}{2} \cdot 2 = \varphi\left(\frac{m}{p_k^{\alpha_k}}\right)(\varphi(m))^l \frac{\varphi(n)}{2}$.

Weil $y^{\varphi(m)} F_m\left(\frac{x}{y}\right) = h^{\varphi(m)} y'^{\varphi(m)} F_m\left(\frac{x'}{y'}\right)$ und wegen $(x, n) = 1$ auch $(h, n) = 1$, ist die Schlußbehauptung von Satz (1) sofort einleuchtend und dieser Satz hiermit vollständig bewiesen.

(18) **Hilfssatz.** *Es seien u und v zwei positive ganze Zahlen. Ferner sei $(u, v) = 1$ und $1 \leq u < v$. Dann gibt es zwei positive ganze Zahlen a und b so, daß $1 = bv - au$. Im Falle $v = u + 1$ kann man $a = b = 1$, im Falle $u = 1$ kann man $b = 1$ und $a = v - 1$ wählen; in allen übrigen Fällen können a und b so bestimmt werden, daß $v > a > b \geq 1$ und $u > b$ ist.*

Beweis. $v = u + 1$ und $a = b = 1$ ergeben $bv - au = u + 1 - u = 1$, und aus $1 = u < v$ mit $a = v - 1$ und $b = 1$ folgt $bv - au = v - (v - 1) = 1$.

Wir können jetzt $1 < u < v - 1$ annehmen. Wegen $(u, v) = 1$ läßt sich 1 darstellen als Vielfachsumme von u und v; es sei $1 = Au + Bv$. Man sieht, daß A und B nicht beide null sein können. Mit $|A| = a$ und $|B| = b$ folgen aus $1 = au + bv \geq u > 1$ und $1 = -au - bv < 0$ Widersprüche. Ist $1 = au - bv$, so wählen wir die positive ganze Zahl k so, daß $kv > a$ und $ku > b$ und bestimmen a_1 und b_1 aus den beiden Gleichungen $a = kv - a_1$; $b = ku - b_1$. Dann wird

$$1 = au - bv = (kv - a_1)\, u - (ku - b_1)\, v = -a_1 u + b_1 v.$$

Wir können also von nun an voraussetzen, daß 1 darstellbar ist in der Gestalt $1 = bv - au$.

Aus $a \leq b$, d. h. $b = a + c$ mit $c \geq 0$, folgt $1 = (a + c)\, v - au = a(v - u) + cv$. Wäre $a = 0$, so ergäbe $1 = cv > v > 1$ einen Widerspruch. Aus $a > 0$ folgt mit $1 \geq a\,(v - u)$ wegen $u < v - 1$ ebenfalls ein Widerspruch. Es muß also gelten: $a > b$. Aus $1 = bv - au$ sieht man ferner, daß $b \geq 1$. Sind die Bedingungen $v > a$ und $u > b$ nicht beide erfüllt, so setzen wir $a = k_1 v + a_2$; $b = k_2 u + b_2$ und bestimmen k_1 und k_2 so, daß $0 < a_2 \leq v$ und $0 < b_2 \leq u$. Weil $1 < u < v$, muß sogar $0 < a_2 < v$ und $0 < b_2 < u$ sein. Denn $a_2 = v$ lieferte $v|a$ und wegen $1 = bv - au$ auch $v|1$; $b_2 = u$ führte zu $u|b$ und $u|1$. Wir erhalten schließlich

$$1 = bv - au = (k_2 u + b_2)\, v - (k_1 v + a_2)\, u = uv\,(k_2 - k_1) + b_2 v - a_2 u.$$

Nun ist aber $|b_2 v - a_2 u| < \operatorname{Max}(b_2 v, a_2 u) \leq uv - u \leq uv - 2$. Das bedeutet $k_2 - k_1 = 0$ und $1 = b_2 v - a_2 u$ mit $v > a_2 > b_2 \geq 1$; $u > b_2$. Damit ist (18) bewiesen.

(19) **Hilfssatz.** *$\alpha > 0$ sei eine beliebige reelle Zahl, c sei eine positive ganze Zahl, die der Bedingung $(c + 1)^2 > \alpha$ genügt. u und v seien zwei teilerfremde positive ganze Zahlen, für die die Ungleichung $1 \leq u < v \leq c$ besteht. Dann lassen sich u und v so bestimmen, daß sie den obigen Bedingungen genügen und jeder Punkt des offenen Intervalls $(0, \alpha)$ in mindestens einem der offenen Intervalle $(0,\ c + 1)$, $\left(u\frac{\alpha}{v} - \frac{c+1}{v},\ u\frac{\alpha}{v} + \frac{c+1}{v}\right)$, $(\alpha - c - 1, \alpha)$ enthalten ist.*

Beweis. Nach (18) gibt es zwei positive ganze Zahlen a und b so, daß $1 = bv - au$ ist. Wir wollen nun zeigen, daß wir a und b außerdem so wählen können, daß sie auch noch den beiden Bedingungen $1 \leq b < a \leq c$ und $(c + 1)(v + a) > \alpha$ genügen. Im Falle $c > v = u + 1$ setzen wir $a = kv + 1$ und $b = ku + 1$. Dabei wählen wir die positive ganze Zahl k so, daß $v \leq kv \leq c - 1 < (k + 1)\, v$. Dann wird

$$bv - au = (ku + 1)\, v - (kv + 1)\, u = v - u = 1;$$

$$1 < b = ku + 1 < a = kv + 1 \leq c;$$

$$(c + 1)(a + v) = (c + 1)((k + 1)\, v + 1) \geq (c + 1)^2 > \alpha.$$

Im Falle $u = 1$ setzen wir $a = k_1 v - 1$; $b = k_1$ und wählen k_1 so, daß

$$v \leq k_1 v \leq c + 1 < (k_1 + 1)\, v.$$

Dann folgt

$$bv - au = k_1 v - (k_1 v - 1) = 1;$$

$$(c + 1)(a + v) = (c + 1)((k_1 + 1)\, v - 1) \geq (c + 1)^2 > \alpha.$$

Weil $v = u + 1 = 2$ schon oben behandelt worden ist, können wir jetzt $v \geq 3$ annehmen und erhalten $1 \leq k_1 = b < 2k_1 \leq 3k_1 - 1 \leq k_1 v - 1 = a \leq c$.

Im allgemeinen Falle können wir zunächst nach (18) voraussetzen: $1 = b_1 v - a_1 u$; $c \geq v > a_1 > b_1 \geq 1$ und $u > b_1$. Wir setzen $a = k_2 v + a_1$; $b = k_2 u + b_1$ und bestimmen die nichtnegative ganze Zahl k_2 durch $0 \leq k_2 v \leq c - a_1 < (k_2 + 1) v$. Dann erhält man

$$bv - au = (k_2 u + b_1) v - (k_2 v + a_1) u = b_1 v - a_1 u = 1;$$

$$1 \leq b = k_2 u + b_1 < k_2 v + a_1 = a \leq c;$$

$$(c + 1)(a + v) = (c + 1)\ ((k_2 + 1) v + a_1) \geq (c + 1)^2 > \alpha.$$

Aus $(c + 1)(a + v) > \alpha = \alpha (bv - au)$ ergibt sich nun

$$\alpha au + (c + 1) a > \alpha bv - (c + 1) v;\ u \frac{\alpha}{v} + \frac{c+1}{v} > b \frac{\alpha}{a} - \frac{c+1}{a}.$$

Schreiben wir für b und a die Buchstaben u_1 bzw. v_1, so können wir nach dem Vorangehenden sagen: Mit Ausnahme des Falles $c = v = u + 1$ gibt es zu je zwei teilerfremden Zahlen u und v mit $1 \leq u < v \leq c$ zwei teilerfremde Zahlen u_1 und v_1 mit $1 \leq u_1 < v_1 \leq c$, und es gilt die Ungleichung

$$u \frac{\alpha}{v} + \frac{c+1}{v} > u_1 \frac{\alpha}{v_1} - \frac{c+1}{v_1}.$$

Im Falle $c > v = u + 1$; $a = kv + 1$; $b = ku + 1$ ergibt sich

$$\frac{u}{v} = \frac{\left(k + \frac{1}{v}\right) u}{\left(k + \frac{1}{v}\right) v} = \frac{ku + \frac{u}{v}}{kv + 1} < \frac{ku + 1}{kv + 1} = \frac{b}{a} = \frac{u_1}{v_1}.$$

Im Falle $u = 1$ liefert $a = k_1 v - 1$; $b = k_1 \geq 1$:

$$\frac{u}{v} = \frac{1}{v} < \frac{k_1}{k_1 v - 1} = \frac{b}{a} = \frac{u_1}{v_1}.$$

Im allgemeinen Falle ist $b_1 v > a_1 u$, wegen $b_1 v - a_1 u = 1$,

$$\text{und daher } \frac{u}{v} = \frac{k_2 u + \frac{u}{v} a_1}{k_2 v + a_1} < \frac{k_2 u + b_1}{k_2 v + a_1} = \frac{b}{a} = \frac{u_1}{v_1}.$$

Das offene Intervall $\left(\frac{\alpha}{c} - \frac{c+1}{c},\ (c - 1) \frac{\alpha}{c} + \frac{c+1}{c}\right)$ wird also von der Gesamtheit der offenen Intervalle $\left(u \frac{\alpha}{v} - \frac{c+1}{v};\ u \frac{\alpha}{v} + \frac{c+1}{v}\right)$ restlos überdeckt. Und $(c+1)^2 > \alpha$ führt zu $c + 1 > \frac{\alpha}{c} - \frac{c+1}{c}$ und zu $\alpha - \left(\frac{\alpha}{c} - \frac{c+1}{c}\right) = (c - 1) \frac{\alpha}{c} + \frac{c+1}{c} > \alpha - c - 1$. Damit ist (19) bewiesen.

(20) **Satz.** *m und n sollen die am Anfang dieses Abschnittes erwähnten Zahlen sein. Dann existieren zwei natürliche Zahlen a und b so, daß*

$$(a, b) = (a, n) = (b, n) = h;\ a = a' h;\ b = b' h;\ n = n' h;$$

$$n | h\, a'^{\varphi(m)} F_m \left(\pm \frac{b'}{a'}\right) \textit{(es gilt entweder das obere oder das untere Vorzeichen)};$$

$$1 \leq a'^2 < b'^2 < \frac{n'}{h} = \frac{n}{h^2}\ ^{4)}.$$

Beweis. Nach (1) gibt es eine positive ganze Zahl x so, daß $0 < x < n$ und $n | F_m(x)$. Wenden wir nun (19) an und schreiben statt α jetzt n, so können wir sagen: x ist enthalten in mindestens einem der drei offenen Intervalle

$$(21) \qquad (0, c + 1);\ \left(u \frac{n}{v} - \frac{c+1}{v},\ u \frac{n}{v} + \frac{c+1}{v}\right);\ (n - c - 1, n).$$

---

[4]) Vgl. z. B. Arnold Scholz, Einführung in die Zahlentheorie, S. 45 und S. 133, Berlin 1939, Sammlung Göschen. Der oben bewiesene Satz stellt insofern eine gewisse Erweiterung dar, als n keine Primzahl zu sein braucht.

Dabei gelten für c, u und v die Bedingungen

$$(22) \qquad (c+1)^2 > n;\ (u, v) = 1;\ 1 \leq u < v \leq c.$$

Wir wählen speziell c so, daß

$$(23) \qquad c^2 \leq n < (c+1)^2.$$

Im Falle $0 < x \leq c$ können wir $a = 1$ und $b = x$ wählen. Dann ist $n | F_m(b)$. Aus $b^2 = c^2 = n$ folgt wegen $F_m(b) | b^m - 1$ ein Widerspruch. Also ist $1 < b^2 < n$ und (20) für diesen Fall bewiesen.

Im Falle $n - c - 1 < x < n$ gilt $-c \leq x - n \leq -1$ und $n | F_m(x - n)$. Wir setzen $a = 1$ und $-b = x - n$. Es gilt $1 = a^2 < b^2 < n$, denn wegen $m > 2$ können wir $-b \neq -1$ annehmen.

Im Falle $\frac{un - c - 1}{v} < x < \frac{un + c + 1}{v}$ setzen wir

$$(24) \quad x = \frac{un \pm r}{v};\ 0 \leq r \leq c \text{ (es gilt entweder das obere oder das untere Vorzeichen).}$$

Aus $n | F_m(x)$ folgt nun

$$(25) \quad x^m \equiv 1 \pmod{n};\ (x^{m_\varkappa} - 1, n) = 1 \text{ für } \varkappa = 1, \ldots, k-1;\ (x^{m_k} - 1, n) = (p_k, n)$$

und daraus mittels (24)

$$(26) \qquad vx \equiv \pm r \pmod{n};\ v^m \equiv (\pm r)^m \pmod{n}.$$

Aus der Annahme $v = r$ folgt wegen (22) und (24)

$$(27) \qquad v | n;\ x = u\frac{n}{v} \pm 1.$$

Nach (22) und (23) ergibt sich

$$(28) \qquad 1 < v \leq c \leq \frac{n}{c} \leq \frac{n}{v}.$$

Berücksichtigen wir die Gestalt von n, so folgt weiterhin

$$(29) \qquad p_k < \frac{n}{v}.$$

Ist nun $x = u\frac{n}{v} + 1$, so folgt mit $(x - 1, n) \geq \frac{n}{v} > p_k$ ein Widerspruch zu (25), ist $x = u\frac{n}{v} - 1$ und m gerade, so ergibt sich ebenfalls ein Widerspruch zu (25) aus $(x^2 - 1, n) \geq \frac{n}{v}$. Bei ungeradem m folgt aus (25) und $x = u\frac{n}{v} - 1$:

$$x^m \equiv (-1)^m \equiv -1 \equiv 1 \left(\bmod \frac{n}{v}\right);\ \frac{n}{v} \,\Big|\, 2,$$

d. h. ein Widerspruch zu (29). Wir können von nun an

$$(30) \qquad v \neq r$$

annehmen.

$r = 0$ führt nach (22) und (24) zu $x = u\frac{n}{v}$ und nach (25) zum Widerspruch. Für $v^2 = c^2 = n$ ergibt sich aus (24):

$$vx = uv^2 \pm r, \text{ also } v | r, \text{ d. h. } r = v$$

wegen $r > 0$: damit folgt ein Widerspruch zu (30). $r^2 = n$ ergibt aus (23) und (24):

$$r^2 = c^2 = n;\ vx = ur^2 \pm r.$$

Wegen $x^m \equiv 1 \pmod{r^2}$ ist $(x, r) = 1$ und daher $r | v$. Nach (22) und (23) ergibt sich $r = v$ im Widerspruch zu (30).

Zusammenfassend können wir bisher sagen:

(31) $$1 < v^2 < n;\ 1 \leq r^2 < n;\quad v \neq r;\ v^m \equiv (\pm r)^m \pmod{n}.$$

$r = 1$ zieht wegen (24) und (25) $vx = un \pm 1$; $v^m \equiv (\pm 1)^m \pmod{n}$; $v^{m_\varkappa} x^{m_\varkappa} \equiv (\pm 1)^{m_\varkappa} \pmod{n}$ nach sich. Wäre q ein gemeinsamer Primteiler von n und $v^{m_\varkappa} - (\pm 1)^{m_\varkappa}$, so müßte auch $q | x^{m_\varkappa} - 1$ sein. Aus (25) folgt $\left(n, v^{m_\varkappa} - (\pm 1)^{m_\varkappa}\right) = 1$ für $\varkappa = 1, \ldots, k-1$ und $\left(n, v^{m_k} - (\pm 1)^{m_k}\right) = (n, p_k)$, d. h.

(32) $$n | F_m(\pm v).$$

Für $a = 1$, $b = v$ ist also (20) im Falle $r = 1$ bewiesen.

Nach (24) ergibt sich $vx = un \pm r$ und daraus mit Hilfe von (22) und (25), d. h. $(u, v) = (x, n) = 1$

(33) $$(n, v) = (v, r) = (r, n) = h;\quad n = n'h;\quad v = v'h;\quad r = r'h.$$

Aus der Gestalt von n ergibt sich, daß

(34) entweder $h = 1$ oder $h = p_k$ ist oder h mindestens einen Primteiler der Restklasse 1 (mod m) enthält.

Nach (24), (26) und (33) zeigt sich, daß

(35) $$\begin{gathered} v'x = un' \pm r';\quad v'^m \equiv (\pm r')^m \pmod{n'}; \\ (n', v') = (v', r') = (r', n') = 1. \end{gathered}$$

Aus $v'^{m_\varkappa} x^{m_\varkappa} \equiv (\pm r')^{m_\varkappa} \pmod{n'}$ folgt für einen gemeinsamen Primteiler q von n' und $v'^{m_\varkappa} - (\pm r')^{m_\varkappa}$, daß $q | x^{m_\varkappa} - 1$. Nach (25) bedeutet dies $\left(n', v'^{m_\varkappa} - (\pm r')^{m_\varkappa}\right) = 1$ für $\varkappa = 1, \ldots, k-1$ und $\left(n', v'^{m_k} - (\pm r')^{m_k}\right) = (n, p_k)$, also

(36) $$n' | v'^{\varphi(m)} F_m\left(\frac{\pm r'}{v'}\right).$$

Setzen wir $\operatorname{Min}(r', v') = a'$ und $\operatorname{Max}(r', v') = b'$, so folgt aus (31), (33), (35) und (36)

(37) $$\begin{gathered} n = hn' | ha'^{\varphi(m)} F_m\left(\pm \frac{b'}{a'}\right);\ (a', b') = 1 \\ 1 \leq h^2 a'^2 < h^2 b'^2 < n \end{gathered}$$

und somit der vollständige Beweis von (20).

(38) **1. Beispiel zu (20).** Für $m = 3$ ist

$$ha'^{\varphi(m)} F_m\left(\pm \frac{b'}{a'}\right) = h(a'^2 \pm a'b' + b'^2) < 3hb'^2 < \frac{3n}{h}.$$

Nach (34), (37) und I, (1) sieht man sofort, daß $h = 1$ und $n = a^2 \pm ab + b^2$ sein muß.

(39) **2. Beispiel zu (20).** Für $m = 4$ ist

$$ha'^{\varphi(m)} F_m\left(\pm \frac{b'}{a'}\right) = h(a'^2 + b'^2) < 2hb'^2 < \frac{2n}{h},$$

also $h = 1$ und $n = a^2 + b^2$.

(40) **Ergänzung zu (20).** *Ist n gleich einer Primzahl der Restklasse* 1 (mod m) *oder gleich dem Quadrat einer solchen Primzahl, so muß $h = 1$ sein.*

Beweis. Für $n = q^\beta$ und $\beta < 3$ folgt die Behauptung aus $1 \leq a'^2 < b'^2 < \frac{q^\beta}{h^2}$ und $h | q^\beta$.

Eine Folgerung aus (20) ist

(41) **Satz.** *Für jede Primzahl $q > 23$ und jede positive Zahl r mit $(r, q-1) = \delta > 1$ gibt es mindestens eine positive Zahl $y < \sqrt{q}$ so, daß y nicht r-ter Potenzrest von q, d. h. die Kongruenz $x^r \equiv y \pmod{q}$ unlösbar ist*[5]).

[5]) Vgl. T. Nagell, Kristiania Videnskapsselskapets Skrifter I. Mat. Nat. Kl. 1924, Nr. 13 oder E. Bessel-Hagen, Zahlentheorie, Pascals Repertorium der höheren Mathematik I, 3, S. 1511 (1929). Ferner daselbst auf S. 1497 die Bemerkung über die Arbeiten von Winogradoff.

Beweis. Eine Zahl y mit $(y, q) = 1$ ist bekanntlich r-ter Potenzrest von q dann und nur dann, wenn $y^{\frac{q-1}{\delta}} \equiv 1 \pmod q$ gilt. Wählen wir in (20) $m = q - 1$ und $n = q$, so ist nach (40) $h = 1$. Es gibt daher zwei natürliche Zahlen a und b so, daß

$$(42) \qquad (a, b) = 1,\ 1 \leq a^2 < b^2 < q;\ q \,|\, a^{\varphi(q-1)} F_{q-1}\left(\pm \frac{b}{a}\right).$$

Das bedeutet

$$(43) \qquad a^{\frac{q-1}{\delta}} \not\equiv (\pm b)^{\frac{q-1}{\delta}} \pmod q \text{ für jedes } \delta | q-1 \text{ mit } \delta > 1.$$

Gilt in (43) das obere Vorzeichen, so folgt aus

$$(44) \qquad a^{\frac{q-1}{\delta}} \not\equiv b^{\frac{q-1}{\delta}} \pmod q$$

sofort, daß mindestens eine der Zahlen a, b nicht r-ter Potenzrest von q ist. Bezeichnen wir diese Zahl mit y, so gilt nach (42) $y < \sqrt{q}$. Gilt in (43) das untere Vorzeichen, so nimmt (43) die Gestalt

$$(45) \qquad a^{\frac{q-1}{\delta}} \not\equiv (-1)^{\frac{q-1}{\delta}} b^{\frac{q-1}{\delta}} \pmod q$$

an. Für gerades $\frac{q-1}{\delta}$ nimmt (45) die Gestalt (44) an, und daraus folgt sogleich wieder die Richtigkeit von (41). Wenn $\frac{q-1}{\delta}$ ungerade sein soll, muß δ selbst gerade sein, $\delta = 2\delta'$. Aus $a^{\frac{q-1}{\delta}} \equiv b^{\frac{q-1}{\delta}} \pmod q$ würde sich dann ergeben:

$$(46) \qquad a^{\frac{q-1}{\delta'}} \equiv b^{\frac{q-1}{\delta'}} \equiv (\pm b)^{\frac{q-1}{\delta'}} \pmod q.$$

Für $\delta > 2$, also $\delta' > 1$, steht (46) im Widerspruch zu (43). Beachten wir, daß $q \equiv 1 \pmod 4$ für ungerades $\frac{q-1}{\delta}$ auf $\delta' > 1$ führt, so sehen wir, daß wir zum vollständigen Beweise von (41) nur noch den Fall

$$(47) \qquad q \equiv 3 \pmod 4;\ \delta' = 1, \text{ d. h. } \delta = 2$$

betrachten müssen. Dieser Fall wird erledigt durch

(48) **Satz.** *Für jede Primzahl $q > 23$ gibt es mindestens einen quadratischen Nichtrest von q, der kleiner als $\sqrt{q}$ ist.*

Beweis. Nach (47) können wir $q \equiv 3 \pmod 4$ annehmen. Sei wieder $c^2 < q < (c+1)^2$. Wären $1, 2, \ldots, c$ quadratische Reste, so wären alle Zahlen $q-1, q-2, \ldots, q-c$ quadratische Nichtreste. Daraus folgt

$$(49) \qquad c^2 \leq q - c - 1, \text{ d. h. } c(c+1) \leq q - 1.$$

Andererseits ergibt sich aus $(c+1)^2 \geq q + 1$ zunächst $c^2 + 2c = c(c+2) \geq q$, und weil q Primzahl ist, auch $c(c+2) \geq q + 1$, somit

$$(50) \qquad c(c+1) \geq q - c + 1.$$

Nach der obigen Annahme und nach (49) und (50) muß $c(c+1)$ ein quadratischer Nichtrest sein, und weil c ein Rest sein soll, muß auch $c + 1$ Nichtrest sein. Wäre $c + 1$ eine zusammengesetzte Zahl, so wären nach Annahme die einzelnen Faktoren Reste. Also folgt

$$(51) \qquad c + 1 = p = \text{Primzahl und quadratischer Nichtrest von } q.$$

Weil wir $c > 1$ annehmen können, ist $c + 1$ ungerade, $c + 2$ also gerade. Daher

$$c + 2 = \frac{c+2}{2} \cdot 2;\ 2 \leq c;\ \frac{c+2}{2} \leq c.$$

Nach Annahme sind also 2 und $\frac{c+2}{2}$, mithin auch

(52) $c + 2$ und $(c-1)(c+2) = c^2 + c - 2$ quadratische Reste.

Nach (49) ist $c^2 + c - 2 < c(c+1) \leq q - 1$ und nach (50) $c^2 + c - 2 \geq q - c - 1$. Wegen (52) kann nur

(53) $$c^2 + c - 2 = q - c - 1, \text{ d. h. } (c+1)^2 = q + 2$$

sein. Mit (51) ergibt dies

(54) $$q = p^2 - 2 = c^2 + 2c - 1.$$

Nach (51) und (52) folgt $(c+1)(c+2) = q + c + 3 =$ Nichtrest. Wäre $c + 3$ zusammengesetzt, so müßte einer der Faktoren größer als c sein, also $c + 3 \geq 2(c+1)$. Das führt zu dem Widerspruch $c \leq 1$. Wir erhalten

(55) $c + 3 =$ Primzahl und quadratischer Nichtrest von q.

Aus $c > 2$ und

$$(c-2)(c+4) = (c-2)\frac{c+4}{2} \cdot 2 = \text{Rest},$$

$$(c-2)(c+4) = c^2 + 2c - 8 = q - 7 \leq q - c - 1$$

folgt

(56) $$c \leq 6;\quad q < 7^2 = 49.$$

Nach (51), (54) und (55) führt

$c = 6$ zu $p = 7$; $q = 47$; $c + 3 = 9$; Widerspruch zu (55);

$c = 5$ zu $p = 6$; Widerspruch zu (51);

$c = 4$ zu $p = 5$; $q = 23$; $c + 3 = 7$,

und die Kongruenzen $1^{11} \equiv 2^{11} \equiv 3^{11} \equiv 4^{11} \equiv 1 \pmod{23}$ zeigen, daß für $q = 23$ die Sätze (48) und (41) nicht gelten.

Verfeinerte Lösung der asymptotischen Dichtenaufgabe.

Von *Hans-Heinrich Ostmann* in Marburg.

§ 1. Einleitung.

In der vorliegenden Arbeit knüpfe ich zum Teil an Resultate über das Verhalten der asymptotischen Dichte einer Summe von zwei Zahlenmengen an, die ich bereits früher veröffentlicht hatte[1]). Inzwischen ist zu dieser Frage auch von Herrn Erdös[2]) ein Ergebnis veröffentlicht worden, und es liegt daher nahe, zu untersuchen, in welcher Beziehung die nun vorliegenden Abschätzungen zueinander stehen, bzw. inwieweit sie sich gegenseitig schon bedingen. Es wird sich dabei zeigen, daß sich aus den vom Verfasser früher entwickelten Methoden[3]) eine sehr allgemeine Abschätzungsformel gewinnen läßt, deren verschiedene Spezialisierungen dann zu der Formel von Herrn Erdös sowie denen des Verfassers führen. Zugleich wird sich auch noch leicht eine Verallgemeinerung der Formel von Herrn Erdös erreichen lassen, indem eine seiner Voraussetzungen umfassender gehalten und überdies die erzielte Abschätzung schärfer wird.

Es möge kurz an die Definition der asymptotischen Dichte einer Menge nichtnegativer ganzer Zahlen erinnert werden. Es heißt

$$\delta^*(\mathfrak{M}) = \mu^* = \underline{\lim}\, \frac{M(n)}{n}\,, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

die *asymptotische Dichte von* $\mathfrak{M}$. Offenbar gilt auch

$$\mu^* = \underline{\lim}\, \frac{M(a, n)}{n}\,, \quad n = s, s+1, \ldots;\ s > 0 \text{ und ganz}^{4)}.$$

Bedeuten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei solcher Mengen, so werde noch genau wie in [1] die *zweigliedrige asymptotische Dichte*

$$\sigma^*(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \sigma^* = \underline{\lim}\, \frac{A(n) + B(n)}{n}\,, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

eingeführt.

---

[1]) H.-H. Ostmann, Beweis einer Vermutung über die asymptotische Dichte und Verschärfung einer Abschätzung für die Dichte der Summe zweier Zahlenmengen, Dtsch. Math. 6, 213—247 (1941), im folgenden kurz mit [1] zitiert.

[2]) P. Erdös, On the asymptotic density of the sum of two sequences, Ann. Math. Princeton (2) 43, 65—68 (1942).

[3]) Siehe Fußnote [1]).

[4]) In Abänderung der in [1] verwendeten Bezeichnungsweise, wo $M(0, n)$ statt wie jetzt üblich $M(-1, n)$ geschrieben wurde. Allgemein sei nämlich $M(x, y)$ für $-1 \leq x < y$ die Anzahl aller Elemente der Menge $\mathfrak{M}$ in dem abgeschlossenen Intervall $[x+1, y]$, ferner $M(x, y) = 0$ für $x \geq y \geq 0$. Dasselbe gilt natürlich auch für die analogen Symbole. Des weiteren bedeute $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}$ den Durchschnitt, $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{N}$ die Vereinigungsmenge der Mengen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ (in [1] mit $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ bzw. $\mathfrak{M} \dot{+} \mathfrak{N}$ bezeichnet).

Herr Erdös hat nun bewiesen:

$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien Mengen nichtnegativer ganzer Zahlen, $\delta^*(\mathfrak{A}) = \alpha^*$, $\delta^*(\mathfrak{B}) = \beta^*$ ihre asymptotischen Dichten, $\alpha^* + \beta^* \leq 1$, $\beta^* \leq \alpha^*$[5]*, $0 \in \mathfrak{A}$, $\{0, 1\} \subseteq \mathfrak{B}$. Dann gilt*[6]

$$\delta^*(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \geq \alpha^* + \tfrac{1}{2}\beta^*.$$

Ich hatte in [1] ohne die einschränkenden Voraussetzungen $1 \in \mathfrak{B}$, $\beta^* \leq \alpha^*$ die Abschätzungen

$$(1) \qquad \delta^*(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \begin{cases} = 1 \text{ für } \sigma^* > 1, \\ \geq \frac{j}{j+1}\sigma^* \left(\geq \frac{j}{j+1}(\alpha^* + \beta^*)\right) \text{ für } \sigma^* \leq 1^{7)} \end{cases}$$

angegeben. In Wahrheit ist in [1] jedoch mehr bewiesen worden als (1), wovon ich später auch wesentlich Gebrauch zu machen habe.

Statt der Erdös-Formel wird sich einerseits die schärfere Abschätzung

$$\gamma^* \geq \lim_{n=1,2,\ldots} \frac{A(n) + \frac{1}{2}B(n)}{n} \geq \alpha^* + \tfrac{1}{2}\beta^*,$$

andrerseits die folgende Verallgemeinerung leicht mit ergeben: Versteht man für jedes ganze $k > 0$ unter einer *k-gliedrigen Kette einer Menge* solche k aufeinanderfolgende, natürliche Zahlen, die zugleich Elemente dieser Menge sind, so läßt sich, wenn man die Erdös-Voraussetzung, daß die 2-gliedrige Kette $\{0,1\} \subseteq \mathfrak{B}$ ist, durch die allgemeinere Voraussetzung ersetzt, daß $\mathfrak{B}$ *irgendeine* k-gliedrige Kette enthält, die Abschätzung

$$\gamma^* \geq \lim_{n=1,2,\ldots} \frac{A(n) + \frac{k-1}{k}B(n)}{n} \geq \alpha^* + \frac{k-1}{k}\beta^*$$

beweisen. Die Voraussetzung $\beta^* \leq \alpha^*$ wird dabei nicht benötigt werden.

Daß ein direkter Vergleich von $\alpha^* + \frac{1}{2}\beta^*$ mit (1) nicht ohne weiteres möglich ist, erhellt sofort aus der von mir in [1] bewiesenen Tatsache, daß zu jedem $\varepsilon > 0$ Mengen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ mit

$$(2) \qquad \delta^*(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) < \frac{j}{j+1}\sigma^* + \varepsilon = \frac{j}{j+1}(\alpha^* + \beta^*) + \varepsilon$$

konstruiert werden können, andrerseits bei willkürlich vorgegebenen j, α^*, β^* numerisch durchaus

$$(3) \qquad \alpha^* + \tfrac{1}{2}\beta^* > \frac{j}{j+1}(\alpha^* + \beta^*)$$

möglich ist, z. B. $j = 2$, $\alpha^* = \frac{1}{2}$, $\beta^* = \frac{1}{3}$; denn es ist $\frac{2}{3} > \frac{5}{9}$.

Schon oben hatte ich gesagt, daß in [1] mehr als (1) bewiesen wurde, und zwar sind die Abschätzungsformeln für die Anzahlfunktionen $C(n)$ bzw. $C(-1, n)$ von wesent-

---

[5]) Nach meinem Dafürhalten scheint in dem Beweis nur $\beta^* \leq 2\alpha^*$ wirklich benötigt worden zu sein.

[6]) Es möge kurz an die Definition der Summe $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \cdots + \mathfrak{A}_n = \mathfrak{C}$ erinnert werden: $\mathfrak{C}$ ist die Menge aller Zahlen der Form $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $a_\nu \in \mathfrak{A}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Ist speziell $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, so folgt aus $0 \in \mathfrak{A}$ dann beispielsweise $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$.

[7]) j ist die kleinste ganze Zahl, für die die Funktion

$$J(n) = A(a-1, a+n) + B(b-1, b+n) - n - 2 = -1$$

ist; a, b sind dabei die jeweils kleinsten Elemente aus $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$. Falls $0 \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ ist, so ist $J(n) = A(n) + B(n) - n$. Läßt sich durch Weglassen von nicht notwendig gleich langen Anfangsstücken der Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ erreichen, daß das Restmengenpaar ein größeres j hat, so darf in (1) ohne weiteres dieses j eingesetzt werden (vgl. [1], § 2, I, Satz 3). Unter der Voraussetzung von Herrn Erdös ist offenbar $j \geq 2$. — Ohne daß es ausdrücklich gesagt wird, sei im folgenden stets vorausgesetzt, daß die für $\delta^*(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = \gamma^*$ bzw. γ'^* gegebenen Abschätzungswerte nicht größer als Eins seien, da andernfalls nach (1) ohnehin $\gamma^* = 1$ gilt.

lich feinerer Art, indem noch gewisse Aufbaueigenschaften von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ berücksichtigt werden, die beim Übergang zu (1) außer acht gelassen werden. Für die anzustellenden Überlegungen verwende ich aus [1] lediglich § 2, I und § 3, I.

§ 2. Herleitung einer allgemeinen Abschätzungsformel.

Aus [1], § 3, I, Definition 3 — Erklärung der Folge $\mathfrak{Z}_F$ (dort nur mit $\mathfrak{Z}$ bezeichnet) — sowie aus Satz 3 in [1], § 2, I und Bemerkung 3 in [1], § 3, I folgt, daß schon

$$\gamma^* \geq \sigma^* \geq \alpha^* + \beta^*$$

gilt, wenn $\mathfrak{Z}_F$ unendlich ist. Da in diesem Fall die Abschätzung trivialerweise oberhalb sowohl der von Herrn Erdös als auch von (1) liegt, werde im folgenden $\mathfrak{Z}_F$ als endlich vorausgesetzt:

$$\mathfrak{Z}_F = \{z_1, z_2, \ldots, z_k\}, \quad z_1 = 0, k \geq 1.$$

Gl. (36) aus [1], § 3, I lautet für $\nu = k$ wegen $z_k = \infty$

$$(4) \qquad [z_k, \infty] \cap (\mathfrak{G}_k + \mathfrak{H}_k) = \mathfrak{G}_k + \mathfrak{H}_k \subseteq \mathfrak{C}' \subseteq \mathfrak{C}^{8)},$$

$$\mathfrak{C}' = \mathfrak{B} + \mathfrak{D}, \ \mathfrak{B} = \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}, \ \mathfrak{D} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}.$$

Also gilt erst recht

$$(5) \qquad \{z_k\} + \mathfrak{H}_k \subset \mathfrak{C}' \cap [z_k, \infty],$$

woraus sofort

$$C(z_k - 1, z_k + n) \geq C'(z_k - 1, z_k + n) \geq H_k(-1, n)$$

folgt. [1], § 3, I, Gleichung (37f) lautet für $\nu = k$

$$(6) \qquad H_k(-1, n) \geq n + 1 - JW(0, n) - G_k(z_k - 1, z_k + n) + 1^{9)}.$$

Setzt man $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \vee \mathfrak{G}_2 \vee \ldots \vee \mathfrak{G}_k$, so gilt nach (6) erst recht

$$(7) \qquad H_k(-1, n) \geq n + 1 - JW(0, n) - G(-1, z_k + n) + 1$$
$$= n + 1 - JW(n) - G(z_k + n)^{10)}.$$

Nun seien $n = n_\varkappa > 0$, $\varkappa = 1, 2, \ldots$, diejenigen ganzen Zahlen, für die immer wenigstens eine der beiden nicht fallenden Funktionen $JW(n)$ und $G(n)$ wirklich zunimmt. Die Menge der $n_\varkappa$ ist dann offenbar die Vereinigungsmenge aller $\underline{j}_\lambda$ mit der aller GML-Intervallanfänge $\underline{j}_{\varrho\mu}$; sie darf als unendlich angenommen werden, da andernfalls aus (7) sofort folgt, daß dann $\mathfrak{H}_k$, also erst recht $\mathfrak{C}'$ von einer Stelle an sämtliche natürliche Zahlen enthält, so daß $\gamma^* = \gamma'^* = 1$ wird. Setzt man

$$\varepsilon_\varkappa = \begin{cases} 0 \text{ für } n_\varkappa = \underline{j}_\lambda \\ 1 \text{ für } n_\varkappa = \underline{j}_{\varrho\mu} \end{cases},$$

so ist $J(n_\varkappa) = -JW(n_\varkappa) + \varepsilon_\varkappa$, also

$$n_\varkappa + 1 - JW(n_\varkappa) = A(n_\varkappa) + B(n_\varkappa) - J(n_\varkappa) + 1 - JW(n_\varkappa)$$
$$= A(n_\varkappa) + B(n_\varkappa) + 1 - \varepsilon_\varkappa \geq A(n_\varkappa) + B(n_\varkappa),$$

und da

$$\lim_{n \to \infty} \frac{G(z_\varkappa + n) - G(n)}{n + 1} = 0$$

---

8) $[a, b]$, a, b ganz, bezeichne die Menge $\{a, a + 1, \ldots, b - 1, b\}$.

9) Vgl. Fußnote 4), wonach jetzt $JW(0, n)$ statt $JW(1, n)$ zu schreiben ist. Es sei hier an die in Fußnote 7) gegebene Definition der Funktion $J(n) = A(n) + B(n) - n$ sowie nach [1] an die Definition von $\underline{j}_\lambda$ = kleinste ganze Zahl, für die $J(n) = -(\lambda - 1)$ ist, erinnert; ferner $JW(n)$ = Anzahl der in $[1, n]$ liegenden $\underline{j}_\lambda$.

10) Da ja $JW(0, n) = JW(n)$ ist und $G(-1, z_k + n) = G(z_k + n) + 1$ wegen $0 \in \mathfrak{G}$.

ist, ergibt sich

$$\delta^*(\mathfrak{C}') = \lim_{n=\overline{1,2,\ldots}} \frac{C'(n)}{n} = \lim_{n=\overline{0,1,\ldots}} \frac{C'(-1,n)}{n+1} = \lim_{n=\overline{0,1,\ldots}} \frac{C'(z_k-1,z_k+n)}{n+1}$$

$$\geq \lim_{n=\overline{0,1,\ldots}} \frac{H_k(-1,n)}{n+1} \geq \lim_{n=\overline{0,1,\ldots}} \frac{n+1-JW(n)-G(z_k+n)}{n+1}$$

$$= \lim_{n=\overline{1,2,\ldots}} \frac{n+1-JW(n)-G(n)}{n} = \lim_{\varkappa=\overline{1,2,\ldots}} \frac{n_\varkappa+1-JW(n_\varkappa)-G(n_\varkappa)}{n_\varkappa}$$

$$\geq \lim_{\varkappa=\overline{1,2,\ldots}} \frac{A(n_\varkappa)+B(n_\varkappa)-G(n_\varkappa)}{n_\varkappa} \geq \lim_{n=\overline{1,2,\ldots}} \frac{A(n)+B(n)-G(n)}{n}.$$

Damit hat man

$$\gamma^* \geq \gamma'^* \geq \lim_{n=\overline{1,2,\ldots}} \frac{A(n)+B(n)-G(n)}{n}, \tag{8}$$

d. h. die angekündigte allgemeine Abschätzungsformel, die den Ursprung sowohl für die Erdös-Formel als auch für (1)[11]) darstellt. Formel (8) liefert sogar auch für eine unendliche $\mathfrak{Z}_F$-Folge $\gamma'^* \geq \sigma^*$, da dann, wenn $\mathfrak{G} = \{g_1, g_2, \ldots\}$ gesetzt wird, wegen $g_{\varkappa+1} - g_\varkappa \underset{\varkappa}{\rightarrow} \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G(n)}{n} = 0$$

ist, was überdies offensichtlich auch dann gilt, wenn die Menge aller $n_\varkappa$, also erst recht die Menge $\mathfrak{G}$ endlich ist. Zusammenfassend erhält man also den folgenden

Satz. *Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei beliebige Mengen nichtnegativer ganzer Zahlen, so gilt stets*

$$\gamma^* = \delta^*(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) \geq \gamma'^* = \delta^*(\mathfrak{B}+\mathfrak{D}) \geq \lim_{n=\overline{1,2,\ldots}} \frac{A(n)+B(n)-G(n)}{n}.$$

§ 3. Spezialisierung auf die Erdös-Formel und ihre Verschärfung.

Nunmehr soll aus (8) die Erdös-Formel hergeleitet werden. Nach [1], § 2, I, Satz 3 besteht, auch wenn $\mathfrak{Z}_F$ endlich ist, noch die Möglichkeit, $\gamma^* \geq \sigma^*$ nachzuweisen, dann nämlich, wenn sich immer wieder größere j-Werte ermitteln lassen[12]). Es brauchen also nur noch solche Mengen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ in Betracht gezogen zu werden, für die sich nicht unendlich viele Zahlenpaare im Sinne des erwähnten Satzes 3 aus [1] finden lassen. Es sei $\mathfrak{A} = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ und $\mathfrak{B} = \{b_0, b_1, b_2, \ldots\}$, $a_0 = b_0 = 0$, $b_1 = 1$. Von den speziellen Zahlenpaaren $(a_\varkappa, 0)$ nehme man eines mit $a_\varkappa = a_{\varkappa_1}$, das zugleich ein größtes Zahlenpaar im Sinne von [1], Satz 3 ist. Dann subtrahiere man von jedem Element in $\mathfrak{A} \cap [a_{\varkappa_1}, \infty]$ die Zahl $a_{\varkappa_1}$ und nenne die entstehende Menge $\mathfrak{A}_1$; es gilt $\sigma^*(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) = \sigma^*(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{B})$. Es kann daher wegen $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B} + \{a_{\varkappa_1}\} \subseteq \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ von vornherein $\mathfrak{A}$ in der Gestalt von $\mathfrak{A}_1$ angenommen werden.

Für die Herleitung der Erdös-Formel genügt es, zu zeigen, daß stets

$$B(n) \geq 2G(n) \tag{9}$$

ist; denn dann ist

$$\gamma^* \geq \lim_{n=\overline{1,2,\ldots}} \frac{A(n)+B(n)-G(n)}{n} \geq \lim_{n=\overline{1,2,\ldots}} \frac{A(n)+B(n)-\frac{1}{2}B(n)}{n}$$

$$= \lim_{n=\overline{1,2,\ldots}} \frac{A(n)+\frac{1}{2}B(n)}{n} \geq \alpha^* + \tfrac{1}{2}\beta^*,$$

womit die erste der behaupteten Verschärfungen der Erdös-Formel bewiesen wäre.

[11]) Für (1) vermittels der Überlegung, die zu Gleichung (41) in [1], § 3, I führt.

[12]) Vgl. Fußnote [7]).

Beweis von (9). Man nehme an, daß für ein gewisses $m > 0$

$$2G(m) > B(m) \tag{10}$$

gilt. Da nun jedes Element von $\mathfrak{G}$ zu $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$, also speziell auch zu $\mathfrak{B}$ gehört, besagt (10), daß sicher nicht in jedem GML-Intervall noch ein weiteres Element von $\mathfrak{B}$ liegt. Nun wird aber bei $G(m)$ die Null aus $\mathfrak{G}$ nicht mitgezählt, während andererseits $B(1) = 1$ ist; es gibt somit wenigstens ein vollständig in $[1, m]$ gelegenes GML-Intervall $[\underline{g}, \bar{g}]$ mit

$$[\underline{g}, \bar{g}] \cap \mathfrak{B} = \{\underline{g}\}, \qquad \underline{g} \neq 0.$$

Da nun $\underline{g}$ das einzige Element von $[\underline{g}, \bar{g}]$ in $\mathfrak{D} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ ist, so ist $\bar{g}$ das einzige Element von $[\underline{g}, \bar{g}]$ in $\overline{\mathfrak{B}}$. Daher

$$[\underline{g}, \bar{g}] \cap \mathfrak{A} = \{\underline{g}, \underline{g}+1, \ldots, \bar{g}-1\}. \tag{11}$$

Ferner gilt für die Anzahl der Elemente von $[\underline{g}, \bar{g}]$ — in Zeichen $Z(\underline{g}-1, \bar{g})$ —

$$Z(\underline{g}-1, \bar{g}) = \bar{g} - \underline{g} + 1 \geq Z(\mathfrak{J}_{z_1}) = j_2 + 1 = j + 1. \tag{12}$$

Weiter ist für $n \in [0, \bar{g} - \underline{g}]$ nach (11)

$$J(\mathfrak{A} \cap [\underline{g}, \infty], \mathfrak{B}; n) = A(\underline{g}-1, \underline{g}+n) + B(-1, n) - n - 2$$

$$\left.\begin{cases} \geq n + 1 + 2 - n - 2 = 1 \text{ für } n \in [1, \bar{g} - \underline{g} - 1] \\ \geq n + 2 - n - 2 = 0 \text{ für } n = 0 \text{ und } n = \bar{g} - \underline{g} \end{cases}\right\} \geq 0 \text{ für alle } n \in [0, \bar{g} - \underline{g}],$$

also nach (12)

$$j(\mathfrak{A} \cap [\underline{g}, \infty], \mathfrak{B}) > \bar{g} - \underline{g} \geq j(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$$

im Widerspruch zu der Voraussetzung, daß es keinen größeren j-Wert gibt; somit ist die Annahme (10) falsch.

§ 4. Verallgemeinerung der Erdösformel auf k-gliedrige Ketten.

Es ist nun auch leicht ersichtlich, wie der angegebene Beweis auf k-gliedrige Ketten übertragen werden kann. An Stelle von (9) braucht nämlich nur

$$B(n) \geq k\,G(n) \tag{9'}$$

bewiesen zu werden, woraus dann genau wie eben sofort

$$\gamma^* \geq \lim_{n=1,2,\ldots} \frac{A(n) + \frac{k-1}{k} B(n)}{n} \geq \alpha^* + \frac{k-1}{k} \beta^*$$

folgt. Statt (10) ist hierbei

$$kG(m) > B(m) \tag{10'}$$

zum Widerspruch zu führen. Aus (10′) folgt nämlich analog wie oben, daß jetzt mindestens ein GML-Intervall $[\underline{g}, \bar{g}] \subseteq [1, m]$ existieren muß, so daß

$$B(\underline{g}-1, g) \leq k-1, \; g \neq 0,$$

ist; $g \neq 0$ wegen $kG(k-1) = 0 < B(k-1) = k-1$[13]. Ferner bleibt (12) wörtlich erhalten. (11) ist jetzt durch die Überlegung zu ersetzen, daß für $[\underline{g}, \bar{g}]$, das als GML-

[13]) Befindet sich die k-gliedrige Kette nicht schon am Anfang von $\mathfrak{B}$, so betrachte man die Summe $\mathfrak{B} \cap [k', \infty] + \mathfrak{A}$, wenn die Kette etwa bei k' beginnt, und verfahre bezüglich $\mathfrak{B}$ wie oben bei der Bildung der Menge $\mathfrak{A}_1$ zu Beginn dieses Abschnitts.

Intervall ja erst recht ein Hauptunterintervall ist, dieser Eigenschaft zufolge

$$A(\underline{g}-1, \underline{g}+n) + B(\underline{g}-1, \underline{g}+n) - (n+1) \begin{cases} > 0 \text{ für } n \in [0, \bar{g}-\underline{g}-1] \\ = 0 \text{ für } n = \bar{g}-\underline{g} \end{cases}$$

gilt. Wegen

$$B(-1, n) \begin{cases} \geq B(\underline{g}-1, \underline{g}+n) \text{ für } n \in [0, \bar{g}-\underline{g}-1] \\ > B(\underline{g}-1, \underline{g}+n) \text{ für } n = \bar{g}-\underline{g} \end{cases}$$

— in $[\underline{g}, \bar{g}] \cap \mathfrak{B}$ sind nämlich nur höchstens $k-1$ Elemente, in $[0, \bar{g}-\underline{g}] \cap \mathfrak{B}$ jedoch mindestens k und von diesen nach Voraussetzung sogar auch k aufeinanderfolgende, gleich am Anfang gelegene Elemente enthalten — ergibt sich

$$J(\mathfrak{A} \cap [\underline{g}, \infty], \mathfrak{B}; n) = A(\underline{g}-1, \underline{g}+n) + B(-1, n) - n - 2$$

$$\left.\begin{matrix} \geq \\ > \end{matrix}\right\} A(\underline{g}-1, \underline{g}+n) + B(\underline{g}-1, \underline{g}+n) - n - 2 \begin{cases} \geq 0 \text{ für } n \in [0, \bar{g}-\underline{g}-1] \\ = -1 \text{ für } n = \bar{g}-\underline{g}; \end{cases}$$

also ist in jedem Fall $J(\mathfrak{A} \cap [\underline{g}, \infty], \mathfrak{B}; n) \geq 0$ für alle $n \in [0, \bar{g}-\underline{g}]$, daher nach (12)

$$j(\mathfrak{A} \cap [\underline{g}, \infty], \mathfrak{B}) > \bar{g}-\underline{g} \geq j(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$$

wiederum im Widerspruch zur Voraussetzung, daß sich keine größeren j-Werte finden lassen sollten.

Zusammenfassend ergibt sich also die folgende Verallgemeinerung des Erdösschen Satzes:

Satz. *Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Mengen nichtnegativer ganzer Zahlen, und enthält $\mathfrak{B}$ eine mindestens k-gliedrige Kette, so gilt*

$$\delta^*(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) \geq \varliminf_{n=1,2,\ldots} \frac{A(n) + \frac{k-1}{k} B(n)}{n} \geq \delta^*(\mathfrak{A}) + \frac{k-1}{k} \delta^*(\mathfrak{B}).$$

Eingegangen 16. Januar 1948.

Über die Nullstellen der Weierstraßschen $\wp$-Funktion.

Von *Walter Brödel* in Jena.

Über die Lage der Nullstellen von $\wp(u|\omega, \omega')$ sind folgende Tatsachen bekannt:

1. Im Fundamentalparallelogramm ($u = \vartheta \cdot 2\omega + \vartheta' \cdot 2\omega'$ mit $0 \leq \vartheta < 1, 0 \leq \vartheta' < 1$) liegen genau zwei Nullstellen. Diese sind im allgemeinen verschieden und fallen dann und nur dann zusammen, wenn das Fundamentalparallelogramm ein Quadrat ist oder wenn jedenfalls das Periodengitter durch ein Quadrat erzeugt werden kann (lemniskatischer Fall). Die alsdann doppelt zu zählende Nullstelle liegt im Mittelpunkte des Fundamentalquadrats. Im allgemeinen Falle sind den beiden Nullstellen zwei Wertepaare (ϑ, ϑ') und $(1-\vartheta, 1-\vartheta')$ zugeordnet, wobei auftretende Einsen durch Nullen zu ersetzen sind.

2. Ist das Fundamentalparallelogramm ein Rechteck, wobei man unbeschadet $\omega > 0$ und $i\,\omega' < 0$ annehmen darf, so liegen die Nullstellen auf einer Mittelparallelen $\left(\vartheta = \frac{1}{2} \text{ oder } \vartheta' = \frac{1}{2}\right)$. Es folgt dies ohne weiteres daraus, daß in diesem Falle sämtliche Geraden $\Re u = k \cdot \omega$ und sämtliche Geraden $\Im u = k' \cdot \omega'$ (k, k' ganz) Realitätszüge für $\wp u$ sind, während außerhalb dieser Geraden $\wp u$ keine reellen Werte annehmen kann.

3. Ist das Fundamentalparallelogramm ein Rhombus, so liegen die Nullstellen auf einer der Diagonalen ($\vartheta = \vartheta'$ bzw. $\vartheta + \vartheta' = 1$). Jetzt stellen nämlich die Diagonalen zusammen mit den durch Periodenverschiebung aus ihnen hervorgehenden Geraden das volle System der Realitätszüge von $\wp u$ dar, sofern man ω und ω' als konjugiert komplex annimmt.

4. Im sogenannten äquianharmonischen Falle $\left(\omega' = \omega \cdot e^{\frac{\pi i}{3}}\right)$ sind die Nullstellen durch $\vartheta = \vartheta' = \frac{1}{3}$ bzw. $\frac{2}{3}$ gegeben.

Eine von Herrn Hasse ausgesprochene Vermutung besagt, daß jedes Wertsystem ϑ, ϑ' mit $0 \leq \vartheta < 1$ und $0 \leq \vartheta' < 1$ unter Ausschluß von $\vartheta = \vartheta' = 0$ bei geeigneter Wahl des Periodenverhältnisses eine Nullstelle der $\wp$-Funktion in der Form

$$u = \vartheta \cdot 2\omega + \vartheta' \cdot 2\omega'$$

liefern kann. Diese Vermutung soll im folgenden bewiesen werden.

Ich setze $2\omega = 1$ und $2\omega' = \tau = s + i\,t$ mit $t = \Im\tau > 0$. Die unendlich vielen zu den Grundperioden 1 und τ gehörigen Nullstellen seien mit $v_1, v_2, \ldots$ bezeichnet. Die zu variablem τ gehörigen Wertsysteme v_n schließen sich zunächst im kleinen zu analytischen Funktionen zusammen, deren Regularität genau an denjenigen τ-Stellen unterbrochen wird, die dem lemniskatischen Falle entsprechen $\left(\tau = \tau_0 = \frac{\alpha i + \beta}{\gamma i + \delta}, \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ ganz}, \alpha\delta - \beta\gamma = 1\right)$. Um v_n zu berechnen, hat man nämlich zuerst

$$e_1 = \wp\left(\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{2}, \frac{\tau}{2}\right), \quad e_2 = \wp\left(\frac{1+\tau}{2}\middle|\frac{1}{2}, \frac{\tau}{2}\right) \quad \text{und} \quad e_3 = \wp\left(\frac{\tau}{2}\middle|\frac{1}{2}, \frac{\tau}{2}\right)$$

zu bestimmen und dann

$$v_n = \int_0^\infty \frac{ds}{2\sqrt{S}} \quad \text{mit} \quad \sqrt{S} = \sqrt{(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)}$$

zu setzen. Verschiedene Wahl des Integrationsweges auf der zweiblättrigen, bei e_1, e_2, e_3 und ∞ verzweigten Riemannschen Fläche führt zu den verschiedenen Werten v_n. Die analytischen Ausdrücke lassen sofort erkennen, daß $v_n(\tau)$ regulär ist, sofern keiner der Werte e_i gleich null wird, so daß man den Integrationsweg von diesen Stellen fernhalten kann. Um das Verhalten von $v_n(\tau)$ in der Nähe einer kritischen Stelle τ_0 festzustellen, wo v_n übrigens natürlich beschränkt bleibt, beachte man, daß die Funktion $k^2(\tau) = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$, deren Abbildungseigenschaften man genau kennt, jedenfalls die Umgebung von τ_0 schlicht abbildet. Beschreibt τ einen kleinen Kreis um τ_0, so vollführt eines der e_i, etwa e_j, einen genau einmaligen Umlauf um 0, während die beiden anderen in der Nähe gewisser endlicher, von 0 verschiedener Werte variieren. Bei der Berechnung von v_n ist der Integrationsweg so zu deformieren, daß er nie durch e_j geht, so daß die analytische Fortsetzung von v_n längs des betrachteten Kreises der τ-Ebene erst bei zweimaliger Durchlaufung zum Ausgangswerte zurückführt. In jedem Punkte τ_0 hängen also zwei Zweige v_n analytisch zusammen, und eine weitere Betrachtung — die ich als für den gegenwärtigen Zweck unerheblich hier nicht ausführe — zeigt, daß sämtliche v_n Zweige einer einzigen analytischen Funktion $v(\tau)$ sind. Wenn ich im folgenden $v = v(\tau)$ schreibe, so wird die Tatsache, daß darin sämtliche Wertbestimmungen von v enthalten sind, keine Rolle spielen.

Die Größen ϑ und ϑ' ergeben sich, wenn man $\Re v = x$, $\Im v = y$ setzt, aus $\vartheta + \vartheta' s = x$, $\vartheta' t = y$ und sind in der oberen Halbebene ($t > 0$) reguläre reelle Funktionen von s und t für alle Wertepaare s, t mit $s + i\,t \neq \frac{\alpha i + \beta}{\gamma i + \delta}$. An diesen Ausnahmestellen sind sie ebenso wie v nicht mehr differenzierbar und lokal verzweigt, aber stetig. Differenziert man die obigen Gleichungen nach s und t, so erhält man

$$\vartheta_s + \vartheta'_s s + \vartheta' = x_s, \quad \vartheta_t + \vartheta'_t s = x_t, \quad \vartheta'_s t = y_s, \quad \vartheta'_t t + \vartheta' = y_t,$$

und für die Funktionaldeterminante ergibt sich unter Beachtung von $x_s = y_t$, $x_t = -y_s$ leicht:

$$\vartheta_s \vartheta'_t - \vartheta_t \vartheta'_s = t(\vartheta'^2_s + \vartheta'^2_t).$$

Sie ist also nie negativ. Ihr Verschwinden ist — um dies zur Verdeutlichung der Sachlage etwas näher zu untersuchen, obwohl es zum Beweise unseres Satzes nicht erforderlich ist — gleichbedeutend mit $\vartheta'_s = \vartheta'_t = 0$, woraus weiter $y_s = 0$ und $y_t = \vartheta' = \frac{y}{t}$ folgt. Die Gleichung $y_s = 0$ ist sicher nicht identisch erfüllt, da sonst v eine lineare Funktion von τ sein müßte. Sie gilt also nur längs gewisser regulärer Kurvenzüge, die sich an keinem inneren Punkte der zu $v(\tau)$ gehörigen Riemannschen Fläche, d. h. auch an keinem Windungspunkte, häufen können. Längs eines solchen regulären Kurvenbogens kann weiterhin nicht identisch $t\,y_t - y = 0$ sein. In diesem Falle würden nämlich ϑ'_s und ϑ'_t längs der Kurve verschwinden, ϑ' würde längs der Kurve konstant sein, und damit hätte y_t einen festen Wert; aus der gleichzeitigen Konstanz von y_t und y_s längs eines Kurvenbogens folgt aber, daß diese beiden konjugierten Potentialfunktionen überhaupt konstant sind, womit wir zu einem Widerspruche gelangt sind. Die Funktionaldeterminante verschwindet demnach nur in isolierten, sich im Innern der Riemannschen Fläche von v nirgends häufenden Punkten.

Ich betrachte jetzt die Abbildung der τ-Ebene auf eine Ebene mit den kartesischen Koordinaten ϑ, ϑ'. Längs der Halbgeraden $s = 0$, $t \geqq 1$ ist, in einem passend gewählten

Zweige von v, $x = \frac{1}{2}$, während $y > 0$ ist und für $t \to \infty$ einem endlichen Grenzwerte zustrebt. Die $\wp$-Funktion geht ja für $t \to \infty$ in

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi u} - \frac{\pi^2}{3}$$

über, und diese letzte Funktion verschwindet für $\sin^2 \pi u = 3$, was mit $u = \frac{1}{2} + i y$ für y die Gleichung $\mathfrak{Cof}\, 2\pi y = 5$ mit einer zwischen 0 und 1 gelegenen Wurzel ergibt. In der ϑ, ϑ'-Ebene erscheint also als Bild der betrachteten Halbgeraden die Strecke $\vartheta = \frac{1}{2}$, $0 \leq \vartheta' \leq \frac{1}{2}$, wobei $t = \infty$ in $\vartheta' = 0$, $t = 1$ in $\vartheta' = \frac{1}{2}$ übergeht. Es wird sich weiterhin zeigen, daß einer einfachen Durchlaufung der Originalhalbgeraden eine einfache Durchlaufung der Bildstrecke entspricht. Die Fortsetzung von $v(\tau)$ in die rechte Halbebene ergibt als Bild des Kreisbogens $|\tau| = 1$, $0 \leq s \leq \frac{1}{2}$, $t > 0$ eine Folge von Punkten, die jeweils auf einer Diagonale des Rhombus mit den Ecken 0, 1, τ, $\tau + 1$ liegen. Dabei muß es sich, wie die Betrachtung des Endstadiums zeigt, um die von 0 ausgehende Diagonale handeln, und zwar kommt genauer die dem Nullpunkte zugekehrte Hälfte in Betracht. Um diese weitere Aussage zu gewinnen, hat man die lokale Richtungsübertragung im Punkte $\tau = i$ zu betrachten; bei unserer Art der Zweigfixierung muß das Bild des Kreisbogens als Anfangsrichtung die der Winkelhalbierenden des dritten Quadranten haben. Der Bildpunkt in der ϑ, ϑ'-Ebene wandert auf der Geraden $\vartheta = \vartheta'$ von $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ nach $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$, wobei auch diese Wanderung sich als monoton herausstellen wird. Schließlich wird die Halbgerade $s = \frac{1}{2}$, $t \geq \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ebenso auf die Strecke zwischen $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2}$, 0 in der ϑ, ϑ'-Ebene abgebildet, denn v liegt jetzt auf der durch τ gehenden Diagonalen des Rhombus $(0, 1, \tau, \bar{\tau})$ und ist also mit reellem, nicht negativem λ in der Form

$$\frac{1}{2} + \lambda\left(\tau - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - \lambda) + \lambda\tau$$

darstellbar, so daß $\vartheta = \frac{1}{2}(1 - \lambda)$ und $\vartheta' = \lambda$ wird.

Ähnlich wie beim funktionentheoretischen Satze von der Charakteristik des Randes kann man wegen der Positivität der Funktionaldeterminante nunmehr schließen, daß das Innere des τ-Gebietes, dessen Rand wir eben betrachtet haben $\left(|\tau| \geq 1,\ 0 \leq s \leq \frac{1}{2}\right)$, auf das schlichte Innere des Dreiecks der ϑ, ϑ'-Ebene abgebildet wird, dessen Seiten wir als Bildstrecken gefunden haben. In der Tat bedeckt das sicher beschränkte Bildgebiet die ϑ, ϑ'-Ebene mit einer nirgends negativen Bedeckungszahl, die sich nur längs der Geraden $\vartheta = \frac{1}{2}$, $\vartheta = \vartheta'$ und $2\vartheta + \vartheta' = 1$ ändern kann und somit im Äußern des Dreiecks verschwindet, während sie im Innern gleich der gesamten Umlaufcharakteristik, d. h. gleich 1 ist. Hieraus folgen dann weiter auch die früher aufgestellten Behauptungen über die einfache Durchlaufung der Randstrecken.

In ähnlicher Weise ergeben sich die Bilder für die fünf weiteren Kreisbogendreiecke, die insgesamt das Kreisbogendreieck $0 \leq s \leq 1$, $\left|\tau - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{2}$ bedecken und durch Einzeichnen der Geraden $s = \frac{1}{2}$ sowie der Kreisbögen $|\tau| = 1$ und $|\tau - 1| = 1$ entstehen. Je zwei Teildreiecke werden auf dasselbe Dreieck der ϑ, ϑ'-Ebene abgebildet; die drei Bilddreiecke haben die Eckpunkte $\left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ bzw. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ bzw. $\left(0, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Sie sind je in zwei Exemplaren zu denken und schließen sich zu

einem Riemannschen Flächenstück zusammen, das bei $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ einen einfachen Windungspunkt zeigt. Dieses Flächenstück ist das Bild des nullwinkligen Dreiecks der oberen τ-Halbebene mit den Eckpunkten 0, 1, ∞.

Setzt man die Funktion $v(\tau)$ über die Geraden $s = 0$ und $s = 1$ in die Nachbarstreifen fort und wiederholt das Verfahren, indem man die Geraden $s = k$ immer oberhalb von $t = 1$ überschreitet, so genügt der damit gewonnene Zweig von $v(\tau)$, wie man aus dem Verhalten für $t \to \infty$ unmittelbar erkennt, der Funktionalgleichung $v(\tau + 1) = v(\tau)$. Die Größen ϑ und ϑ' erfahren gemäß $\vartheta + \vartheta' \tau = \vartheta - \vartheta' + \vartheta'(\tau + 1)$ Substitutionen der Gestalt $\vartheta_k = \vartheta - k\,\vartheta'$, $\vartheta'_k = \vartheta'$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. An das bisher gewonnene, über dem Dreieck $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ liegende zweiblättrige Riemannsche Flächenstück schließen sich entsprechend unendlich viele weitere an, die über den Dreiecken $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{1-k}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{k}{2}, \frac{1}{2}\right)$ liegen. Es bietet offenbar keine Schwierigkeit, den Gesamtverlauf von $v(\tau)$ und somit von ϑ und ϑ' zu untersuchen. Ich begnüge mich mit der aus dem Bisherigen zu gewinnenden Feststellung, daß der gesamte Streifen $0 < \vartheta' \leq \frac{1}{2}$ bedeckt wird und daß man selbstverständlich, indem man etwa um $\tau = i$ herum fortsetzt, auch den Streifen $\frac{1}{2} \leq \vartheta' < 1$ erfaßt.

Zum Beweise der Hasseschen Vermutung bedarf es nur noch einer Bemerkung über die Gerade $\vartheta' = 0$. Man sieht sofort, daß die Gesamtheit der Wertepaare (ϑ, ϑ'), die zu Nullstellen von $\wp u$ Anlaß geben können, mit (a, b) zugleich auch immer das Paar $(b, 1-a)$ enthält. Sei nämlich $u_0 = a \cdot 2\omega + b \cdot 2\omega'$ Nullstelle von $\wp(u|\omega, \omega')$, so ist $u_0 - 2\omega = b \cdot 2\omega' + (1-a)(-2\omega)$ Nullstelle derselben Funktion, für die jetzt ω' und $-\omega$ als erzeugende Halbperioden gedacht werden. Hatten wir soeben erkannt, daß zu jedem ϑ' mit $0 < \vartheta' < 1$ die Größe ϑ völlig frei vorgebbar ist, so erkennen wir jetzt, daß auch alle Paare $(\vartheta, 0)$ mit $0 < \vartheta < 1$ vorkommen.

Bemerkenswert scheint mir zu sein, daß für ein spitzwinkliges bzw. rechtwinkliges Fundamentaldreieck $(0, 2\omega, 2\omega')$ der Punkt ϑ, ϑ' immer einem der beiden durch $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ und $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ bestimmten Dreiecke angehört. Es hängt dies übrigens mit einer Eigenschaft der Abbildung durch $\wp u = s$ zusammen, die ich zum Schluß angeben möchte, da sie, obwohl mindestens implicite in der Literatur[1]) vorhanden, doch nicht allgemein bekannt sein dürfte.

Man bestimme für ein spitzwinkliges Fundamentaldreieck die Werte e_1, e_2, e_3 und zeichne in der s-Ebene die drei durch je zwei der e_i gehenden Geraden sowie den Kreis durch die drei Punkte e_i, so daß die Ebene in zehn Gebiete zerlegt erscheint. Dann enthalten die drei geradlinig begrenzten Zweiecke die Bilder der Seiten des Fundamentaldreiecks, während die Bilder der Strecken $(\omega\,\omega'')$, $(\omega''\,\omega')$ und $(\omega'\,\omega)$ in den drei Kreissegmenten verlaufen.

---

[1]) H. A. Schwarz, Conforme Abbildung der Oberfläche eines Tetraeders auf die Oberfläche einer Kugel. Ges. Abh. II, 84—101; P. Koebe, Iterationstheorie der niederen Uniformisierungsgrößen. Ber. d. sächs. Akad. d. Wiss., math.-phys. Klasse 89 (1937), 173—204. Eine in der zweiten Arbeit befindliche Figur (S. 196) stellt genau den hier geschilderten Sachverhalt dar.

Eingegangen 21. Juli 1948.

Über die Strahlenbrechung an einer einfachen Sammellinse*). I.

Von *Paul Armsen* in Erlangen.

Einleitung.

Thema, Aufbau und einen erheblichen Teil der Ausführungen der vorliegenden Arbeit verdanke ich Anregungen und Hinweisen meines verehrten Lehrers Geheimrat C. Carathéodory, dessen Arbeit über das parabolische Spiegelteleskop[1]) das folgende Zitat entnommen sei:

„Eine allgemeine Anwendbarkeit unserer Methode kann man aus der erfolgreichen Behandlung des Schmidtschen Teleskops noch nicht erwarten, und der Wunsch, andere einfache Instrumente mit ähnlichen Mitteln zu berechnen, scheint mir berechtigt zu sein".

Die erwähnte Methode besteht im wesentlichen darin, daß die übliche Art, die Bildfehler allgemein aus dem Eikonalbegriff herzuleiten, sich bei der Anwendung der Theorie auf die Fehler dritter Ordnung zu beschränken und die praktisch nötige Verbesserung der Genauigkeit durch numerische Durchrechnung einzelner Strahlen am konkreten Instrument zu erreichen, ersetzt wird durch eine spezielle Behandlung einer bestimmten Art von Instrumenten, indem die Gesamtheit der Bildfehler durch Reihenentwicklungen als Funktion des Durchgangspunktes des Lichtstrahles durch die Blende berechnet wird, wodurch sich die Zerstreuungsfigur der Blende in der Objektebene unmittelbar durch die Anfangsglieder einer Reihe dargestellt ergibt. Im einzelnen richtet sich das Verfahren nach den besonderen Eigenschaften des behandelten Instrumentes.

Nachdem von Carathéodory das Spiegelteleskop von Schmidt und das parabolische Spiegelteleskop nach dieser Methode erledigt sind, ist es naheliegend, als nächstes Instrument eine einfache Sammellinse mäßiger Dicke zu behandeln.

Wie in der Strahlenoptik üblich, wird hier von den physikalischen Eigenschaften des Lichtstrahles abgesehen.

Zur weiteren Vereinfachung wird das Licht als monochromatisch vorausgesetzt und die einzige Blende unmittelbar an der ersten Linsenfläche angebracht.

Der Zweck der Arbeit ist die Herleitung einer geschlossenen Formel, die die Blendenabbildung in der Objektebene für den Fall einer einzelnen Sammellinse ohne Zusatz-

*) Von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität München genehmigte Dissertation (1943). Berichterstatter: Prof. Dr. *C. Carathéodory*.

[1]) L. V. (Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit) 4.

blende mit größerer Genauigkeit darstellt, als sie durch die Theorie der Fehler dritter Ordnung erreicht wird.

Daß sich dabei auch die allgemeinen Seidelformeln durch Anwendung eines Satzes aus der Eikonaltheorie ergeben, war nicht beabsichtigt und ist deswegen ebenso wie die anderen auf allgemeinere Fälle bezogenen Abschnitte dieser Arbeit nicht in allen Einzelheiten ausgeführt.

Problemstellung.

Gegeben sei eine einfache, mäßig dicke Sammellinse mit beliebigen Rotationsflächen als brechenden Flächen und ein in der Nähe der optischen Achse, außerhalb der Linsenbrennweite gelegener Objektpunkt.

In erster Annäherung entwirft die Linse ein Bild des Objektpunktes in der Gaußschen Bildebene.

Genau genommen schneidet ein Lichtstrahl, der vom Objektpunkt ausgehend die Linse durchsetzt, die Gaußebene in der Nähe des durch die Gaußsche Dioptrik bestimmten Bildpunktes aber nicht genau in diesem.

Die Abweichung des Schnittpunktes zwischen Lichtstrahl und Gaußebene vom Bildpunkt ist bei festem Objektpunkt und gegebener Linse eine Funktion des Punktes, in dem der Lichtstrahl die erste Linsenfläche trifft.

Es soll für diese Funktion eine Näherungsformel abgeleitet werden, die

1. zunächst einen möglichst einfachen Überblick über Größe und Richtung der Abweichung vermittelt,

2. gestattet, die durch 1. gegebenen Näherungswerte durch Anbringen einer Korrektur so weit zu verbessern, daß die verbesserten Werte den Genauigkeitsanforderungen der praktischen Optik genügen.

Durch die Theorie der Bildfehler dritter Ordnung von Seidel ist 1. ganz allgemein für beliebige Rotationssysteme gelöst.

An Stelle von 2. muß in jedem Einzelfall die gesonderte trigonometrische Durchrechnung vieler Einzelstrahlen treten. Diese erfordert einen sehr großen Aufwand an numerischer Rechnung.

Die vorliegende Arbeit ist ein Versuch, diese Rechenarbeit für den einfachen Fall einer Einzellinse durch die Auswertung einer, wenn auch umständlichen, geschlossenen Formel zu ersetzen.

Es wird zunächst (Teil I) an Stelle der Linse eine einzelne brechende Fläche gesetzt und für einen reellen oder virtuellen Objektpunkt der Schnittpunkt des Lichtstrahles mit der Gaußebene als Funktion des Durchgangspunktes durch die brechende Fläche bestimmt, und zwar in der Weise, daß die allgemeine Formel in drei Stufen

1. den Gaußschen Bildpunkt selbst,

2. die Bildfehler dritter Ordnung als erste Korrektur (Seidelstufe),

3. die Bildfehler fünfter Ordnung als zweite Korrektur (Herzbergerstufe) angibt.

Die weiter unten angegebenen Beispiele zeigen beim Vergleich mit der trigonometrischen Durchrechnung einiger Strahlen, daß die so erhaltene Näherungsfunktion den Strahlengang mit einer weit über die praktisch erforderliche Genauigkeit hinausgehenden Schärfe darstellt.

Die so gewonnenen Formeln werden dann (Teil II) auf die zweite Linsenfläche erneut angewandt. Da aber jetzt das Objekt (das Bild der ersten Brechung) nicht mehr streng ein Punkt, sondern nur eine in der Nähe eines Punktes eingeschnürte Strahlenkongruenz [2])

[2]) Nach dem Satz von *Malus* eine Normalenkongruenz. Von dieser Eigenschaft wird aber hier kein Gebrauch gemacht.

ist, entstehen bei der zweiten Brechung zusätzliche Abweichungen vom Bildpunkt in der zweiten Gaußebene.

Die Abschätzung dieser Abweichungen nach Größe und Richtung und die Zusammenfassung aller erwähnten Abweichungen zu einer übersehbaren Endformel ist das eigentliche Problem der vorliegenden Arbeit.

Teil I.

Brechung an einer Fläche.

§ 1. Bezeichnungen.

Ein rechtshändiges, kartesisches Koordinatensystem (xyz) liege mit dem Ursprung im Scheitel der brechenden Fläche; die z-Achse falle mit der optischen Achse zusammen und werde positiv in Richtung des fortschreitenden Lichtes (von links nach rechts) gezählt. Die x-Achse werde positiv nach oben, also die y-Achse positiv nach vorne (in Richtung auf den Beschauer) gezählt.

Der Objektpunkt sei durch $(u, 0, s)$ gegeben und liege im Objektmittel mit dem Brechungsindex n.

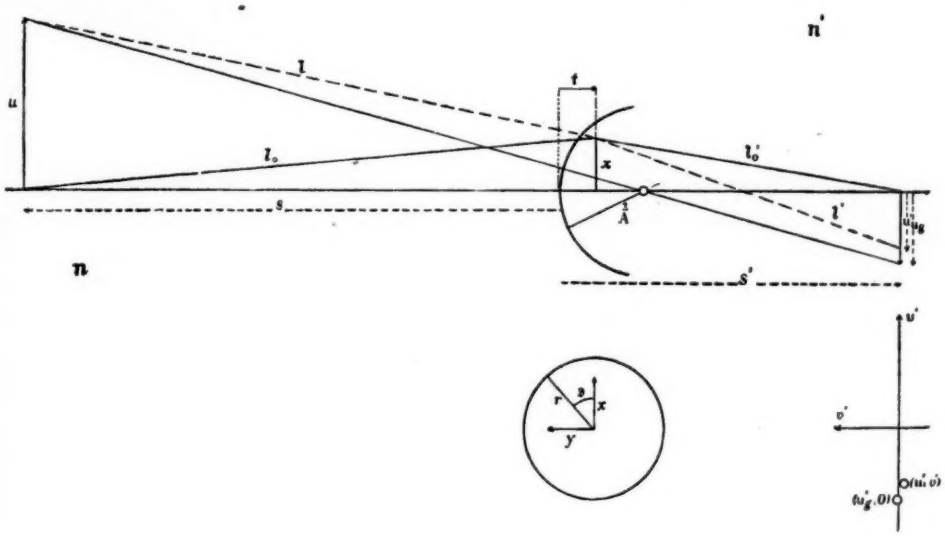


Fig. 1.

In Fig. 1 ist also $u > 0$, $s < 0$.

Sei

$$k = -\frac{u}{s}. \tag{1, 1}$$

Liegt der Objektpunkt am Rande des kreisförmig gedachten Gesichtsfeldes, so ist

$$k = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}, \tag{1, 2}$$

wenn unter γ das Gesichtsfeld nach der z. B. von Schwarzschild[3]) angegebenen Definition verstanden wird.

[3]) L. V. 19, I, p. 16.

Der Durchgangspunkt des Lichtstrahles durch die brechende Fläche werde mit (x, y, t) bezeichnet.

In der Ebene $z=t$ liege ein gewöhnliches, ebenes Polarkoordinatensystem, so daß derselbe Punkt durch (r, ϑ), $z=t$ gegeben ist, und es ist $x=r\cdot\cos\vartheta$, $y=r\cdot\sin\vartheta$.

Die brechende Fläche sei gegeben durch die Gleichung

$$t=\frac{A}{2}r^2+\frac{B^3}{8}r^4+\frac{C^5}{16}r^6. \tag{1, 3}$$

Die Gestalt der Gleichung folgt aus der Rotationssymmetrie der Fläche (wenn die Entwicklung nach r^2 bei r^6 abgebrochen wird). Die Koeffizientenbezeichnungen sind so gewählt, damit A, B und C alle die gleiche Dimension einer reziproken Länge haben und im gewöhnlichen Falle, wo die brechende Fläche eine Kugelkappe ist, $A=B=C$ wird.

A ist in jedem Falle der reziproke Wert des Krümmungsradius des Meridianschnittes (oder also seine Krümmung) im Flächenscheitel.

Die Ebene des Gaußschen Bildpunktes sei $z=s'$; der Schnittpunkt des Lichtstrahles mit dieser Ebene (u', v', s'); der Gaußsche Bildpunkt liegt in der Ebene $y=0$; er sei mit $(u'_g, 0, s')$ bezeichnet.

In Fig. 1 ist also $u'<0$, $s'>0$. Das Zeichen von v' hängt von ϑ ab (unter Umständen auch noch von r).

Das Bildmittel habe den Brechungsindex n'.

§ 2. Bestimmungsgleichungen für den Schnittpunkt des Lichtstrahles mit der Bildebene.

In den gewählten Bezeichnungen ist das Ziel der Durchrechnung der Brechung an einer Fläche die Bestimmung von u' und v' als Funktionen von r, ϑ und k. (Von k, insofern der Objektpunkt als innerhalb der Ebene $z=s$ veränderlich angesehen wird.)

Nach dem Prinzip von Fermat ist der Weg des Lichtstrahles aus (u, v, s) nach (u', v', s') bestimmt durch die Forderung $\delta E=0$, wenn mit E der Lichtweg bezeichnet ist.

Sei l die absolute Länge des Lichtweges im Objektmittel, l' die im Bildmittel und

$$\varepsilon=\pm 1 \text{ für } \left\{\begin{matrix}\text{reelles}\\ \text{virtuelles}\end{matrix}\right\} \text{ Objekt;} \quad \varepsilon'=\pm 1 \text{ für } \left\{\begin{matrix}\text{reelles}\\ \text{virtuelles}\end{matrix}\right\} \text{ Bild.}$$

Dann ist

$$E=\varepsilon n l+\varepsilon' n' l' \quad \text{und} \quad l^2=(t-s)^2+(x-u)^2+y^2 \tag{2, 1}$$
$$l'^2=(t-s')^2+(x-u')^2+(y-v')^2.$$

Seien l_0 und l'_0 die Werte von l und l' für $u=0$ bzw. $u'=0$, $v'=0$. Zur Abkürzung werde gesetzt

$$P=\frac{n}{s}\frac{dl_0^2}{dr^2}=\frac{n}{s}\left[2(t-s)\frac{dt}{dr^2}+1\right], \tag{2, 2}$$
$$P'=\frac{n'}{s'}\frac{dl_0'^2}{dr^2}=\frac{n'}{s'}\left[2(t-s')\frac{dt}{dr^2}+1\right].$$

P und P' haben dann, wie A, B und C die Dimension einer reziproken Länge. Aus

$$\frac{\partial E}{\partial x}=0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial E}{\partial y}=0$$

folgt[4]):

$$(2,3)\qquad \begin{aligned} &\frac{\varepsilon}{l}(Psx-nu)+\frac{\varepsilon'}{l'}(P's'x-n'u')=0,\\ &\frac{\varepsilon}{l}(Psy-0)\quad+\frac{\varepsilon'}{l'}(P's'y-n'v')=0. \end{aligned}$$

Da die aus den vier Klammern gebildete Determinante verschwinden muß, ergibt sich für u' die Gleichung

$$(2,4)\qquad y(Psn'u'-P's'nu)=v'n'(Psx-nu).$$

Quadriert man die zweite der Gleichungen (2, 3), um die in l und l' enthaltenen Wurzeln zu beseitigen, ersetzt l'^2 nach (2, 1) und eliminiert u' mit Hilfe von (2, 4), so ergibt sich für v' die quadratische Gleichung

$$(2,5)\qquad av'^2-2byv'+cy^2=0$$

mit den Koeffizienten

$$(2,6)\qquad \begin{aligned} a&=(Psx-nu)^2 &&+P^2s^2y^2-n'^2l^2,\\ b&=(Psx-nu)\left(Psx-P's'\frac{n}{n'}u\right) &&+P^2s^2y^2-P's'n'l^2,\\ c&= \left(Psx-P's'\frac{n}{n'}u\right)^2 &&+P^2s^2y^2-P'^2s'^2l^2+P^2s^2(t-s')^2. \end{aligned}$$

Aus der Gleichung (2, 5) soll v' bestimmt werden und später Gleichung (2, 4) zur Bestimmung von u' dienen.

v' ist jedenfalls klein, denn innerhalb der Gaußschen Dioptrik ist $v'_g=0$.

a, b, c sind Funktionen von u, r und ϑ, und zwar in u und r einfach Polynome. (In u sogar nur quadratisch.)

Entwickelt man v' nach Potenzen der Größe $\frac{ac}{b^2}$ und a, b, c nach Potenzen von u und r, so ergibt sich ein Näherungswert für v' oder, was dasselbe ist, für die tangentiale Abweichung vom Gaußschen Bildpunkt.

Aus der Gleichung (2, 4) kann dann u' und daraus die radiale Abweichung $u'-u'_g$ bestimmt werden.

§ 3. Entwicklung der Koeffizienten a, b, c nach Potenzen von u und r.

Sei

$$(3,1)\qquad \begin{aligned} a&=a_iu^i=a_{ij}u^ir^j\\ b&=b_iu^i=b_{ij}u^ir^j\\ c&=c_iu^i=c_{ij}u^ir^j \end{aligned}\qquad \begin{aligned} &(\text{über } i \text{ und } j \text{ summiert});\\ &i=0,1,2;\quad j=0,1,2,3,\ldots. \end{aligned}$$

Die a, b, c mit einem Index sind Funktionen von r und ϑ. Die a, b, c mit zwei Indizes sind Funktionen von ϑ allein.

Die Bestimmung der a, b, c ist jeweils nur so weit ausgeführt, wie sie später bei der Entwicklung von v' gebraucht wird.

---

[4]) $l^2=l_0^2-2ux+u^2$, $2\frac{\partial l}{\partial x}l=\frac{\partial l_0^2}{\partial x}-2u=\frac{s}{n}P\cdot 2x-2u$, also $\frac{\partial l}{\partial x}=\frac{1}{nl}(Psx-nu)$, und analog die anderen Glieder.

Die a, b, c mit einem Index sind nach (2, 6):

$$(3,\ 2)\qquad \begin{aligned} a_0 &= P^2 s^2 r^2 - n'^2 l_0^2, & b_0 &= P^2 s^2 r^2 - P' s' n' l_0^2, \\ b_1 &= -x\left[P s n\left(1+\frac{P' s'}{n'}\right) - 2 P' s' n'\right], \\ b_2 &= -\frac{1}{n'} P' s' (n'^2 - n^2), & c_0 &= P^2 s^2 l_0'^2 - P'^2 s'^2 l_0^2, \\ c_1 &= -2 s' x\left(\frac{P P' s n}{n'} - P'^2 s'\right), & c_2 &= -P'^2 s'^2\left(1-\frac{n^2}{n'^2}\right). \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der a, b, c mit zwei Indizes sind noch die Größen $P, P', l_0^2, l_0'^2, PP', \ldots$, die in den Formeln (3, 2) auftreten, nach r zu entwickeln.

Sei

$$(3,\ 3)\qquad P = L + \frac{M^3}{2} r^2 + \frac{3 N^5}{8} r^4 + \cdots, \qquad P' = L' + \frac{M'^3}{2} r^2 + \frac{3 N'^5}{8} r^4 + \cdots.$$

Die Koeffizienten sind wieder so bezeichnet, daß $L, M, \ldots$ die Dimension einer reziproken Länge haben; die zusätzlichen Zahlenkoeffizienten vereinfachen einige der weiteren Formeln etwas.

Es ist

$$(3,\ 4)\qquad l_0^2 = s^2 - 2 s t + t^2 + r^2 = s^2 + (1 - s A) r^2 + \frac{1}{4}(A^2 - s B^3) r^4 + \frac{1}{8}(A B^3 - s C^5) r^6 + \cdots,$$

also wegen (2, 2)

$$(3,\ 5)\qquad \frac{s}{n} P = 1 - s A + \frac{1}{2}(A^2 - s B^3) r^2 + \frac{3}{8}(A B^3 - s C^5) r^4 + \cdots,$$

und zwei analoge Gleichungen gelten für $l_0'^2$ und $\frac{s'}{n'} P'$. Danach ist

$$(3,\ 6)\qquad L = n\left(\frac{1}{s} - A\right) \quad \text{und} \quad L' = n'\left(\frac{1}{s'} - A\right).$$

Da die Gaußsche Bildebene $z = s'$ durch

$$(3,\ 7)\qquad \frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = A(n' - n)\ ^{5)}$$

bestimmt ist, folgt

$$(3,\ 8)\qquad L = L'.$$

L wird häufig als Abbesche Invariante bezeichnet.

Weiter liest man aus (3, 3) und (3, 5) ab:

$$(3,\ 9)\qquad \begin{aligned} s M^3 &= n(A^2 - s B^3), & s N^5 &= n(A B^3 - s C^5), \\ s' M'^3 &= n'(A^2 - s' B^3), & s' N'^5 &= n'(A B^3 - s' C^5). \end{aligned}$$

Eliminiert man s, s' und L' mit Hilfe von (3, 6) und (3, 8), so ergibt sich

$$(3,\ 10)\qquad \begin{aligned} M^3 &= L A^2 + n(A^3 - B^3), & N^5 &= L A B^3 + n(A^2 B^3 - C^5), \\ M'^3 &= L A^2 + n'(A^3 - B^3), & N'^5 &= L A B^3 + n'(A^2 B^3 - C^5) \end{aligned}$$

und daraus

$$(3,\ 11)\qquad M^3 - M'^3 = (n - n')(A^3 - B^3), \qquad N^5 - N'^5 = (n - n')(A^2 B^3 - C^5).$$

An Stelle der Konstanten A, B, C ist es bequemer, die Größen L, M, M', N und N' zu benutzen, die gegebenenfalls mit Hilfe der Gleichungen (3, 6) und (3, 9) beseitigt werden können.

---

[5]) z. B. bei *Herzberger*, L. V. 10, p. 72, in den auch hier benutzten Bezeichnungen.

Da die $L, M, \ldots$ außer von den Konstanten A, B, C nur noch von n, n' und s abhängig sind, sind sie bei gegebener Fläche, gegebenen Mitteln und bestimmter Objektebene konstant.

Die Abweichungen der Seidelstufe können in den $L, M, \ldots$ kürzer geschrieben werden als in A, B und s.

Die Abweichungen der Herzbergerstufe bleiben, auch wenn man sie in den $L, M, \ldots$ schreibt, recht wenig übersichtlich. Direkt in A, B, C und s können sie schon aus Raumgründen kaum hingeschrieben werden.

Für die Entwicklung von a, b und c nach r aus den Formeln (3, 2) hat man nach den Gleichungen (3, 4), (3, 6), (3, 9) und (3, 3):

$$
\begin{aligned}
l_0^2 &= \frac{s}{n}\Big(ns + Lr^2 + \frac{1}{4}M^3 r^4 + \cdots\Big),\\
l_0'^2 &= \frac{s'}{n'}\Big(n's' + Lr^2 + \frac{1}{4}M'^3 r^4 + \cdots\Big),\\
P &= L + \frac{1}{2}M^3 r^2 + \frac{3}{8}N^5 r^4 + \cdots,\\
P' &= L + \frac{1}{2}M'^3 r^2 + \frac{3}{8}N'^5 r^4 + \cdots,\\
P^2 &= L^2 + LM^3 r^2 + \frac{1}{4}(M^6 + 3LN^5) r^4 + \cdots,\\
P'^2 &= L^2 + LM'^3 r^2 + \frac{1}{4}(M'^6 + 3LN'^5) r^4 + \cdots,\\
PP' &= L^2 + \frac{1}{2}L(M^3 + M'^3) r^2 + \cdots,\\
P^2 l_0'^2 &= \frac{s'}{n'}\Big[L^2 n's' + L(L^2 + n's'M^3) r^2\\
&\qquad + \frac{1}{4}(L^2 M'^3 + 4L^2 M^3 + n's' M^6 + 3n's' LN^5) r^4 + \cdots\Big],\\
P'^2 l_0^2 &= \frac{s}{n}\Big[L^2 ns + L(L^2 + nsM'^3) r^2\\
&\qquad + \frac{1}{4}(L^2 M^3 + 4L^2 M'^3 + nsM'^6 + 3nsLN'^5) r^4 + \cdots\Big],\\
P' l_0^2 &= \frac{s}{n}\Big[Lns + \frac{1}{2}(2L^2 + nsM'^3) r^2 + \cdots\Big].
\end{aligned}
\tag{3, 12}
$$

Da jetzt alle in den Formeln (3, 2) auftretenden Größen nach Potenzen von r geordnet sind, können die a, b, c mit zwei Indizes direkt hingeschrieben werden.

Zur Abkürzung werde noch eine Konstante (wieder mit der Dimension einer reziproken Länge) eingeführt durch

$$E = \frac{1}{n's'} - \frac{1}{ns}. \tag{3, 13}$$

Durch die unten [unter (9, 1)] eingeführte Bezeichnungsweise wird später für E auch die Bezeichnung E_{11} benutzt.

Die folgende Tabelle diene der leichteren Übersicht über die a, b, c mit zwei Indizes:

$$
\begin{array}{lllll}
a_{00} & \cancel{b_{00}} & \cancel{b_{01}} & b_{02} & \\
 & \cancel{b_{10}} & b_{11} & & \\
 & b_{20} & & & \\
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lllll}
\cancel{c_{00}} & \cancel{c_{01}} & \cancel{c_{02}} & \cancel{c_{03}} & c_{04}\\
\cancel{c_{10}} & c_{11} & \cancel{c_{12}} & c_{13} & \\
\cancel{c_{20}} & \cancel{c_{21}} & c_{22} & & \\
\end{array}
$$

Die gestrichenen Diagonalreihen enthalten nur Nullen, weil alle Entwicklungen (3, 12) nach Potenzen von r^2 fortschreiten, und aus den Formeln (3, 2) nur noch bei b_1 und c_1 ein Faktor r (denn $x = r\cos\vartheta$) hinzutritt.

Durch Einführen der Reihen (3, 12) in die Formeln (3, 2) hat man, wenn noch

(3, 13) berücksichtigt wird:

$$
(3,14)\quad
\begin{aligned}
&a_{00}=-n'^2 s^2,\\
&b_{00}=-n' s^2 s' L, && b_{02}=-\frac{1}{2} n' s^2 s' (M'^3-2L^2E),\\
&c_{00}=\ 0, && c_{02}=s^2 s'^2 L (M^3-M'^3+L^2E),\\
&c_{04}=\frac{1}{4} s^2 s'^2 \left\{3L\left[N^5-N'^5+L\left(\frac{M^3}{n's'}-\frac{M'^3}{ns}\right)\right]+(M^3+M'^3)(M^3-M'^3+L^2E)\right\},\\
&b_{11}=-nn' ss' L\left(2E-\frac{A}{n'}\right)\cos\vartheta,\\
&c_{11}=-2nss'^2 L^2 E\cos\vartheta, && c_{13}=-nss'^2 L\left(\frac{M^3}{n's'}-\frac{M'^3}{ns}+M'^3E\right)\cos\vartheta,\\
&b_{20}=-n'\left(1-\frac{n^2}{n'^2}\right)s' L,\\
&c_{20}=-\left(1-\frac{n^2}{n'^2}\right)s'^2 L^2, && c_{22}=-\left(1-\frac{n^2}{n'^2}\right)s'^2 L M'^3.
\end{aligned}
$$

Aus diesen Formeln folgt, daß es sinnvoll ist, v' nach Potenzen von $\frac{ac}{b^2}$ zu entwickeln (wie es am Schluß des § 2 in Aussicht genommen wurde), wenn L und damit auch b_{00} nicht verschwindet. Denn dann ist, wegen $c_{00}=0$, $|ac|$ viel kleiner als b^2 und deswegen eine schnelle Konvergenz der Reihe zu erwarten.

Im Falle $L=0$ versagt diese Überlegung. Die Endformeln behalten trotzdem auch für diesen Fall ihre Gültigkeit, denn man kann in diesem Falle durch Ausrechnen der Diskriminante b^2-ac und unmittelbare Entwicklung von v' nach u und r nachweisen, daß die Ergebnisse für v' und u' genau mit den Formeln übereinstimmen, die man erhält, wenn man in den Endformeln L durch 0 ersetzt.

Die Durchrechnung ist recht langwierig, weil es bei der Bestimmung von u' in diesem Falle nicht genügt, v' bis zu Gliedern fünfter Ordnung auszurechnen, um auch die Glieder fünfter Ordnung von u' bestimmen zu können.

Man braucht deswegen noch einige weitere Koeffizienten aus den Entwicklungen von a, b und c. Deren Berücksichtigung ist aber viel leichter durchführbar, als sie es im allgemeinen Falle wäre, weil aus $L=0$ die Gleichung $s'=s$ folgt, wodurch ein großer Teil der Formeln stark vereinfacht wird.

Durch die letzte Bemerkung dürfte auch die vielleicht unnatürlich erscheinende Auflösung einer quadratischen Gleichung durch die reichlich umständliche Entwicklung dieses und des folgenden Paragraphen hinlänglich begründet sein.

§ 4. Die tangentiale Abweichung.

Aus (2, 5) ergibt sich direkt durch Lösung der Gleichung und Entwicklung der in der Lösung auftretenden $\sqrt{1-\frac{ac}{b^2}}$, wenn $b^2>|ac|$,

$$
(4,1)\qquad v'=\frac{y}{2}\frac{c}{b}\left(1+\frac{ac}{4b^2}+\frac{a^2c^2}{8b^4}+\cdots\right).
$$

a, b und c wurden in § 3 nach Potenzen von u und r geordnet. In ihnen treten nur Glieder gerader Ordnung auf (wenn als Ordnung die Summe der Exponenten von u und r bezeichnet wird).

Ein Blick auf die Formeln (3, 14) zeigt, daß a, b und c in der dort gegebenen Form als zweiten Grades homogen in s und u aufgefaßt werden können, wenn man sich alle Zeichen s, die innerhalb der Klammern oder implizite in den Konstanten $L, M, \ldots, E$ auftreten, durch Ausdrücke in A und s' ersetzt denkt, was wegen (3, 7) möglich ist.

Nach Division von a, b und c durch s^2 sind dann a', b' und c' (wenn $a's^2=a$, $b's^2=b$, $c's^2=c$ gesetzt ist) nach Potenzen von k und r geordnet ($u=-ks$), und den Gliedern i-ter Ordnung in a, b und c entsprechen Glieder i-ter Ordnung in a', b' und c' (wenn hier die Summe der Exponenten von k und r als Ordnung bezeichnet wird).

v' wird offenbar nicht geändert, wenn a, b und c durch a', b' und c' ersetzt werden.

Setzt man voraus, daß alle Lichtstrahlen flach gegen die optische Achse verlaufen — was der Natur der Sache entspricht — so bedeutet das, daß

1. das Gesichtsfeld klein ist,
2. r klein ist verglichen mit den übrigen Größen gleicher Dimension, also mit

$$s, s', \frac{1}{A}, \frac{1}{L}, \frac{1}{M}, \ldots.$$

Aus 1. folgt, daß k klein ist [wegen (1, 2)]. Aus 2. folgt, daß alle Größen $\frac{r}{s}, \frac{r}{s'}$, Ar, Br, $Lr, \ldots$ klein sind.

Bezeichnet man alle eben aufgeführten Größen als erster Ordnung klein, so sind als „erster Ordnung klein" alle Größen gekennzeichnet, die in der Gaußschen Dioptrik zwar selbst noch berücksichtigt werden, deren höhere Potenzen aber dort als sehr klein vernachlässigt werden.

In a', b' und c' sind dann die Glieder i-ter Ordnung zugleich i-ter Ordnung klein, und dasselbe gilt auch für die Glieder i-ter Ordnung in v', wenn man noch den einzelnen Faktor r, der durch y in v' auftritt, der bequemeren Ausdrucksweise wegen auch als erster Ordnung klein bezeichnet.

Sei

$$\begin{aligned} a&=\alpha_0+\alpha_2+\alpha_4+\cdots,\\ b&=\beta_0+\beta_2+\beta_4+\cdots,\\ c&=\gamma_0+\gamma_2+\gamma_4+\cdots, \end{aligned} \tag{4, 2}$$

wobei durch den Index die Ordnung gekennzeichnet sein soll.

Da $\gamma_0=c_{00}=0$, ist c' zweiter Ordnung klein, während $\alpha_0=a_{00}$ und, da $L\neq 0$ vorausgesetzt ist, auch $\beta_0=b_{00}$ nicht verschwinden.

Es ist also schon das dritte Glied in der Klammer in v' [vgl. (4, 1)] vierter Ordnung klein und kann, wenn man die Glieder in v' bis zur fünften Ordnung einschließlich berechnen will, vernachlässigt werden, denn der Faktor vor der Klammer ist dritter Ordnung klein; es werden also dabei nur Glieder siebenter und höherer Ordnung vernachlässigt.

Durch weitere analoge Überlegung sieht man, daß es genügt (immer für die Glieder von v' bis einschließlich der fünften Ordnung), zu rechnen:

$$\begin{aligned} v'&=\frac{y}{2}\frac{\gamma_2+\gamma_4}{\beta_0+\beta_2}\left(1+\frac{\alpha_0\gamma_2}{4\beta_0^2}\right)=\frac{y}{2\beta_0}(\gamma_2+\gamma_4)\left(1-\frac{\beta_2}{\beta_0}\right)\left(1+\frac{\alpha_0\gamma_2}{4\beta_0^2}\right)\\ &=\frac{1}{2\beta_0}\left(\gamma_2-\frac{\beta_2\gamma_2}{\beta_0}+\frac{\alpha_0\gamma_2^2}{4\beta_0^2}+\gamma_4\right)r\sin\vartheta. \end{aligned} \tag{4, 3}$$

Nach (3, 1) und (4, 2) ist

$$\begin{aligned} &\alpha_0=a_{00}, \quad \beta_0=b_{00}, && \gamma_0=0,\\ &\qquad\qquad \beta_2=b_{02}r^2+b_{11}ru+b_{20}u^2, && \gamma_2=c_{02}r^2+c_{11}ru+c_{20}u^2,\\ &\qquad\qquad && \gamma_4=c_{04}r^4+c_{13}r^3u+c_{22}r^2u^2. \end{aligned} \tag{4, 4}$$

Sei

$$v'=q_iu^i=q_{ij}u^ir^j. \tag{4, 5}$$

Der Übersicht über die q mit Doppelindex diene die Tabelle

$$
\begin{array}{cccccc}
q_{00} & q_{01} & q_{02} & q_{03} & q_{04} & q_{05} \\
q_{10} & q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} & \\
q_{20} & q_{21} & q_{22} & q_{23} & & \\
q_{30} & q_{31} & q_{32} & & & \\
q_{40} & q_{41} & & & & \\
q_{50} & & & & &
\end{array}
$$

Die gestrichenen Diagonalreihen enthalten nur Nullen, weil die Klammer in v' (4, 3) nur Glieder gerader Ordnung, also v' nur Glieder ungerader Ordnung enthält.

Die erste (gestrichene) Vertikalreihe enthält nur Nullen, weil v' den Faktor r enthält.

$q_{01}=0$, weil die Entwicklung von v' mit Gliedern dritter Ordnung beginnt.

Es sind also noch die übrigen acht q_{ij} zu bestimmen.

Die links oben gelegene Diagonalreihe enthält die drei Koeffizienten der Seidelstufe, die längste Reihe rechts unten die fünf Koeffizienten der Herzbergerstufe.

Nach (4, 3), (4, 4) und (4, 5) ist:

$$
\begin{aligned}
& q_{03}=\frac{c_{02}}{2b_{00}}\sin\vartheta, \qquad q_{12}=\frac{c_{11}}{2b_{00}}\sin\vartheta, \qquad q_{21}=\frac{c_{20}}{2b_{00}}\sin\vartheta, \\
& q_{05}=\frac{1}{2b_{00}}\left(-\frac{b_{02}c_{02}}{b_{00}}+\frac{a_{00}}{4b_{00}^2}\,c_{02}^2+c_{04}\right)\sin\vartheta, \\
& q_{14}=\frac{1}{2b_{00}}\left(-\frac{b_{02}c_{11}+b_{11}c_{02}}{b_{00}}+\frac{a_{00}}{4b_{00}^2}\,2c_{02}c_{11}+c_{13}\right)\sin\vartheta, \\
(4,6)\quad & q_{23}=\frac{1}{2b_{00}}\left(-\frac{b_{02}c_{20}+b_{11}c_{11}+b_{20}c_{02}}{b_{00}}+\frac{a_{00}}{4b_{00}^2}(2c_{02}c_{20}+c_{11}^2)+c_{22}\right)\sin\vartheta, \\
& q_{32}=\frac{1}{2b_{00}}\left(-\frac{b_{11}c_{20}+b_{20}c_{11}}{b_{00}}+\frac{a_{00}}{4b_{00}^2}\,2c_{11}c_{20}\right)\sin\vartheta, \\
& q_{41}=\frac{1}{2b_{00}}\left(-\frac{b_{20}c_{20}}{b_{00}}+\frac{a_{00}}{4b_{00}^2}\,c_{20}^2\right)\sin\vartheta.
\end{aligned}
$$

Führt man in diese Formeln die durch (3, 14) gegebenen Ausdrücke ein, so ergibt die Substitution (die weder Schwierigkeiten noch irgendein Interesse bietet und für die Seidelstufe sogar im Kopf ausgeführt werden kann):

$$
\begin{aligned}
& q_{03}=-\frac{s'}{2n'}(M^3-M'^3+L^2E)\sin\vartheta, \\
& q_{12}=+\frac{ns'}{2sn'}LE\sin 2\vartheta, \\
& q_{21}=-\frac{n^2s'}{2s^2n'}mL\sin\vartheta,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& q_{05}=-\frac{3s'}{8n'}\left[N^5-N'^5+L\left(\frac{M^3}{n's'}-\frac{M'^3}{ns}\right)+LE(M^3-M'^3+L^2E)\right]\sin\vartheta, \\
(4,7)\quad & q_{14}=+\frac{ns'}{4sn'}\left[E(3L^2E+M^3)+\frac{L}{n'^2}(M^3-M'^3-n'AEL)\right]\sin 2\vartheta, \\
& q_{23}=-\frac{n^2s'}{4s^2n'}\left[2LE\left(3E-\frac{2A}{n'}\right)\cos^2\vartheta+m(M^3+3L^2E)\right]\sin\vartheta, \\
& q_{32}=+\frac{n^3s'}{4s^3n'}mL\left(3E-\frac{A}{n'}\right)\sin 2\vartheta, \\
& q_{41}=-\frac{3n^4s'}{8s^4n'}m^2L\sin\vartheta.
\end{aligned}
$$

In einigen dieser Formeln ist zur Abkürzung gesetzt:

$$m = \frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}.$$

§ 5. Die radiale Abweichung.

Nach Gleichung (2, 4) ist

$$(5, 1) \qquad u' = \frac{ns'}{n's}\frac{P'}{P}u - \frac{n}{s}\frac{1}{P}\frac{v'}{y}u + v' \operatorname{cotg}\vartheta,$$

nach (3, 3) hat man

$$P' = L + \frac{M'^3}{2}r^2 + \frac{3N'^5}{8}r^4 + \cdots,$$

$$(5, 2) \qquad \frac{1}{P} = \frac{1}{L}\left[1 - \frac{1}{2L}M^3r^2 + \frac{1}{8L^2}(2M^6 - 3N^5L)r^4 + \cdots\right]$$

und daraus

$$(5, 3) \qquad \frac{P'}{P} = 1 - \frac{1}{2L}(M^3 - M'^3)r^2 + \frac{1}{8L^2}\left[2M^3(M^3 - M'^3) - 3L(N^5 - N'^5)\right]r^4 + \cdots.$$

Setzt man

$$(5, 4) \qquad u' = p_i u^i = p_{ij} u^i r^j,$$

so folgt aus (4, 5) und (5, 1)

$$(5, 5) \qquad \begin{aligned} p_0 &= q_0 \operatorname{cotg}\vartheta, \\ p_1 &= \frac{ns'}{n's}\frac{P'}{P} + q_1 \operatorname{cotg}\vartheta - \frac{n}{s}\frac{1}{P}\frac{q_0}{y}, \\ p_i &= q_i \operatorname{cotg}\vartheta - \frac{n}{s}\frac{1}{P}\frac{q_{i-1}}{y} \qquad \text{für} \qquad i > 1. \end{aligned}$$

Zur Übersicht sind wieder die p_{ij} in die folgende Tabelle geschrieben:

$$\begin{array}{cccccc}
\cancel{p_{00}} & \cancel{p_{01}} & \cancel{p_{02}} & p_{03} & \cancel{p_{04}} & p_{05} \\
p_{10} & \cancel{p_{11}} & p_{12} & \cancel{p_{13}} & p_{14} & \\
\cancel{p_{20}} & p_{21} & \cancel{p_{22}} & p_{23} & & \\
p_{30} & \cancel{p_{31}} & p_{32} & & & \\
\cancel{p_{40}} & p_{41} & & & & \\
p_{50} & & & & &
\end{array}$$

Die gestrichenen Diagonalreihen enthalten nur Nullen, weil u' nach (5, 5) nur Glieder ungerader Ordnung enthält; ferner ist $p_{01} = 0$, weil die Entwicklung von q_0 mit q_{03} beginnt.

Die übrigen elf in den ungestrichenen Diagonalreihen stehenden Koeffizienten sind (von links oben nach rechts unten):

1. der Koeffizient des Gaußschen Bildpunktes p_{10},
2. die vier Koeffizienten der Seidelstufe,
3. die sechs Koeffizienten der Herzbergerstufe.

Führt man in die Formeln (5, 5) die Ausdrücke für $\frac{P'}{P}$ nach (5, 3), für $\frac{1}{P}$ nach (5, 2) und für die q_i nach (4, 7) (es ist $q_i = q_{ij} r^j$) ein, so ergibt die Substitution:

$$
\begin{aligned}
p_{10} &= + \frac{n s'}{s n'}, \\
p_{03} &= - \frac{s'}{2 n'} (M^3 - M'^3 + L^2 E) \cos\vartheta, \\
p_{12} &= + \frac{n s'}{2 s n'} L E (2 + \cos 2\vartheta), \\
p_{21} &= - \frac{n^2 s'}{2 s^2 n'} (m L + 2 E) \cos\vartheta, \\
p_{30} &= + \frac{n^3 s'}{2 s^3 n'} m, \\
p_{05} &= - \frac{3 s'}{8 n'} \left[N^5 - N'^5 + L \left(\frac{M^3}{n' s'} - \frac{M'^3}{n s} \right) + L E (M^3 - M'^3 + L^2 E) \right] \cos\vartheta, \\
(5, 6) \quad p_{14} &= + \frac{n s'}{8 s n'} \left\{ \left[E (3 L^2 E + M^3) + \frac{L}{n'^2} (M^3 - M'^3 - n' A E L) \right] (3 + 2 \cos 2\vartheta) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{n'} \left[(M^3 - M'^3) \left(3 A + \frac{2 L}{n'} \right) + L^2 A E \right] \right\}, \\
p_{23} &= - \frac{n^2 s'}{4 s^2 n'} \left\{ \left[2 L E \left(3 E - \frac{2 A}{n'} \right) (1 + \cos^2\vartheta) + m (M^3 + 3 L^2 E) \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{n'^2} (M^3 - M'^3 + n' A E L) \right\} \cos\vartheta, \\
p_{32} &= + \frac{n^3 s'}{4 s^3 n'} \left[m L \left(3 E - \frac{A}{n'} \right) (2 + \cos 2\vartheta) + 2 E \left(3 E - \frac{2 A}{n'} \right) \cos^2\vartheta + \frac{m}{n'} L A \right], \\
p_{41} &= - \frac{3 n^4 s'}{8 s^4 n'} \left[m^2 L + \frac{4}{3} m \left(3 E - \frac{A}{n'} \right) \right] \cos\vartheta, \\
p_{50} &= + \frac{3 n^5 s'}{8 s^5 n'} m^2.
\end{aligned}
$$

§ 6. Vergleich der Abweichungsformeln mit der Theorie der Seidelschen Bildfehler und mit Schwarzschilds Bildfehlern fünfter Ordnung.

Schwarzschild leitet aus der Eikonaltheorie für die Seidelschen Bildfehler eine allgemeine Formel ab, die in L. V. 19, III, p. 8, unter 11) angegeben ist.

Durch Anwendung dieser Formel für den Fall einer einzigen brechenden Fläche unter der Voraussetzung, daß die Eintrittspupille in der Tangentialebene im Scheitel der brechenden Fläche liegt, bekommt man (wenn noch die Bezeichnungen entsprechend geändert werden) die Formeln (4, 7) und (5, 6), so weit sich diese auf die Seidelstufe beziehen.

In den von Schwarzschild[6]) angegebenen Formeln für die Bildfehler fünfter Ordnung ist, wie von Herzberger[7]) bemerkt worden ist, eine Ungenauigkeit enthalten, da dort der Abstand des Durchgangspunktes durch die brechende Fläche von der Tangentialebene im Scheitel der Fläche vernachlässigt wird (oder kürzer: die Fehler fünfter Ordnung im Gaußschen Raum bestimmt werden).

Es können daher nicht alle in den Formeln (4, 7) und (5, 6) enthaltenen Glieder mit Schwarzschilds Bildfehlern fünfter Ordnung in Übereinstimmung gebracht werden.

Wohl aber müssen alle Schwarzschildfehler fünfter Ordnung (für den Fall *einer* brechenden Fläche) in den Formeln (4, 7) und (5, 6) enthalten sein.

Zum bequemeren Vergleich seien die folgenden Bezeichnungen für die in den Formeln (4, 7) und (5, 6) auftretenden Konstanten eingeführt, wobei die gewählten Zeichen an die von Schwarzschild benutzten Namen der einzelnen Bildfehler erinnern sollen, in denen die betroffenen Konstanten als Faktoren enthalten sind.

[6]) L. V. 19, I, p. 20, 21. [7]) L. V. 12.

S	Sphärische Aberration	Seidelstufe
K	Koma	
G	Astigmatismus	
W	Bildwölbung[8])	
V	Verzeichnung	
S_H	Sphärische Aberration zweiter Stufe	Herzbergerstufe
K_H	Koma zweiter Stufe	
Z_K	Zusatzfehler im Komaglied	
S_S	Seitliche sphärische Aberration	
F_H	Flügelfehler	
Z_F	Zusatzfehler im Flügelfehlerglied	
P_H	Pfeilfehler	
K_S	Seitliche Koma	
Z_S	Zusatzfehler im Glied der seitlichen Koma	
G_S	Seitlicher Astigmatismus	
W_S	Seitliche Bildwölbung	
V_S	Seitliche Verzeichnung	

Die oben aufgezählten Konstanten haben die Werte:

$$2S = -(M^3 - M'^3 + L^2 E) \qquad r^3$$

$$2K = +LE \qquad r^2 u$$

(6, 1)
$$2G = -2E$$
$$2W = -mL \qquad r u^2$$

$$2V = +m \qquad u^3$$

$$8S_H = -3\left[N^5 - N'^5 + L\left(\frac{M^3}{n' s'} - \frac{M'^3}{n s}\right) - 2LES\right] \qquad r^5$$

$$8K_H = +E(3L^2E + M^3) + \frac{L}{n'^2}(M^3 - M'^3 - n' AEL)$$
$$8Z_K = +\frac{1}{n'}\left[(M^3 - M'^3)\left(3A + \frac{2L}{n'}\right) + L^2 AE\right] \qquad r^4 u$$

$$8S_S = -2m(M^3 + 3L^2E)$$
$$8F_H = -4LE\left(3E - \frac{2A}{n'}\right) \qquad r^3 u^2$$
$$8Z_F = -4\frac{1}{n'^2}(M^3 - M'^3 + n' AEL)$$

(6, 2)
$$8P_H = +4nE\left(3E - \frac{2A}{n'}\right)$$
$$8K_S = +2mL\left(3E - \frac{A}{n'}\right) \qquad r^2 u^3$$
$$8Z_S = +2\frac{1}{n'}mLA$$

$$8G_S = -4m\left(3E - \frac{A}{n'}\right)$$
$$8W_S = -3m^2 L \qquad r u^4$$

$$8V_S = +3m^2 \qquad u^5$$

[8]) Der gewöhnlich als Bildwölbung bezeichnete Bildfehler enthält nicht W, sondern $G + 2W$.

Sei

$$
(6,3)\qquad
\begin{aligned}
u' &= u'_g + \underline{o}\,u' + \hat{o}\,u' = \underline{u}' + \hat{o}\,u' ,\\
v' &= \qquad\;\; \underline{o}\,v' + \hat{o}\,v' = \underline{v}' + \hat{o}\,v' ,
\end{aligned}
$$

wobei mit $\underline{o}$ die Abweichung der Seidelstufe, mit $\hat{o}$ die der Herzbergerstufe bezeichnet ist.

Schreibt man noch $\frac{u}{s}n = -kn = w$, so ist mit den oben definierten Konstanten:

$$
(6,4)\qquad
\begin{aligned}
u'_g &= \frac{s'}{n'}\,w ,\\
\underline{o}\,u' &= \frac{s'}{n'}\,[S\cos\vartheta\cdot r^3 + K(2+\cos 2\vartheta)\cdot r^2 w + (G+W)\cos\vartheta\cdot r w^2 + V\cdot w^3] ,\\
\hat{o}\,u' &= \frac{s'}{n'}\,\{S_H\cos\vartheta\cdot r^5 + [K_H(3+2\cos 2\vartheta)+Z_K]\cdot r^4 w\\
&\qquad + [S_S + F_H(1+\cos^2\vartheta)+Z_F]\cos\vartheta\cdot r^3 w^2 + [P_H\cos^2\vartheta + K_S(2+\cos 2\vartheta)+Z_S]\cdot r^2 w^3\\
&\qquad + (G_S+W_S)\cos\vartheta\cdot r w^4 + V_S\cdot w^5\} ,\\
\underline{o}\,v' &= \frac{s'}{n'}\,[S\sin\vartheta\cdot r^3 + K(\qquad\sin 2\vartheta)\cdot r^2 w + (\qquad W)\sin\vartheta\cdot r w^2 \qquad\qquad] ,\\
\hat{o}\,v' &= \frac{s'}{n'}\,\{S_H\sin\vartheta\cdot r^5 + [K_H(\qquad 2\sin 2\vartheta)\qquad]\cdot r^4 w\\
&\qquad + [S_S + F_H(\qquad\cos^2\vartheta)\qquad]\sin\vartheta\cdot r^3 w^2 + [\qquad\qquad K_S(\qquad\sin 2\vartheta)\qquad]\cdot r^2 w^3\\
&\qquad + (\qquad W_S)\sin\vartheta\cdot r w^4 \qquad\qquad\}.
\end{aligned}
$$

Die Formeln (6, 3) und (6, 4) stimmen ihrem Aufbau nach bis auf die drei Zusatzfehler mit den von Schwarzschild angegebenen Ausdrücken für die Bildfehler dritter und fünfter Ordnung überein.

Eine weitere Vergleichsmöglichkeit ist für die Fehler fünfter Ordnung nicht gegeben, da eine Bestimmung der einzelnen Konstanten von Schwarzschild nur für die Seidelstufe durchgeführt ist.

Bei Herzberger[9]) ist eine allgemeine Theorie der Bildfehler fünfter Ordnung in den Grundzügen entwickelt.

Der Zahl und Anordnung nach Potenzen von r und w nach stimmt das hier gegebene Beispiel der Brechung an *einer* Fläche mit den von Herzberger benutzten Konstanten überein.

Eine Bestimmung der Konstanten für Einzelfälle oder ein Hinweis auf die Art des Zusammenhanges der Konstanten mit dem durch ϑ bestimmten Einzelstrahl ist bei Herzberger im ersten Teil seiner Arbeit nicht angegeben. Der zweite (im ersten Teil angekündigte) Teil ist zur Zeit nicht erreichbar[9a]), der erste Teil ist im Herbst 1939 in den USA erschienen.

Kerber[10]) beweist, daß sich die Abweichungen fünfter Ordnung in beliebigen Rotationssystemen mit Hilfe von zwölf Konstanten darstellen lassen. Die dort (p. 235) angegebene Formel für die radiale und tangentiale Abweichung stimmt dem Aufbau nach bis auf einen Proportjonalitätsfaktor in der Bezeichnungsweise genau mit den Formeln (6, 4) überein (wenn man von dem ganz belanglosen Unterschied absieht, daß an Stelle von Z_K, Z_F, Z_S die Größen K_H+Z_K, F_H+Z_F, K_S+Z_S benutzt werden).

An weiteren Arbeiten über Bildfehler fünfter Ordnung ist mir (außer den nicht erhaltenen Berechnungen von Petzval) nur noch die Dissertation von Kohlschütter[11]) bekannt. Diese baut auf den Arbeiten von Schwarzschild auf und enthält deswegen auch nur die von Schwarzschild angegebenen Bildfehler.

---

[9]) L. V. 12.
[10]) L. V. 14.
[11]) L. V. 15.

[9a]) Anmerkung bei der Korrektur: Der zweite Teil ist nicht erschienen.

Kohlschütter berechnet für beliebige Rotationssysteme allgemeine Formeln für die Bestimmung der neun Schwarzschildschen Konstanten (also, bis auf einen Proportionalitätsfaktor, für $S_H, K_H, \ldots, V_S$ mit Ausnahme der drei Zusatzfehler).

Der Vergleich der hier gegebenen Formeln mit denen von Kohlschütter würde viel mehr Rechnung erfordern als eine neue Berechnung der Konstanten, weil die Ausdrücke in mehreren Stufen hintereinander, sobald die Formeln etwa die Länge einer halben Zeile erreicht haben, zur Abkürzung mit neuen Bezeichnungen versehen werden, die bei der nächsten Stufe neben den älteren in neue Konstanten eingehen.

Eine Überprüfung der Ergebnisse durch Vergleich mit einem trigonometrisch durchgerechneten Einzelstrahl ist nicht erwähnt.

Das erste der im folgenden gegebenen Beispiele zeigt, daß eine Verbesserung der durch die Seidelstufe gegebenen Näherungswerte mit Hilfe der neun Schwarzschildfehler allein schon bei der Brechung an einer Fläche nicht erreicht wird. Ihre Bestimmung für komplizierte Systeme dürfte danach vergebliche Mühe sein.

Damit soll aber nicht gesagt sein, daß der hier eingeschlagene Weg für die Behandlung des von Kohlschütter bearbeiteten, viel allgemeineren Problemes gangbar wäre.

Die wesentlichste Vereinfachung, die ich hier benutze, besteht darin, daß die Blende einfach als auf der brechenden Fläche selbst angebracht angenommen ist. Nur diesem Umstand ist die verhältnismäßig einfache Form der Formeln (6, 1) und (6, 2) zuzuschreiben.

Die anschließend durchgerechneten Beispiele sollen durch den Vergleich mit trigonometrisch (d. h. völlig unabhängig von den Näherungsformeln) berechneten Einzelstrahlen ein Bild der zu erwartenden Genauigkeit geben.

Die sehr gute Übereinstimmung in diesen Beispielen beweist natürlich nicht, daß eine entsprechende Genauigkeit immer erreicht wird, denn es ist durchaus denkbar, daß die Reihen in anderen Fällen weniger schnell konvergieren.

Dagegen genügt schon das erste Beispiel zum Nachweis, daß ohne Berücksichtigung der Zusatzfehler eine Verbesserung der Näherungswerte der Seidelstufe im allgemeinen nicht erreicht werden kann.

§ 7. Beispiele für die Brechung an einer Fläche.

Als erstes Beispiel werden einfach konkrete Zahlenwerte in die Formeln (6, 1) und (6, 2) eingeführt und die Ergebnisse für einzelne Strahlen mit den trigonometrisch berechneten Durchgangspunkten durch die Gaußsche Bildebene verglichen.

Die trigonometrische Durchrechnung ist nach Formeln ausgeführt, die von Kerber[12]) angegeben sind. Diese Formeln enthalten eine gute Kontrolle für die Genauigkeit der erhaltenen Zahlenwerte, die ergibt, daß die gefundenen Zahlen bis auf höchstens fünf Einheiten der letzten hingeschriebenen Dezimale zuverlässig sind.

Die Auswertung der Formeln (6, 1) bis (6, 4) wurde jeweils mit einer Dezimale mehr, als hingeschrieben sind, ausgeführt und zum Schluß abgerundet. Die angegebenen Zahlen dürften bis auf höchstens zwei Einheiten der letzten hingeschriebenen Dezimale zuverlässig sein (insofern sie Spezialwerte der Formeln (6, 4) darstellen sollen, nicht aber als Näherungswerte für den Strahlengang).

Danach kann die Güte der Annäherung im Beispiel durch Vergleich der mit t (trigonometrisch bestimmt) und H (Herzbergerstufe) bezeichneten Zeilen der unten gegebenen Tabelle beurteilt werden.

Da in allen vier Kolonnen Differenzen gleicher Größenordnung auftreten, ist zu erwarten, daß bei diesem Beispiel die Ungenauigkeit der Annäherung auch für andere

[12]) L. V. 13.

Strahlen dem Betrage nach nicht größer ist als der verdoppelte Betrag der größten dieser Differenzen vermehrt um die möglichen Fehler der numerischen Auswertung.

Das ergibt die Zuverlässigkeit der Annäherungswerte für die Koordinaten des Durchgangspunktes durch die Gaußsche Bildebene bis auf weniger als 0,03% der größten Abweichung vom Gaußschen Bildpunkt oder bis auf weniger als 0,06% des größten halben Durchmessers der Zerstreuungsfigur, was natürlich jede praktische Genauigkeitsanforderung weit übertrifft.

Als Beispiel ist gewählt: Eine Kugelkappe mit dem Radius 10 als brechende Fläche, deren konvexe Seite dem Objekt zugewandt ist, also

$$A = B = C = +0{,}1\,,$$

als Objektmedium Luft, also

$$n = 1\,,$$

als Bildmedium Glas mit

$$n' = 1{,}5\,,$$

als Objektpunkt (40, 0, —200), also

$$s = -200, \quad u = +40, \quad w = -0{,}2\,.$$

Die Blendengröße sei gegeben durch

$$r \leqq 2\,.$$

Dann ist:

$$L = -0{,}105\,, \qquad E = +0{,}025\,, \qquad s' = \frac{100}{3}\,,$$

$$M^3 = M'^3 = LA^2 = -0{,}00105, \qquad N = N'.$$

Daraus erhält man für die Konstanten der Seidelstufe:

$$10^4 S = -1{,}37813; \quad 10^3 K = -1{,}31250; \quad 10^2 G = -2{,}50000; \quad 10\,V = -2{,}77778;$$
$$10^2 W = -2{,}91111.$$

Nach diesen Zahlenangaben ist in Fig. 2a die Zerstreuungsfigur der Seidelstufe dargestellt. Die Zeichenebene ist die Gaußsche Bildebene.

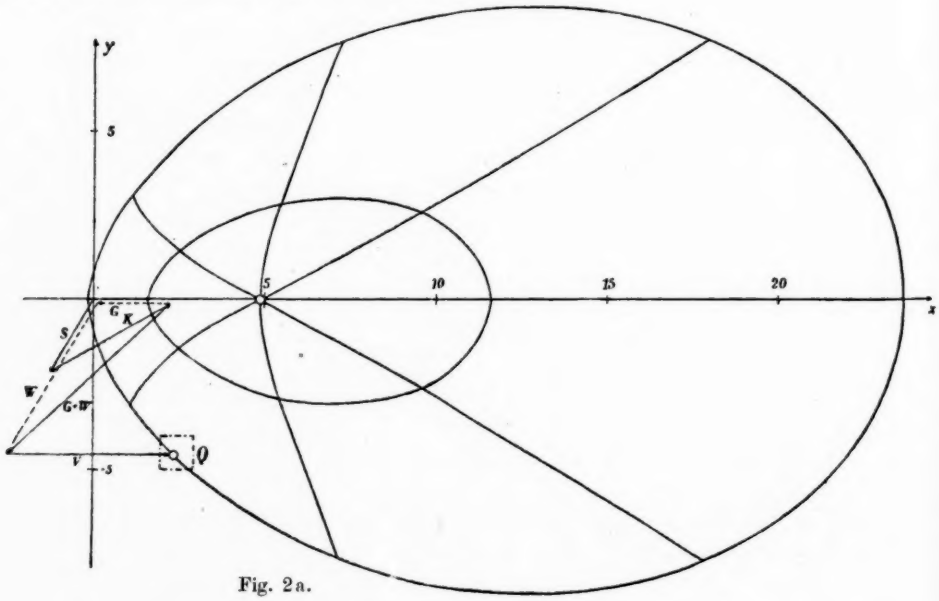


Fig. 2a.

Ist als Einheit $\frac{1}{2}$ cm gewählt, so gibt Fig. 2a das Kurvennetz

$$x(\vartheta; r) = 100\, \underline{o}u'; \qquad y(\vartheta; r) = 100\, \underline{o}v'.$$

Der Ursprung des Achsensystems ist der Gaußsche Bildpunkt

$$u_g' = -\frac{40}{9}, \quad v_g' = 0, \quad s' = \frac{100}{3}.$$

Die beiden Eilinien sind die Kurven $r=1$ und $r=2$.

Von den vom Punkte $r=0$ ausgehenden ϑ-Linien sind $\vartheta=0°$; $45°$; ...; $315°$ gezeichnet.

Im Quadrat Q ist der Punkt $r=2$; $\vartheta=60°$ hervorgehoben. Der Vektorenzug gibt die einzelnen Bildfehler der Seidelstufe für den zugehörigen Strahl. (Es sind die erzeugenden Konstanten bei den einzelnen Vektoren in der Figur angeschrieben).

In Fig. 2b ist das Quadrat Q aus Fig. 2a in zehnfacher Vergrößerung gegeben. Die schwarze Linie ist ein Teil der Kurve $r=2$. Der auf der Kurve hervorgehobene

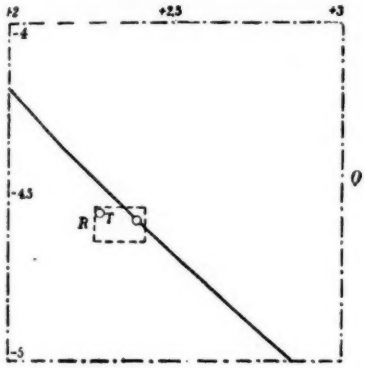


Fig. 2b.

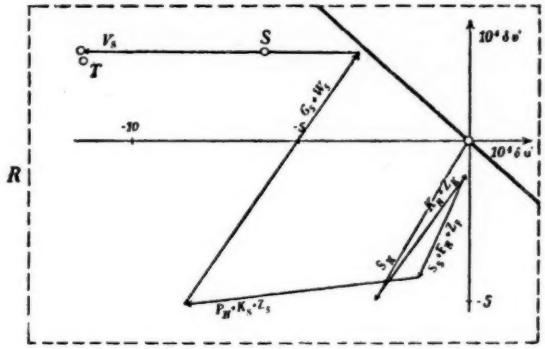


Fig. 2c.

Punkt ist $\vartheta=60°$. Durch den Kreis T ist der trigonometrisch berechnete Durchgangspunkt des Strahles $r=2$, $\vartheta=60°$ bezeichnet.

Für die Konstanten der Herzbergerstufe ergibt sich:

$10^7 S_H = -7{,}623$		
$10^6 K_H = -2{,}994$	$10^6 Z_K = 2{,}297$	
$10^5 S_S = -3{,}099$	$10^5 F_H = -7{,}681$	$10^5 Z_F = 8{,}750$
$10^4 P_H = -7{,}292$	$10^4 K_S = 1{,}215$	$10^4 Z_S = 9{,}722$
$10^3 G_S = 2{,}315$	$10^3 W_S = 12{,}153$	
$10^2 V_S = 11{,}574$		

In Fig. 2e ist das Rechteck R aus Fig. 2b in zehnfacher Vergrößerung gegeben. Die breite schwarze Linie ist ein Teil der Seidelkurve $r=2$. Der auf ihr hervorgehobene Ursprung des Achsensystems ist der Punkt $\vartheta=60°$. Der Vektorenzug gibt die durch die hinzugeschriebenen Konstantenbezeichnungen kenntlich gemachten Summen von Bildfehlern der Herzbergerstufe.

Der Kreis T ist wieder der trigonometrisch berechnete Durchgangspunkt.

Der Kreis S auf dem letzten Vektor bezeichnet den Punkt, den man ohne Berücksichtigung der drei Zusatzfehler (also aus den neun Schwarzschildschen Bildfehlern fünfter Ordnung) erhält.

In den Figuren 2d und 2e sind die entsprechenden Vektoren (der Herzbergerstufe) für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = 180°$ angegeben (die natürlich alle in der Achse $v' = 0$ liegen). (Maßstab wie in Fig. 2c).

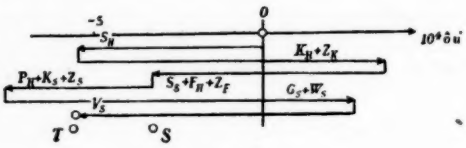


Fig. 2d.

Die mit 0 bezeichneten Stellen sind die Punkte der Seidelkurve.

Die Kreise T sind die trigonometrisch bestimmten Durchgangspunkte.

Die Kreise S sind die ohne Berücksichtigung der Zusatzfehler berechneten Punkte.

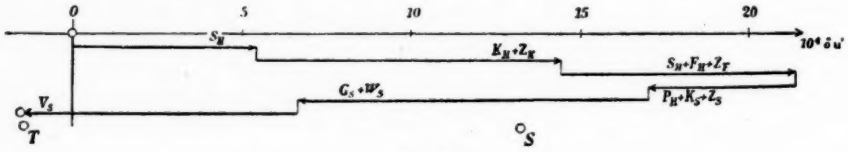


Fig. 2e.

In der folgenden Tabelle sind die berechneten Abweichungen für die drei Strahlen

$$r = 2; \quad \vartheta = 0; \quad 60°; \quad 180°$$

zusammengestellt.

	$\vartheta = 0$	$\vartheta = 180°$	$\vartheta = 60°$	
	u'	u'	u'	v'
G	− 4,444444	− 4,444444	− 4,444444	0
o	− 0,001414	+ 0,240179	+ 0,023985	− 0,045915
S	− 4,445858	− 4,204265	− 4,420459	− 0,045915
δ	− 0,000554	− 0,000154	− 0,001148	+ 0,000264
H	− 4,446412	− 4,204419	− 4,421607	− 0,045651
t	− 4,446415	− 4,204407	− 4,421599	− 0,045677
$t-S$	− 0,000557	− 0,000142	− 0,001140	+ 0,000238
$t-H$	− 0,000003	+ 0,000012	+ 0,000008	− 0,000026

Die Zeile G enthält den Gaußschen Bildpunkt,
o die Korrektur der Seidelstufe,
S den Näherungswert der Seidelstufe,
δ die Korrektur der Herzbergerstufe,
H den Näherungswert der Herzbergerstufe,
t den trigonometrisch bestimmten Punkt.

Als zweites Beispiel werde die Spiegelung an einem parabolischen Hohlspiegel für unendlich entfernte Objektpunkte behandelt. Man kann den parabolischen Hohlspiegel in diesem Falle als kartesische Fläche betrachten.

Bezeichnet nämlich f die Brennweite des Spiegels, so ist in den früheren Bezeichnungen zu setzen:

$$s=\infty; \quad n=1; \quad n'=-1; \quad s'=f.$$

Benutzt man ferner die (unten beschriebenen) Bezeichnungen des § 9, so hat man:

$$p^\nu=E_{\nu 0}=(-1)^\nu-1.$$

Also $p^{2i}=0$; $p^{2i+1}=-2$. Wegen $s=\infty$ ist $L=-A$. Also $E_{\nu\alpha}=A^\alpha p^\nu(1-p)^\alpha$ und $A=\frac{1}{2f}$.

Die Gleichung (D_2) lautet danach

$$p^{-1}[B^3+A^3(1-p)^2(1-p-2)]=0,$$

und weil die geraden Potenzen von p verschwinden und die ungeraden alle gleich sind, folgt $B=0$.

Danach heißt die Gleichung (D_3)

$$p^{-1}\{C^5-A^5(1-p)^3[2-3(1-p)+(1-p)^2]\}=0$$

oder

$$p^{-1}C^5-A^5(1-p)^2(1-p^2)=0,$$

also $C=0$.

(Natürlich kann man auch ohne jede Rechnung wegen der bekannten Eigenschaft der Parabel, achsenparallel einfallende Strahlen in den Brennpunkt zu reflektieren, den parabolischen Spiegel als kartesische Fläche bezeichnen.)

Für die in den Formeln (6, 1) und (6, 2) auftretenden Größen ist also zu setzen:

$$B=C=0, \quad M=0, \quad M'^3=-2A^3, \quad N=N'=0, \quad L=-A, \quad E=-2A.$$

Das ergibt für die Konstanten der Seidelstufe:

$$S=0, \quad K=A^2, \quad G=2A, \quad W=0, \quad V=0.$$

Für die Konstanten der Herzbergerstufe ergibt sich:

$$\begin{gathered} S_H=0, \quad K_H=\quad A^4; \quad S_S=0, \qquad P_H=4A^2, \quad G_S=0, \quad V_S=0, \\ Z_K=-A^4, \quad F_H=4A^3, \quad K_S=0, \qquad W_S=0, \\ Z_F=0, \qquad Z_S=0. \end{gathered}$$

Setzt man $-4Ar=h$, um die Abweichungen durch das Öffnungsverhältnis h und das Gesichtsfeld $k=-w$ des Spiegels auszudrücken (k ist nicht das Gesichtsfeld selbst, sondern der Tangens des halben Gesichtsfeldes), so ergeben die Formeln (6, 4):

$$\begin{aligned} 16\,\underline{o}u' &= fhk\,[(2+\cos 2\vartheta)\,h+8k\cos\vartheta], \\ 16\,\underline{o}v' &= fh^2k\sin 2\vartheta, \\ 64\,\hat{o}u' &= fh^2k\,(h+4k\cos\vartheta)\,(h\cos\vartheta+4k)\cos\vartheta, \\ 64\,\hat{o}v' &= fh^2k\,(h+4k\cos\vartheta)\,h\cos\vartheta\sin\vartheta. \end{aligned}$$

Zum Vergleich mit den von Schwarzschild[13]) in der Tabelle angegebenen Zahlen ist $\vartheta=0$ zu setzen und die Werte von $\underline{o}u'$ sind (die beiden Summanden getrennt als Koma und Wölbung) mit 206265, der Anzahl der Bogensekunden im Winkel 1, zu multiplizieren, wenn f als Längeneinheit gewählt ist.

(In der Formel ist also einfach f zu ersetzen durch 206265″).

Für die Koma ergeben sich die Zahlen, die bei Schwarzschild in der Kolonne „Streuung durch Koma" stehen.

Für die Wölbung erhält man Zahlen, die gleich der halben Streuung durch Wölbung in der Tabelle von Schwarzschild sind.

[13]) L. V. 19, II, p. 11.

Beides wie es sein muß, weil unter Streuung nach der von Schwarzschild[14]) gegebenen Definition der radiale Durchmesser der Streuungsfigur zu verstehen ist.

(Die Zahlen stimmen bis auf einzelne Abweichungen in der letzten von Schwarzschild angegebenen Dezimale überein.)

Um einen Überblick über die Verbesserung der Näherungswerte zu geben, die durch die Korrekturen der Herzbergerstufe erreicht wird, sind in der folgenden Tabelle, die für das Öffnungsverhältnis $h=0{,}1$ gilt, die Abweichungen der Seidelstufe (Zeile $\underline{o}$), der Herzbergerstufe (Zeile δ), deren Summe (Zeile $\underline{o}+\delta$) und trigonometrisch berechnete Werte der Gesamtabweichung (Zeile t) zusammengestellt. Dabei sind die letzten hingeschriebenen Dezimalen der Zeile t recht unsicher, weil bei ihrer Bestimmung noch die siebente Stelle der siebenstellig ausgeführten trigonometrischen Berechnung des Durchgangspunktes durch die Gaußsche Bildebene benutzt werden mußte.

$h=0{,}1$. $\vartheta=0$. Alle Tabellenwerte in Bogensekunden.

Gesichtsfeld	0,5°	1°	2°	4°	8°
$\underline{o}$	1,8839	4,1606	9,8929	26,083	77,473
δ	0,0019	0,0051	0,0162	0,065	0,325
$\underline{o}+\delta$	1,8858	4,1657	9,9091	26,148	77,798
t	1,887	4,167	9,910	26,146	77,80

$h=0{,}1$. $\vartheta=180°$.

Gesichtsfeld	0,5°	1°	2°	4°	8°
$\underline{o}$	1,4911	2,5896	3,6085	0,929	−23,385
δ	0,0009	0,0005	0,0004	0,002	0,073
$\underline{o}+\delta$	1,4920	2,5901	3,6089	0,931	−23,312
t	1,493	2,589	3,610	0,930	−23,312

Die Korrekturen der Herzbergerstufe sind so klein, daß es in allen praktisch auftretenden Fällen genügen dürfte, mit der Seidelstufe allein zu rechnen.

Die Abbildung der Blende auf die Zerstreuungsfigur läßt sich hier recht gut übersehen.

Die Blendendurchmesser werden auf eine Schar quadratischer Parabeln, die einander im Gaußschen Bildpunkt berühren, abgebildet. Die gemeinsame Tangente ist die Gerade $\underline{o}v'=0$.

Die Enveloppe der Parabelschar ist eine algebraische Kurve vierter Ordnung, die man mit dem Parameter $t=2\vartheta$ in der Form

$$\begin{aligned} \underline{o}u' &= -3g(t)\cos t \\ \underline{o}v' &= g(t)\sin t \end{aligned} \qquad \text{mit} \qquad g(t)=\frac{f\,k^3(1+\cos t)}{2(1+2\cos t)^2}$$

schreiben kann.

Die Enveloppe besteht aus zwei Zweigen, ist wie die Zerstreuungsfigur selbst symmetrisch zur $\underline{o}u'$-Achse und berührt jede der Parabeln in einem vom Gaußschen Bildpunkt verschiedenen Punkt und außerdem das ganze Parabelbüschel im Bildpunkt, wo sie eine Spitze hat.

Die Richtung der Enveloppe ist durch

$$\frac{d\underline{o}v'}{d\underline{o}u'}=\operatorname{cotg}\vartheta$$

bestimmt.

[14]) L. V. 19, I, p. 17.

Die Schar der Blendenkreise $r=$ const. wird auf eine Schar geschlossener Kurven abgebildet, deren Gestalt nur vom Verhältnis $h:k$ abhängig ist.

Für kleines h hat die Kurve die Gestalt einer liegenden 8. Die linke Schleife ist kleiner als die rechte. Mit wachsendem h wächst der größte Durchmesser und die Breite der Kurve und außerdem wird die linke Schleife eingedrückt und über den Selbstüberschneidungspunkt nach rechts geschoben. Für großes h nähert sich die ursprünglich linke Schleife der rechten und beide nehmen fast Kreisform an. Ist das Gesichtsfeld sehr klein gegen das Öffnungsverhältnis, so wird ein so großer Teil der Blendenkreise in solche Figuren abgebildet, daß die innersten Kurven (die auch in diesem Falle ganz andere Gestalt haben) überhaupt vernachlässigt werden können. Das führt auf die von Carathéodory[15]) genau beschriebene reine Komafigur.

Jede dieser Kurven berührt die oben beschriebene Enveloppe in vier (paarweise symmetrischen) Punkten. (Mit Ausnahme der innersten Kurven, die — für $3h<4k$ — nur in einem Paar von Punkten berühren.)

Es erübrigt sich, diese Kurven zu zeichnen, da sie schon wiederholt gezeichnet worden sind[16]).

Als drittes Beispiel werde der Fall behandelt, daß die brechende Fläche eine Kugelkappe ist. Es ist

$$A=B=C, \quad \text{also} \quad M^3=M'^3=LA^2, \quad N=N'.$$

Die Koeffizienten S, S_H, K_H, Z_K, S_S, Z_F werden einfacher als im allgemeinen Fall, und die Größen u' und v' lassen sich dadurch viel übersichtlicher schreiben, wenn man darauf verzichtet, die Abweichungen nach Potenzen von r und w zu ordnen.

Man erhält, wie durch einfaches Ausmultiplizieren leicht verifiziert werden kann:

$$\begin{aligned} u' &= \frac{s'}{n'}\{w(1+\mu+\lambda)-Lx[\mu(1+\tau)+\lambda]\}, \\ v' &= \frac{s'}{n'}\{\qquad\qquad\quad -Ly[\mu(1+\tau)+\lambda]\}, \end{aligned} \tag{7, 1}$$

wobei μ, λ und τ gegeben sind durch

$$\begin{aligned} 2\mu &= ELr^2-2Exw+mw^2, \quad 2\tau=A^2r^2, \\ 4\lambda &= ELr^2+4\frac{A}{n'}\mu xw+6\mu^2. \end{aligned} \tag{7, 2}$$

Bei Vernachlässigung von τ und λ ergeben sich die Formeln der Seidelstufe.

Die Durchrechnung einzelner Strahlen läßt sich mit diesen Formeln auch für Systeme von Kugelflächen verhältnismäßig einfach ausführen.

Sehr unbequem ist dabei aber die Bestimmung des Durchgangspunktes durch die folgende brechende Fläche beim Übergang von einer Brechung zur nächsten.

Für eine einfache, nicht sehr dicke Linse genügt es, die in Teil II angegebenen Näherungswerte zu benutzen.

Zur numerischen Kontrolle habe ich einen Strahl auf drei Arten, unabhängig voneinander durch eine Linse verfolgt, deren erste Fläche im ersten Beispiel dieses Paragraphen gegeben ist und die durch die weiteren Angaben $d=2:3$, $A_2=-1:30$ bestimmt ist. Dabei ist mit d die Dicke der Linse, mit A_2 die Scheitelkrümmung der zweiten Fläche bezeichnet.

---

[15]) L. V. 4.

[16]) L. V. 5, Fig. 4 und 5, p. 365; L. V. 18, Fig. 2, p. 362; L. V. 23, Fig. 29, p. 59.

Erste Art (t): Durchrechnung nach den Formeln von Kerber.

Zweite Art (tH): Anwendung von (7, 1) und (7, 2) mit Benutzung trigonometrisch bestimmter Werte für den Durchgangspunkt durch die zweite Fläche.

Dritte Art (H): Anwendung der Endformeln des Teils II.

Bei der zweiten Art ist nach der Berechnung von u' und v' für die erste Fläche und der Bestimmung des Durchgangspunktes durch die zweite Fläche das System so um die optische Achse zu drehen, daß der neue Objektpunkt (u', v', s') in der $\hat{x}\hat{z}$-Ebene liegt ($\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ soll das neue System sein) und so zu verschieben, daß der neue Ursprung im zweiten Scheitel liegt.

Es ist also die Transformation

$$\begin{aligned} \hat{x} &= x\cos\alpha + y\sin\alpha, & \hat{\vartheta} &= \vartheta - \alpha, \\ \hat{y} &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha, & \hat{r} &= r, \\ \hat{z} &= z - d, & \operatorname{tg}\alpha &= \frac{v'}{u'} \end{aligned}$$

auszuführen und nach Anwendung der Formeln (7, 1) und (7, 2) wieder zum früheren System zurückzugehen.

Als Beispielstrahl ist $r = 2$, $\vartheta = 60°$ gewählt.

Die fünfstellig ausgeführte Rechnung ergibt:

$$\begin{aligned} &\alpha = 35'\,29{,}5'', \quad \hat{x}_2 = 0{,}95195, && \lg r_2^2 = 0{,}57965, \\ &\qquad\qquad\quad \hat{y}_2 = 1{,}7008, && \lg \hat{w}_2 = 0{,}30759 - 1, \\ &\hat{\mu}_2 = 0{,}027289, \quad \tau_2 = 0{,}002111, && \hat{\lambda}_2 = 0{,}001327. \end{aligned}$$

(Der Index 2 bedeutet, daß es sich um die zweite Brechung handelt.)

Für den Durchgangspunkt durch die Gaußsche Bildebene der Linse ergibt sich als Vergleichstabelle:

	u'	v'
t	$-3{,}3783$	$-0{,}1098$
tH	$-3{,}3780$	$-0{,}1096$
H	$-3{,}3781$	$-0{,}1096$

also mit praktisch ausreichender Genauigkeit dreimal ein und dasselbe.

§ 8. Über die Anzahl der Bildfehler fünfter Ordnung.

Bei Schwarzschild[17]) steht:

„Die Anzahl der unabhängigen Bildfehler 5. Ordnung ergiebt sich ohne weiteres zu 9. Petzval, der Errechner des ersten Portraitobjektivs, hat für diese Zahl 12 angegeben, woraus hervorzugehen scheint, daß er trotz der Ausdehnung seiner Rechnungen auf Glieder 9. Ordnung den Zusammenhang der Koeffizienten nicht allzu tief durchschaut hat."

Eine Begründung für die von Schwarzschild angegebene Zahl 9 läßt sich wohl nur aus der wenig später[18]) angegebenen Bemerkung ableiten:

„Dann sieht man unmittelbar, daß in der Entwicklung des Winkeleikonals W nach Potenzen von p und q nur die ganzen Potenzen der drei Größen:

$$p_0^2 + q_0^2, \quad p_1^2 + q_1^2, \quad p_0 p_1 + q_0 q_1,$$

insbesondere also nur Glieder grader Ordnung, vorkommen werden."

[17]) L. V. 19. I, p. 4.

[18]) L. V. 19. I, p. 13.

Ähnlich führt Herzberger[19]) aus:

„Ist das System rotationssymmetrisch, so läßt sich E (das Eikonal), wie schon Hamilton erkannte, stets als Funktion der drei Größen

$$a = u_1^2 + u_2^2, \quad b = 2(u_1 u_3 + u_2 u_4), \quad c = u_3^2 + u_4^2 \tag{13}$$

darstellen. Wir können also schreiben

$$E = E_0 + (A_1 a + A_2 b + A_3 c) + (C_{11} a^2 + 2 C_{12} a b + C_{22} b^2 + \cdots + C_{33} c^2) + \cdots\text{“}. \tag{14}$$

Ich kann dieses weder wie Schwarzschild unmittelbar sehen, noch Herzbergers Verfahren für zweckmäßig halten.

Daß das Eikonal als Funktion von a, b und c darstellbar ist, unterliegt keinem Zweifel. Das ist von Carathéodory[20]) bewiesen und dort zugleich gezeigt, daß sich das Eikonal (wenn man annimmt, daß es nach u_1, u_2, u_3 und u_4 in eine konvergente Taylorreihe entwickelt werden kann) nach positiven Potenzen von

$$a, b, c \quad \text{und} \quad d = 2(u_1 u_4 - u_2 u_3) = \sqrt{4ac - b^2}$$

entwickeln läßt.

Daß die in d linearen Glieder nicht immer beseitigt werden können, folgt schon aus dem trivialen Fall $E = d$.

Setzt man voraus, daß das System nicht nur rotationssymmetrisch ist, sondern auch jede Ebene durch die Achse Symmetrieebene ist — was bei optischen Systemen immer zutrifft —, so können keine in d linearen Glieder auftreten, weil d nicht spiegelungsinvariant ist (wohl aber rotationsinvariant).

Definiert man die Bildfehler als Eikonalkoeffizienten (wie z. B. Herzberger[21])), so ist damit die Frage nach der Anzahl der Bildfehler erledigt, und es gibt, wie bei Herzberger ausgeführt, 9 unabhängige Bildfehler fünfter Ordnung.

Doch scheint diese Definition nicht sehr zweckmäßig zu sein. Ich komme unten darauf zurück und will zunächst weitere Äußerungen zu dieser Frage anführen.

In Czapsky-Eppenstein[22]) führt Boegehold ohne eigene Stellungnahme an, daß Kerber[23]) der Ansicht Petzvals ist, dagegen eine neuere Untersuchung von Sonnefeld[24]) wieder die Zahl 9 ergeben hat.

Bei Kerber[23]) ist bewiesen, daß die Anzahl der unabhängigen Bildfehler höchstens 12 beträgt.

Die Arbeit von Sonnefeld[24]) enthält neben einigen kritischen Bemerkungen über Petzvals und Kerbers Arbeiten und der Feststellung, daß auch Kohlschütter[25]) mit 9 Bildfehlern operiert (was gar nichts besagt, da Kohlschütter einfach Schwarzschilds Ergebnisse benutzt) einen kurz gefaßten Beweisversuch für die Anzahl 9, den ich nicht in allen Einzelheiten verfolgt habe, gegen den sich aber — genau wie gegen Schwarzschilds Darstellung seiner 9 Fehler — einwenden läßt, daß die Benutzung der Seidelschen Variablen ein Rechnen im Gaußschen Raum bedeutet, das zwar in der Seidelstufe berechtigt ist, bei der Theorie der Fehler fünfter Ordnung aber nicht zu richtigen Ergebnissen zu führen braucht.

---

[19]) L. V. 10, p. 58.
[20]) L. V. 2, p. 59, 60.
[21]) L. V. 10, p. 60.
[22]) L. V. 6, p. 280.
[23]) L. V. 14.
[24]) L. V. 22.
[25]) L. V. 15.

Außerdem stellt Sonnefeld in seiner Arbeit[24]) (also 1921) einen direkten Nachweis, daß die 12 Bildfehler Kerbers nicht unabhängig sind, in Aussicht. Ein solcher Nachweisversuch scheint aber nicht veröffentlicht worden zu sein. Ein wirklicher Nachweis ist nicht möglich (es sei denn, man hilft sich durch die Definition über die inhaltliche Schwierigkeit weg).

Eine ausdrückliche Definition des Begriffes Bildfehler dritter bzw. fünfter Ordnung findet sich in den Arbeiten Kerbers und Sonnefelds nicht. Doch geht aus der Art der Behandlung der Frage hervor, daß etwa die folgende Beschreibung und unten anschließend gegebene Definition den verwendeten Begriff der unabhängigen Bildfehler $(2k-1)$-ter Ordnung deckt.

Die radiale und die tangentiale Abweichung vom Gaußschen Bildpunkt kann man nach Gesichtsfeld und Blendenöffnung in Reihen entwickeln. Die Reihen enthalten nur Glieder, in denen die Exponentensumme der beiden Variablen ungerade ist. Die homogenen Polynome $(2k-1)$-ten Grades bilden die radiale bzw. tangentiale Gesamtabweichung $(2k-1)$-ter Ordnung.

Die Koeffizienten der Gesamtabweichungen sind abhängig von einem Parameter, der den Einzelstrahl bestimmt (z. B. dem Winkel ϑ in der Eintrittspupille) und Konstanten, die durch das gegebene System bestimmt sind.

Definition. *Die Mindestzahl von Konstanten, durch die beide Gesamtabweichungen $(2k-1)$-ter Ordnung für ein beliebiges System dargestellt werden können, ist die Anzahl der unabhängigen Bildfehler $(2k-1)$-ter Ordnung.*

Für die Seidelstufe $(k=2)$ stimmen die Anzahlen der unabhängigen Bildfehler für beide Definitionen überein (beidemal 5).

Aus einer noch nicht veröffentlichten Arbeit[25a]) von Carathéodory ergibt sich:

Die Gesamtabweichungen fünfter Ordnung enthalten außer den Gliedern, die durch 9 Eikonalkoeffizienten der Herzbergerstufe bestimmt sind und deswegen mindestens 9 unabhängige Bildfehler erfordern, andere Glieder, die durch die Eikonalkoeffizienten der Seidelstufe bestimmt sind.

Die Gesamtabweichungen lassen sich so ordnen, daß sie in 24 Gliedern explizit hingeschrieben werden können, deren jedes einen konstanten Faktor enthält. Von diesen 24 Konstanten enthalten 12 nur die Eikonalkoeffizienten der Herzbergerstufe, die 12 anderen nur die Eikonalkoeffizienten der Seidelstufe. Die Glieder der beiden Gruppen enthalten paarweise die gleichen Variablen und Parameterfunktionen. Zwischen den 12 Konstanten der Herzbergergruppe müssen natürlich 3 (lineare) Beziehungen bestehen. Diese können explizit hingeschrieben werden. Die Rechnung ergibt, daß die entsprechenden Konstanten der Seidelgruppe diese drei linearen Beziehungen nicht befriedigen. Daraus folgt, daß die Anzahl der unabhängigen Bildfehler fünfter Ordnung bei der hier gegebenen Definition 12 ist.

Verschwinden alle Fehler der Seidelstufe, so verschwindet auch die Seidelgruppe in der Herzbergerstufe und zwischen den 12 Bildfehlern bestehen drei lineare Beziehungen — man erhält die 9 Bildfehler von Schwarzschild.

Rechnet man mit Seidelschen Variablen, so wird die Seidelgruppe der Herzbergerstufe vernachlässigt. Auch das führt auf die 9 Schwarzschildfehler.

Faßt man die Konstanten paarweise zu 12 Bildfehlern zusammen, so ergeben sich die Formeln (6, 4) (soweit diese sich auf die Herzbergerstufe beziehen).

[25a]) Die Arbeit ist inzwischen erschienen: C. Carathéodory, Die Fehler höherer Ordnung der optischen Instrumente, Sitz.-Ber. Bayer. Ak. Wiss. 1943, p. 199f.

Der Einfluß der drei Zusatzfehler auf die Gestalt der Schwarzschildfehler fünfter Ordnung bewirkt:

Z_K: Änderung des Winkels zwischen den Enveloppegeraden. Unter Umständen wird die Enveloppe imaginär und jeder der Kreise der Koma umschließt alle kleineren.

Z_F: Bei Zusammenfassung mit dem Flügelfehler: Mehrfache (stetige) Gestaltänderung des Flügelfehlers. Bei Zusammenfassung mit der seitlichen sphärischen Aberration: Ellipsen an Stelle der Kreise.

Z_S: Wie bei Z_K die Koma zweiter Stufe ändert sich hier die seitliche Koma.

§ 9. Eine Bemerkung zu den Umformungen der in den Bildfehlern auftretenden Konstanten.

Beim Lesen beliebiger Arbeiten, in denen die in den Bildfehlern auftretenden Konstanten bestimmt werden, fällt auf (besonders in der zitierten Dissertation von Kohlschütter, weil dort Konstanten der Herzbergerstufe berechnet werden, während gewöhnlich die viel besser zu überblickende Seidelstufe behandelt wird), daß die in allen Konstanten auftretenden Größen der Form

$$E_{\nu\alpha}=\frac{1}{n'^{\nu}s'^{\alpha}}-\frac{1}{n^{\nu}s^{\alpha}} \quad \text{und} \quad S_{\nu\alpha}=\frac{1}{n'^{\nu}s'^{\alpha}}+\frac{1}{n^{\nu}s^{\alpha}} \tag{9, 1}$$

und die Beziehungen zwischen ihnen und den Größen A und L (Scheitelkrümmung und Abbesche Invariante) durch sehr viele Hilfsformeln dargestellt werden müssen, damit die Rechnungen überhaupt hingeschrieben werden können.

Man kann bei den Umformungen einen Rechenformalismus benutzen, der viele der Rechnungen erheblich verkürzt und die Kontrolle der Teilergebnisse häufig erleichtert.

Da es zuerst mühsam ist, sich an diese Art der Rechnung zu gewöhnen, habe ich sie bei den angegebenen Ableitungen der Abweichungsformeln nicht benutzt. Hier soll sie kurz mitgeteilt und ihre Brauchbarkeit an einem Beispiel gezeigt werden.

Die im Beispiel durchgeführte Rechnung ist in gewöhnlicher Schreibweise schwerlich auf weniger als vier Seiten ausführbar.

Wie man leicht nachrechnet, gilt identisch:

$$E_{-\nu;-\alpha}=-(nn')^{\nu}(ss')^{\alpha}E_{\nu\alpha}\ ,\quad S_{-\nu;-\alpha}=+(nn')^{\nu}(ss')^{\alpha}S_{\nu\alpha}\ , \tag{9, 2}$$

$$E_{\nu_1\alpha_1}E_{\nu_2\alpha_2}=S_{\nu_2+\nu_1;\,\alpha_2+\alpha_1}-(nn')^{-\nu_1}(ss')^{-\alpha_1}S_{\nu_2-\nu_1;\,\alpha_2-\alpha_1}\ , \tag{9, 3}$$

$$\begin{aligned} S_{\nu_S\alpha_S}E_{\nu_E\alpha_E}&=E_{\nu_S+\nu_E;\,\alpha_S+\alpha_E}-(nn')^{-\nu_E}(ss')^{-\alpha_E}E_{\nu_S-\nu_E;\,\alpha_S-\alpha_E}\\ &=E_{\nu_S+\nu_E;\,\alpha_S+\alpha_E}+(nn')^{-\nu_S}(ss')^{-\alpha_S}E_{\nu_E-\nu_S;\,\alpha_E-\alpha_S}\ , \end{aligned} \tag{9, 4}$$

$$S_{\nu_1\alpha_1}S_{\nu_2\alpha_2}=S_{\nu_1+\nu_2;\,\alpha_1+\alpha_2}+(nn')^{-\nu_1}(ss')^{-\alpha_1}S_{\nu_2-\nu_1;\,\alpha_2-\alpha_1}\ . \tag{9, 5}$$

Sind n, n', s und s' durch die Beziehung

$$n\left(\frac{1}{s}-A\right)=n'\left(\frac{1}{s'}-A\right)=L \tag{9, 6}$$

miteinander verknüpft, wie es bei den beabsichtigten Rechnungen der Fall ist [(9, 6) ist die bekannte Definitionsgleichung der Abbeschen Invariante L], so ist:

$$AE_{\nu\alpha}+LE_{\nu+1;\alpha}=E_{\nu;\alpha+1}\ ,\quad AS_{\nu\alpha}+LS_{\nu+1;\alpha}=S_{\nu;\alpha+1}\ . \tag{9, 7}$$

Der oben erwähnte Formalismus besteht in Folgendem:

Die bisher benutzten Bezeichnungen sollen auch weiter gelten. α sei eine ganze Zahl, $\alpha \geqq 0$, ebenso β. ν und μ seien beliebige ganze Zahlen.

Die Funktion $G_{\nu\alpha}(x)$ sei definiert durch

$$G_{\nu\alpha}(x) = x^{\nu}(A + xL)^{\alpha} = c_i x^i. \tag{9, 8}$$

Durch (9, 8) sind zugleich die c_i bestimmt.

$G^{\wedge}_{\nu\alpha}(p)$ sei als Funktion der Variablen p_i definiert durch

$$G^{\wedge}_{\nu\alpha}(p) = c_i p_i. \tag{9, 9}$$

Das Glied c_0 in $G_{\nu\alpha}(p)$ soll in $G^{\wedge}_{\nu\alpha}(p)$ durch $c_0 p_0$ ersetzt werden.

$G^{\wedge}_{\nu\alpha}(q)$ soll genau analog $G^{\wedge}_{\nu\alpha}(p)$ erklärt sein. Andere Zeichen (außer p und q) werden nicht als Argumente von $G^{\wedge}_{\nu\alpha}$ benutzt.

Allgemein soll das an einem Funktionszeichen angebrachte Zeichen $^{\wedge}$ bedeuten, daß in der durch das Funktionszeichen bestimmten Potenzsumme von p und q die p^i und q^k durch die Variablen p_i und q_k ersetzt sind.

Dann gilt:

$$aG^{\wedge}_{\nu\alpha}(p) + bG^{\wedge}_{\mu\beta}(p) = [aG_{\nu\alpha}(p) + bG_{\mu\beta}(p)]^{\wedge} \quad \text{und analog in } q. \tag{I}$$

$$G^{\wedge}_{\nu\alpha}(p)G^{\wedge}_{\mu\beta}(q) = [G_{\nu\alpha}(p)G_{\mu\beta}(q)]^{\wedge}. \tag{II}$$

Setzt man $p_\nu = E_{\nu 0}$, $q_\nu = S_{\nu 0}$, so folgt direkt

$$(p^{\nu})^{\wedge} = E_{\nu 0}, \quad (q^{\nu})^{\wedge} = S_{\nu 0}$$

und durch vollständige Induktion in α mit Hilfe von (9, 7)

$$G^{\wedge}_{\nu\alpha}(p) = E_{\nu\alpha}, \quad G^{\wedge}_{\nu\alpha}(q) = S_{\nu\alpha}. \tag{9, 10}$$

Wegen der zweiten Gleichung (9, 4) ist für $\alpha \geq \beta$ (analog wegen der ersten für $\alpha \leq \beta$)

$$G^{\wedge}_{\nu\alpha}(p)G^{\wedge}_{\mu\beta}(q) = G^{\wedge}_{\nu+\mu,\,\alpha+\beta}(p) + (nn')^{-\mu}(ss')^{-\beta}G^{\wedge}_{\nu-\mu,\,\alpha-\beta}(p)$$

und insbesondere für $\alpha = \beta = 0$

$$(p^{\nu}q^{\mu})^{\wedge} = (p^{\nu+\mu})^{\wedge} + (nn')^{-\mu}(p^{\nu-\mu})^{\wedge}. \tag{9, 11}$$

Das Glied $c_0 p^0$ kann (in den entwickelten Potenzsummen) weggelassen werden, weil es durch $c_0 p_0 = c_0 E_{00} = 0$ zu ersetzen ist. Das gilt nicht für $c_0 q^0$.

Bei der Anwendung dieser Schreibweise kann das Zeichen $^{\wedge}$ überall weggelassen werden, da es an jeder Potenzsumme in p und q auftritt.

Der Hauptvorteil, der durch die Benutzung dieser Schreibweise entsteht, ist, daß

$$p^0 = 0$$

ist, und dadurch einerseits oft Ausdrücke, deren Verschwinden bei gewöhnlicher Schreibweise (wegen der vielen Bezeichnungen für voneinander abhängige Konstanten, die zur Abkürzung der Formeln unvermeidlich sind) nicht leicht bemerkbar ist, auf einen Blick als verschwindend zu erkennen sind, andererseits Glieder mit dem Faktor p^0 zur Vereinfachung der Formeln beliebig addiert werden dürfen.

Für das Anwendungsbeispiel werden zunächst Bedingungen für das Verschwinden der sphärischen Aberrationen erster und zweiter Stufe auf etwas anderem Wege als oben abgeleitet. Die Bedingungen ergeben sich dabei in einer Form, deren Äquivalenz mit dem Verschwinden der beiden Konstanten S und S_H nicht ohne weiteres ersichtlich ist. Der Nachweis dieser Äquivalenz soll mit Hilfe des oben beschriebenen Rechenformalismus geführt werden.

Liegt der Objektpunkt auf der optischen Achse, so ist $w = 0$ und alle Bildfehler dritter und fünfter Ordnung außer den beiden sphärischen Aberrationen verschwinden.

Das Verschwinden der beiden sphärischen Aberrationen ist also äquivalent der bis auf Größen höherer als sechster Ordnung scharfen Abbildung des Achsenpunktes.

Wird der Achsenpunkt scharf abgebildet, so ist der Lichtweg vom Objektpunkt zum Bildpunkt konstant, also gleich dem Lichtweg auf der Achse.

In den Bezeichnungen der §§ 1 und 2 geschrieben lautet das:

$$\varepsilon n l_0 + \varepsilon' n' l_0' = \varepsilon n |s| + \varepsilon' n' |s'|. \tag{9, 12}$$

Wegen

$$l_0 = \sqrt{(s-t)^2 + r^2} = |s| \sqrt{1+\alpha} \quad \text{mit} \quad \alpha s^2 = t^2 - 2st + r^2$$

und den entsprechenden Gleichungen in l_0', s' und α' an Stelle von l_0, s und α ist

$$s' n' \left(\sqrt{1+\alpha'} - 1\right) - s n \left(\sqrt{1+\alpha} - 1\right) = 0, \tag{9, 13}$$

denn es ist

$$\varepsilon |s| = -s; \quad \varepsilon' |s'| = +s',$$

weil $s \lessgtr 0$ für $\varepsilon = \pm 1$ und $s' \gtrless 0$ für $\varepsilon' = \pm 1$.

Für die Entwicklung der $\sqrt{1+\alpha}$ nach Potenzen von r hat man:

$$\sqrt{1+\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{8} + \frac{\alpha^3}{16} - \cdots, \tag{9, 14}$$

$$t = \frac{A}{2} r^2 + \frac{B^3}{8} r^4 + \frac{C^5}{16} r^6 + \cdots, \quad t^2 = \frac{A^2}{4} r^4 + \frac{A B^3}{8} r^6 + \cdots,$$

also

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1-sA}{s^2} r^2 + \frac{A^2 - sB^3}{4s^2} r^4 + \frac{AB^3 - sC^5}{8s^2} r^6 + \cdots, \\
\alpha^2 &= \frac{(1-sA)^2}{s^4} r^4 + \frac{(1-sA)(A^2 - sB^3)}{2s^4} r^6 + \cdots, \\
\alpha^3 &= \frac{(1-sA)^3}{s^6} r^6 + \cdots.
\end{aligned}$$

Durch Einführen dieser Ausdrücke in (9, 14) erhält man

$$\sqrt{1+\alpha} = 1 + \frac{1-sA}{2s^2} r^2 + \frac{-1+2sA-s^3B^3}{8s^4} r^4 + \frac{1-3sA+2s^2A^2+s^3B^3-s^5C^5}{16s^6} r^6 + \cdots$$

und genau ebenso für α' und s' an Stelle von α und s.

Da die Koeffizienten von r^2, r^4 und r^6 in Gleichung (9, 13) verschwinden müssen, folgen als Bedingungen für die scharfe Abbildung des Achsenpunktes die unten mit (D_1), (D_2), und (D_3) bezeichneten Gleichungen.

Eine brechende Fläche, die einen Punkt scharf abbildet, wird meist kartesische Fläche genannt. Es ist deswegen naheliegend, (D_1), (D_2) und (D_3) als erste, zweite und dritte Descartesflächenbedingung zu bezeichnen.

$$(D_1) \quad n'\left(\frac{1}{s'} - A\right) - n\left(\frac{1}{s} - A\right) = 0,$$

$$(D_2) \quad n'\left(-\frac{1}{s'^3} + \frac{2A}{s'^2} - B^3\right) - n\left(-\frac{1}{s^3} + \frac{2A}{s^2} - B^3\right) = 0,$$

$$(D_3) \quad n'\left(\frac{1}{s'^5} - \frac{3A}{s'^4} + \frac{2A^2}{s'^3} - \frac{B^3}{s'^2} - C^5\right) - n\left(\frac{1}{s^5} - \frac{3A}{s^4} + \frac{2A^2}{s^3} + \frac{B^3}{s^2} - C^5\right) = 0,$$

oder in den Bezeichnungen (9, 1) geschrieben

$$(D_1) \quad A E_{-10} - E_{-11} = 0,$$

$$(D_2) \quad B^3 E_{-10} - 2A E_{-12} + E_{-13} = 0,$$

$$(D_3) \quad C^5 E_{-10} - B^3 E_{-12} - 2A^2 E_{-13} + 3A E_{-14} - E_{-15} = 0.$$

(D_1) besagt nur, daß der Bildpunkt in der Gaußschen Bildebene liegt. Die Größe E_{-11} wird meist als Brechkraft bezeichnet.

(D_2) bestimmt den Koeffizienten B^3 in der Entwicklung der kartesischen Fläche. Die bei Schwarzschild als Deformation der Fläche bezeichnete Größe b ergibt sich aus $(1+b) A^3 = B^3$.

Es ist zu zeigen, daß (D_2) äquivalent ist mit $S=0$. Die Gleichungen (D_2) und $S=0$ sind nicht identisch, sondern nur unter der Voraussetzung der Gleichung (D_1) äquivalent.

(D_3) bestimmt den Koeffizienten C^5 in der Entwicklung der kartesischen Fläche.

Es ist zu zeigen, daß (D_3) und $S_H=0$ äquivalent sind. Die Gleichungen (D_3) und $S_H=0$ sind nicht identisch und auch unter der Voraussetzung (D_1) noch nicht, sondern erst, wenn (D_1) und (D_2) vorausgesetzt sind, äquivalent. Es ist also die sphärische Aberration zweiter Stufe nicht etwa proportional der linken Seite von (D_3), sondern das gilt nur für Flächen, deren Entwicklung bis zum Gliede vierten Grades in r mit der der kartesischen Fläche übereinstimmt. Es läßt sich also z. B. die sphärische Aberration zweiter Stufe für eine Kugelfläche nicht aus (D_3) bestimmen.

Es soll jetzt zunächst für die Seidelstufe die Äquivalenz von (D_2) und $S=0$ bewiesen werden. Formal geschrieben heißt (D_2):

$$p^{-1}[B^3+(A+pL)^2(-2A+A+pL)]=0 \quad \text{oder} \quad p^{-1}[B^3-(A^2-p^2L^2)(A+pL)]=0$$

oder

$$p^{-1}(B^3-A^3)+pL^2(A+pL)=0.$$

Die Gleichung $S=0$ oder $M^3-M'^3+L^2E_{11}=0$ schreibt sich aber, da

$$M^3-M'^3=E_{-10}(B^3-A^3)=p^{-1}(B^3-A^3), \quad E_n=p(A+pL),$$

ist, ebenso wie (D_2).

Für die spätere Rechnung in der Herzbergerstufe wird diese Gleichung noch etwas umgeformt:

Da $p^{-1}=-nn'p^1$, kann man schreiben

$$p[nn'(B^3-A^3)-L^2(A+pL)]=0, \tag{9, 15}$$

und da $p^2=pq$ ist, kann das einzige innerhalb der Klammer stehende p durch q ersetzt werden, und da die Klammer dann von p unabhängig dargestellt ist, muß sie verschwinden. Also ist

$$nn'(B^3-A^3)=L^2(A+qL) \tag{9, 16}$$

eine andere Form für (D_2).

Im folgenden wird die Äquivalenz von (D_3) und $S_H=0$ bewiesen.

(D_3) heißt formal geschrieben, wenn man $p^{-1}(A^2B^3-A^2B^3)=0$ addiert,

$$\begin{aligned} p^{-1}\{&C^5-A^2B^3+B^3(A^2-A^2-2ApL-p^2L^2)\\ &+(A+pL)^3[-2A^2+3A(A+pL)-(A+pL)^2]\}=0 \end{aligned}$$

oder, da die Glieder innerhalb der geschweiften Klammer, die den Faktor p^1 enthalten, wegen $p^0=0$ weggelassen werden können,

$$p^{-1}[C^5-A^2B^3-p^2L^2B^3+Lp(A+pL)^3(A-pL)]=0$$

oder, wenn man die inneren Klammern ausmultipliziert und wieder $p^0=0$ beachtet:

$$p^{-1}(C^5-A^2B^3)-pL^2(B^3-A^3)+pL^2(A^3-2p^2L^2A-p^3L^3)=0. \tag{9, 17}$$

$S_H=0$ heißt, weil der dritte Summand in (6, 2) wegen (D_2) verschwindet:

$$N^5-N'^5+L\left(\frac{M^3}{n's'}-\frac{M'^3}{ns}\right)=0.$$

Wegen (3, 11), (3, 10) und (9, 1) folgt:

$$(C^5-A^2B^3)E_{-10}+L[LA^2E_{11}-nn'(B^3-A^3)E_{21}]=0$$

und wenn man (9, 16) benutzt und formal schreibt:

$$p^{-1}(C^5-A^2B^3)+L^2[A^2p(A+pL)-L(A+qL)p^2(A+pL)]=0$$

oder

$$p^{-1}(C^5-A^2B^3)+pL^2(A+pL)(A^2-ApL-p^2L^2)-(nn')^{-1}pL^4(A+pL)=0.$$

(Bei der letzten Umformung wurde (9, 11) benutzt.)

Multipliziert man die Klammern im mittleren Gliede aus und stellt dieses Glied an den Schluß, so hat man:

$$p^{-1}(C^5-A^2B^3)-(nn')^{-1}pL^4(A+pL)+pL^2(A^3-2p^2L^2A-p^3L^3)=0,$$

und das ist mit (9, 17) identisch, denn auch die beiden mittleren Glieder stimmen nach (9, 15) überein.

Literaturverzeichnis.

1. *D. Argentieri*, Ottica Industriale, Milano 1942.
2. *C. Carathéodory*, Geometrische Optik, Ergebnisse der Mathematik **4**, Berlin 1937.
3. — —, Elementare Theorie des Spiegelteleskops von *B. Schmidt*, Hamburger Mathematische Einzelschriften **28** (1940).
4. — —, Das parabolische Spiegelteleskop, Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich **85** (1940), 105—120.
5. *C. W. Crockett*, The parabolic mirror, Astrophysical Journal **7** (1898), 362—366.
6. *Czapski-Eppenstein*, Grundzüge der Theorie der optischen Instrumente (Dritte Auflage), Leipzig 1924.
7. *M. P. Fatou*, Sur les généralisations de la condition des sinus. Bulletin Astronomique **30** (1913), 242—249.
8. — —, Sur l'aberration sphérique des lentilles épaisses. Bulletin Astronomique **34** (1917), 67—74.
9. *C. F. Gauss*, Dioptrische Untersuchungen, Werke **5**, p. 243—276.
10. *M. Herzberger*, Strahlenoptik. Berlin 1931.
11. — —, Über die Durchrechnung von Strahlen durch optische Systeme. Z. Physik **43** (1927).
12. — —, Theory of images errors of the fifth order in rotationally symmetrical systems. J. Opt. Soc. Amer. **27** (1939), 395ff.
13. *A. Kerber*, Neue Durchrechnungsformeln für windschiefe Strahlen, Z. Instrumentenkde. **33** (1913) 75—84.
14. — —, Beiträge zur allgemeinen Fehlertheorie. Z. Instrumentenkde. **34** (1914) 173—179 und 234—240.
15. *A. Kohlschütter*, Die Bildfehler fünfter Ordnung optischer Systeme abgeleitet auf Grund des Eikonalbegriffes nebst Anwendung auf ein astrophotographisches Objektiv. Diss. Göttingen 1908.
16. *M. Linnemann*, Über nicht-sphärische Objektive. Diss. Göttingen 1905.
17. *J. Petzval*, Bericht über optische Untersuchungen. Wien. S.-Ber. **24** (1857) 50—76, 92—106 und 129—145; **26** (1857) 33—90.
18. *H. C. Plummer*, On the images formed by a parabolic mirror. Monthly Notices of the Royal Astron. Soc. **62** (1902), 352—369.
19. *K. Schwarzschild*, Untersuchungen zur geometrischen Optik, I, II, III. Astronomische Mitteilungen der Königl. Sternwarte zu Göttingen, neunter, zehnter, elfter Teil (1905).
20. *L. Seidel*, Zur Theorie der Fernrohrobjektive, Astron. Nachrichten **35** (1853), 301—316.
21. — —, Zur Dioptrik, Astron. Nachr. **37** (1853), 105—120; **43** (1856), 289—332.
22. *A. Sonnefeld*, Zwölf oder neun Fehler fünfter Ordnung bei Linsenfolgen mit Rotationsflächen, die zu einer Achse symmetrisch liegen. Z. Instrumentenkde. **41** (1921), 259—261.
23. *F. Thiersch*, Die Reflexion eines Parallelstrahlenbündels am Paraboloid, Abhandl. der Kaiserl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher Halle **150**, Nr. 1 (1914).

Eingegangen am 13. Januar 1944.

Über die Anzahl der Elemente von Summenmengen.

Von *Hans-Heinrich Ostmann* in Marburg.

§ 1. Einleitung.

Die additive Zahlentheorie ist in der ersten Hälfte dieses Jahrzehnts durch die Lösung des sogenannten Dichtenproblems wesentlich bereichert worden. Zunächst gelang Herrn Mann[1]) die allgemeine Lösung dieses Problems in seiner engeren Fassung, d. h. in der Form

$$\gamma \geqq \operatorname{Min}(1, \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k), \ \gamma = \delta(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \cdots + \mathfrak{A}_k), \ \delta(\mathfrak{A}_\varkappa) = \alpha_\varkappa, \ \varkappa = 1, 2, \ldots, k,$$

wobei für den Fall $k = 2$ sogar gleich die erweiterte Fassung des Dichtenproblems, wie sie vom Verfasser[2]) aufgestellt war, gelöst wird, nämlich

$$\gamma \geqq \sigma, \tag{1}$$

wenn

$$\sigma = \operatorname{Min}\left(1, \operatorname*{fin}_{n=\overline{1,2,\ldots}} \frac{A(n) + B(n)}{n}\right), \ \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}, \ \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{B},$$

gesetzt wird. Setzt man ferner $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, $\mathfrak{D} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}' = \mathfrak{B} + \mathfrak{D}$, $\gamma' = \delta(\mathfrak{C}')$, so gilt offenbar auch

$$\gamma' \geqq \sigma.$$

Den weiteren Fortschritt erzielte Herr Dyson[3]), indem er (1) auch für den Fall $k > 2$ allgemein bewies, wenn jetzt unter σ der Ausdruck

$$\sigma = \operatorname{Min}\left(1, \operatorname*{fin}_{n=\overline{1,2,\ldots}} \frac{A_1(n) + A_2(n) + \cdots + A_k(n)}{n}\right), \quad k \geqq 2, \tag{2}$$

verstanden wird. Die Lösung des Dichtenproblems läßt sich also zusammenfassen in dem folgenden

Satz von Mann-Dyson. *Sind* $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_k$ *Mengen nichtnegativer ganzer Zahlen, die sämtlich die Null als Element enthalten sollen, und bezeichnet*

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \cdots + \mathfrak{A}_k$$

ihre Summenmenge, d. h. die Menge aller Elemente der Form $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$, $a_\varkappa \in \mathfrak{A}_\varkappa$,

---

[1]) H. B. Mann, A proof of the fundamental theorem on the density of sums of sets of positive integers, Ann. Math. Princeton (2) **43**, 523—527 (1942).

[2]) H.-H. Ostmann, Über die Dichte der Summe zweier Zahlenmengen, Dtsch. Math. **5**, 177—212 (1940), im folgenden mit [1] zitiert; Beweis einer Vermutung über die asymptotische Dichte und Verschärfung einer Abschätzung über die Dichte der Summe zweier Zahlenmengen, Dtsch. Math. **6**, 213—247 (1941), kurz mit [2] gekennzeichnet.

[3]) F. J. Dyson, A theorem on the densities of sets of integers, J. London math. Soc. **20**, 8—14 (1945).

$\varkappa = 1, 2, \ldots, k$, *so ergibt sich für die Dichte von* $\mathfrak{C}$ *stets*[4])

$$\gamma \geqq \sigma.$$

Zuvor lagen im Hinblick auf diesen Satz nur eine Reihe von Teilergebnissen und schwächeren Abschätzungsformeln vor. Daneben war aber auch versucht worden, unmittelbare Abschätzungen für die Anzahlfunktion $C(n)$ der Summenmenge $\mathfrak{C}$ zu geben. Dies hat den Vorteil, daß man für spezielle Werte von n durchaus bessere Approximationen für $C(n)$ erhalten kann, als sie durch den Mann-Dysonschen Satz allgemein geliefert werden können, der ja lediglich

$$C(n) \geqq \gamma n$$

abzuschätzen gestattet. Eine solche Formel gab beispielsweise Herr Scherk[5]). Ebenfalls waren solche Formeln, ohne daß jedoch das Gewicht darauf gelegt worden war, vom Verfasser in [2] im Rahmen einzelner Beweisgänge mit hergeleitet worden. Im § 2 soll nun aus den seinerzeitigen Ergebnissen des Verfassers das Resultat von Herrn Scherk, jedoch in verschärfter Form, neu bewiesen werden. Zur Verwendung gelangt aus [2] in der Hauptsache § 3, I.

Unabhängig von dem eben Erwähnten möchte ich diese Gelegenheit benutzen, in § 3 der Vollständigkeit halber noch ein allgemein konstruiertes Beispiel anzugeben, um den Beweis einer in [2], S. 219, Fußnote, ausgesprochenen Behauptung nachzutragen, nämlich, daß es stets wenigstens ein Mengenpaar $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ gibt so, daß

$$\gamma_v = \gamma = \sigma_v = \sigma = \alpha + \beta$$

ausfällt, wenn α und β nicht beide rational sind. Hierbei mögen α, β, γ die Dichten von $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ bezeichnen:

$$\alpha = \underset{n=\overline{1,2,\ldots}}{\mathrm{fin}} \frac{A(n)}{n}, \quad \beta = \underset{n=\overline{1,2,\ldots}}{\mathrm{fin}} \frac{B(n)}{n}, \quad \gamma = \underset{n=\overline{1,2,\ldots}}{\mathrm{fin}} \frac{C(n)}{n},$$

ferner $\alpha_v, \beta_v, \gamma_v$ die *variierten Dichten:*

$$\alpha_v = \underset{n=\overline{0,1,\ldots}}{\mathrm{fin}} \frac{A(-1,n)}{n+1}, \quad \beta_v = \underset{n=\overline{0,1,\ldots}}{\mathrm{fin}} \frac{B(-1,n)}{n+1}, \quad \gamma_v = \underset{n=\overline{0,1,\ldots}}{\mathrm{fin}} \frac{C(-1,n)}{n+1}\ ^{6)},$$

und schließlich sei noch

$$\sigma = \mathrm{Min}\left(1, \underset{n=\overline{1,2,\ldots}}{\mathrm{fin}} \frac{A(n)+B(n)}{n}\right), \quad \sigma_v = \underset{n=\overline{0,1,\ldots}}{\mathrm{fin}} \frac{A(n)+B(n)+1}{n+1}$$
$$= \underset{n=\overline{0,1,\ldots}}{\mathrm{fin}} \frac{A(-1,n)+B(-1,n)-1}{n+1}.$$

In [2], § 2, VI war nur bewiesen worden, daß für jedes $\varepsilon > 0$ stets wenigstens $\gamma_v < \sigma_v + \varepsilon$ bzw. $\gamma < \sigma + \varepsilon = \alpha + \beta + \varepsilon$ erreicht werden kann. Ob im Falle der asymptotischen Dichten bei irrationalem $\sigma^* \left(= \underset{n=\overline{1,2,\ldots}}{\lim} \frac{A(n)+B(n)}{n}\right)$ bezüglich der von mir in [2] herge-

[4]) Wie übrigens in [2] gezeigt, ist der Fall $0 \notin \mathfrak{A}_\varkappa$, $\varkappa = 1, 2, \ldots, k$, sofort auf den Fall $0 \in \mathfrak{A}_\varkappa$, $\varkappa = 1, 2, \ldots, k$, zurückführbar, so daß die im folgenden eingeführten „variierten Dichten" nur für den letzteren Fall definiert werden.

[5]) P. Scherk, Two estimates connected with the (α, β)-hypothesis, Ann. Math. Princeton (2) **42**, 538—546 (1941), wobei hier die erste der beiden dort bewiesenen Formeln gemeint ist.

[6]) Vgl. Fußnote [4]). Ferner ist in Abänderung der in [1] und [2] verwendeten Bezeichnungsweise das jetzt übliche $M(-1, n)$ an Stelle von $M(0, n)$ geschrieben worden. Dasselbe gilt natürlich auch für die analogen Symbole. Ferner bedeute $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}$ den Durchschnitt, $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{N}$ die Vereinigungsmenge der Mengen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ (in [1] und [2] mit $\mathfrak{M}\,\mathfrak{N}$ bzw. $\mathfrak{M} \dot{+} \mathfrak{N}$ bezeichnet).

leiteten Abschätzungsformel auch das Gleichheitszeichen eintreten kann, habe ich bisher noch nicht entscheiden können. Ich vermute, daß es nicht der Fall ist, sondern, daß dann stets

$$\gamma^* > \frac{j}{j+1}\sigma^* \qquad (\sigma^* \text{ irrational})^{7})$$

gilt.

§ 2. Der Satz von Scherk.

I. Herr Scherk beweist den folgenden Satz:

Es seien die Intervalle $[g_i, k_i]$[8]), $i = 0, 1, 2, \ldots$, *dadurch erklärt, daß*

$$[g_i + 1, k_i] \subseteq \mathfrak{C}, \quad [k_i + 1, g_{i+1}] \cap \mathfrak{C} = 0, \quad g_0 = -1, \quad k_i \geq g_i + 1,$$

ist. Wenn dann für ein $n \in [k_i, g_{i+1}]$

$$C(n) < A(n) + B(n)$$

ausfällt, so existiert eine ganze Zahl e *mit* $1 \leq e + 1 \leq k_i$ *und* $e + 1 \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ *so, daß*

$$C(n) \geq A(e) + B(e) + A(n - e - 1) + B(n - e - 1) - i + 2$$

ist oder etwas anders geschrieben

$$\begin{aligned} C(-1, n) \geq A(-1, e) + B(-1, e) + A(-1, n - e - 1) \\ + B(-1, n - e - 1) - (i + 1), \end{aligned} \tag{3}$$

wobei also i *die Anzahl der in* $[0, n - 1]$ *vollständig enthaltenen Intervalle* $[k_\varrho, g_{\varrho+1}]$, *d. h. also ausschließlich* $[k_i, g_{i+1}]$ *bedeutet.*

Hierbei scheint mir eine mehr als existenzmäßige Aussage für e dem Beweisgang nicht zu entnehmen zu sein. Auch gestattet (3) meines Erachtens nach keinen Übergang zu einer Beziehung zwischen den Dichten selbst. Beide Nachteile können, wie die folgenden Überlegungen zeigen werden, beseitigt werden, wobei der Übergang zu einer Dichtenabschätzung zwar nur die Formeln aus [2] liefert, also angesichts des Mann-Dysonschen Satzes uninteressant ist, jedoch kann in Spezialfällen durch einen solchen Übergang durchaus mehr erzielt werden als $\gamma \geq \sigma$.

II. Ich knüpfe an Gleichung (36) aus [2], § 3, I an: Für $\nu = k$ ergibt sich dann

$$[z_k, z_k + \bar{z}_k] \cap (\mathfrak{G}_k + \mathfrak{H}_k) \subseteq \mathfrak{C}' \subseteq \mathfrak{C},$$

wobei wieder $\mathfrak{C}' = \mathfrak{B} + \mathfrak{D}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, $\mathfrak{D} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ gesetzt ist. Indem man berücksichtigt, daß z_k das kleinste Element von $\mathfrak{G}_k$, ferner $\mathfrak{H}_k \subseteq [0, \bar{z}_k]$ ist, erhält man

$$[z_k, z_k + \bar{z}_k] \cap (\{z_k\} + \mathfrak{H}_k) = (\{z_k\} + \mathfrak{H}_k) \subseteq \mathfrak{C}' \cap [z_k, z_k + \bar{z}_k], \quad k \geq 1,$$

und, wenn $k \geq 2$ ist,

$$\begin{aligned} \{z_k\} + (\mathfrak{H}_k \cap [z_{k-1}, \bar{z}_k]) \subseteq \mathfrak{C}' \cap [z_k + z_{k-1}, z_k + z_k] = \mathfrak{C}' \cap (\{z_k\} + [z_{k-1}, \bar{z}_k]) \\ = \mathfrak{C}' \cap \big(\{z_k\} + (\mathfrak{Z}_{k-1} \vee \mathfrak{Z}_k)\big) = \big(\mathfrak{C}' \cap (\{z_k\} + \mathfrak{Z}_{k-1})\big) \vee \big(\mathfrak{C}' \cap (\{z_k\} + \mathfrak{Z}_k)\big). \end{aligned}$$

Hierbei sind die beiden zu vereinigenden Terme offenbar elementefremd.

---

[7]) j ist die kleinste ganze Zahl, für die die Funktion

$$J(n) = A(a - 1, a + n) + B(b - 1, b + n) - n - 2 = -1$$

ist; a, b sind dabei jeweils die kleinsten Elemente von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$. Falls $0 \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ ist, so ist $J(n) = A(n) + B(n) - n$. Läßt sich durch Weglassen von nicht notwendig gleich langen Anfangsstücken der Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ erreichen, daß das Restmengenpaar ein größeres j hat, so darf ohne weiteres dieses j eingesetzt werden (vgl. [2], § 2, I, Satz 3).

[8]) $[a, b]$, a, b ganz, bezeichne die Menge $\{a, a + 1, \ldots, b - 1, b\}$.

1. Fall. $n \in \{z_k\} + \mathfrak{Z}_{k-1}$, $k \geq 2$. Man schreibe n in der Form $n = z_k + (n - z_k)$. Dann ist

$$C'(z_k + z_{k-1} - 1,\ z_k + n - z_k) \geq H_k(z_{k-1} - 1,\ n - z_k)$$

und, da ja

$$H_\varkappa(\mathfrak{Z}_\varkappa) = H_{\varkappa+\lambda}(\mathfrak{Z}_\varkappa) - G_\varkappa(\mathfrak{Z}_\varkappa),\ \varkappa = 1, 2, \ldots;\quad \lambda > 0 \text{ und ganz,}$$

ist, wobei

$$G_\varkappa(-1, 0) = \begin{cases} 0, & \varkappa \geq 2 \\ 1, & \varkappa = 1 \end{cases}$$

ist, ergibt sich, wenn man noch $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \vee \mathfrak{G}_2 \vee \ldots \vee \mathfrak{G}_k \vee \ldots$ setzt,

$$\begin{aligned} C'(-1, n) &= C'(z_k + z_{k-1} - 1, n) + \sum_{\varkappa=2}^{k-1} C'(\{z_\varkappa\} + \mathfrak{Z}_{\varkappa-1}) + \sum_{\varkappa=1}^{k-1} C'(\{z_\varkappa\} + \mathfrak{Z}_\varkappa) \\ &\geq H_k(z_{k-1} - 1, n - z_k) + \sum_{\varkappa=2}^{k-1} H_\varkappa(\mathfrak{Z}_{\varkappa-1}) + \sum_{\varkappa=1}^{k-1} H_\varkappa(\mathfrak{Z}_\varkappa) \\ &= H_k(-1, n - z_k) + \sum_{\varkappa=1}^{k-1} H_\varkappa(\mathfrak{Z}_\varkappa) = H_k(-1, n - z_k) + H_k(-1, \bar{z}_{k-1}) - \sum_{\varkappa=1}^{k-1} G_\varkappa(\mathfrak{Z}_\varkappa) \end{aligned}$$

$$(4) \qquad C'(-1, n) \geq H_k(-1, n - z_k) + H_k(-1, \bar{z}_{k-1}) - G(-1, \bar{z}_{k-1}).$$

Formel (4) ist in diesem Fall in ihrem Kern die Scherksche Formel. Spezialisiert man nämlich entsprechend den Voraussetzungen von Herrn Scherk n auf die $n \notin \mathfrak{C}'$ — dies sind, wenn man zunächst noch von $n = k_i$ absieht, mehr zulässige n als bei Herrn Scherk —, so ergibt sich, da ja dann $n - z_k \notin \mathfrak{H}_k$ gelten muß (vgl. [2], § 3, I, Hilfssatz 1ff.), also $n - z_k$ gleich einem $\mathfrak{J}$-Intervallanfang $> j_2$ ist,

$$\begin{aligned} H_k(-1,\ n - z_k) &= n - z_k + 1 - J\,W(j_2,\ n - z_k)^{9)} = A(-1, n - z_k) + B(-1, n - z_k) \\ &\quad - J(n - z_k) - 1 - J\,W(j_2, n - z_k) = A(-1, n - z_k) + B(-1, n - z_k). \end{aligned}$$

Da diese letzte Formel auch für $n = z_k + \bar{z}_{k-1}$ gilt, ergibt sich

$$H_k(-1, \bar{z}_{k-1}) = A(-1, \bar{z}_{k-1}) + B(-1, \bar{z}_{k-1}),$$

also

$$\begin{aligned} (5) \qquad C'(-1, n) &\geq A(-1, z_{k-1}) + B(-1, z_{k-1}) + A(-1, n - z_k) \\ &\quad + B(-1, n - z_k) - G(-1, \bar{z}_{k-1}). \end{aligned}$$

2. Fall. $n \in \{z_k\} + \mathfrak{Z}_k$, $k \geq 1$. Jetzt ist analog

$$\begin{aligned} C'(-1, n) &= C'(z_k + z_k - 1, n) + \sum_{\varkappa=2}^{k} C'(\{z_\varkappa\} + \mathfrak{Z}_{\varkappa-1}) + \sum_{\varkappa=1}^{k-1} C'(\{z_\varkappa\} + \mathfrak{Z}_\varkappa) \\ &\geq H_k(z_k - 1, n - z_k) + H_k(-1, \bar{z}_{k-1}) + H_k(-1, \bar{z}_{k-1}) - \sum_{\varkappa=1}^{k-1} G_\varkappa(\mathfrak{Z}_\varkappa) \\ &= H_{k+1}(z_k - 1, n - z_k) - G_k(z_k - 1, n - z_k) + 2H_{k+1}(-1, \bar{z}_{k-1}) - \sum_{\varkappa=1}^{k-1} G_\varkappa(\mathfrak{Z}_\varkappa)^{10)} \end{aligned}$$

$$(4') \qquad C'(-1, n) \geq H_{k+1}(-1, n - z_k) + H_{k+1}(-1, \bar{z}_{k-1}) - G(-1, n - z_k),$$

so daß für die $n \notin \mathfrak{C}'$ wie beim ersten Fall analog (5)

$$\begin{aligned} (5') \qquad C'(-1, n) &\geq A(-1, \bar{z}_{k-1}) + B(-1, \bar{z}_{k-1}) + A(-1, n - z_k) \\ &\quad + B(-1, n - z_k) - G(-1, n - z_k) \end{aligned}$$

---

[9]) Man beachte, daß j_2 als J-Intervallanfang bei $J\,W(j_2, n - z_k)$ nicht mitgezählt wird und daß nach [2], § 3, I, Hilfssatz 1ff. $[0, j_2]$ ein GML-Intervall in $\mathfrak{Z}_1$ ist. Außerdem sei an die in Fußnote [7]), gegebene Definition von $J(n)$ erinnert.

[10]) Sollte $\mathfrak{H}_{k+1}$ nicht mehr existieren, so verstehe man der Einfachheit halber für den Augenblick unter $\mathfrak{H}_{k+1}$ die Menge, die aus $\mathfrak{H}_k$ durch Hinzufügen der Endelemente von GML-Intervallen in $\mathfrak{Z}_k$ entsteht.

gilt. (5) bzw. (5′) gestatten nun, entsprechend Gl. (41) in [2], S. 243 in leicht ersichtlicher Weise den Übergang zu den dortigen Dichtenabschätzungen $\gamma_v \geq \frac{j}{j+1}\,\sigma_v$ usw.

Da nun weiter zwischen zwei GML-Intervallanfängen stets mindestens ein Element aus $\overline{\mathfrak{B}}$ liegt, z. B. stets das Endelement des ersteren der beiden GML-Intervalle, so sind ja, wenn etwa $\bar{j}_{\lambda\mu}$ ein solches Endelement beispielsweise in $\mathfrak{Z}_\varkappa$ ist, die Elemente von $\overline{\mathfrak{C}}$ zum Teil auch unter den $z_\varkappa + \bar{j}_{\lambda\mu}$ zu suchen (vgl. [2], § 3, I, Hilfssatz 1ff.). Jedem $z_\varkappa + \bar{j}_{\lambda\mu} \in \overline{\mathfrak{C}}'$ (oder $\overline{\mathfrak{C}}$) entspricht nun offensichtlich mit nicht mehrdeutiger Umkehrung ein Scherksches Intervall $[k_\varrho, g_{\varrho+1}]$. Sind nun alle diese Elemente in $\overline{\mathfrak{C}}'$ (bzw. $\overline{\mathfrak{C}}$) enthalten, so ist in (5) bzw. (5′), wobei für den Subtrahenden jeweils kurz G geschrieben werden möge,

$$G \leq i + 1^{11}).$$

Andrerseits kann für jedes $z_\varkappa + \bar{j}_{\lambda\mu} \in \mathfrak{C}'$ (bzw. $\mathfrak{C}$) offenbar G in (5) bzw. (5′) um die Anzahl λ dieser Elemente verkleinert werden. Offensichtlich gilt dann auch

$$G - \lambda \leq i + 1.$$

Setzt man schließlich $\bar{z}_{k-1} = e$, also $z_k = e + 1$, so gehen (5) bzw. (5′) wegen $z_k \in \mathfrak{D} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$[12]) sofort in (3) über; denn die weitere Bedingung $e + 1 \leq k_i$ ist wegen $n > z_k = e + 1 \in \mathfrak{D} \subseteqq \mathfrak{C}' \subseteqq \mathfrak{C}$ trivial. Im Falle $k > 1$ ist dann auch $0 < z_k = e + 1$. Ist $k = 1$, so wäre zunächst nur $e + 1 = z_1 = 0$. Um jetzt zu (3) zu gelangen, muß die von Herrn Scherk gemachte einschränkende Voraussetzung hinsichtlich der zulässigen n, nämlich $C(n) < A(n) + B(n)$ herangezogen werden. Ist daher etwa g_2^* der zweite in $\mathfrak{Z}_1$ gelegene GML-Intervallanfang, so gilt

$$C(n)\begin{cases} = n \text{ in } [0, j_2 - 1], \\ \geq A(n) + \bar{B}(n) \text{ in } [j_2, g_2^* - 1] \text{ bzw. in } [j_2, \bar{z}_1], \text{ wenn } g_2^* \text{ nicht mehr existiert} \end{cases}$$

und $n \in \overline{\mathfrak{C}}'$ (bzw. $\overline{\mathfrak{C}}$) ist, so daß diese n außer acht bleiben müssen[13]).

Indem man jetzt n auf die $n > g_2^*$ spezialisiert, erhält man wieder leicht (3), wenn $e = g_2^* - 1$, also $0 < e + 1 = g_2^* \in \mathfrak{D}$ gesetzt wird. Man braucht in der obigen Herleitung von (5) bzw. (5′) nämlich nur analog dem Fall 1 mit $k = 2$ vorzugehen mit der einzigen Abänderung, daß z_2 jetzt durch g_2^* zu ersetzen ist. Schließlich ist noch sofort zu sehen, daß (5) bzw. (5′) auch für $n = k_i$ entsprechend der Behauptung des Scherkschen Satzes gilt, da $[k_i, n] \cap \mathfrak{C}'$ (bzw. $[k_i, n] \cap \mathfrak{C}$) $= \{k_i\}$ ist; denn dann bleibt erstens e wegen $n \geq k_i > \bar{z}_{k-1} = e$ unverändert, zweitens ist offenbar $C'(-1, n) = C'(-1, k_i)$; ferner ist in (5′) auch $G(-1, n - z_k) = G(-1, k_i - z_k)$, da andernfalls für ein $g^* \in \mathfrak{G} \cap [k_i - z_k + 1, n - z_k]$ sofort $z_k + g^* \in \mathfrak{C}'$ folgt, was wegen

$$k_i = z_k + k_i - z_k < z_k + g^* \leq z_k + n - z_k = n$$

unmöglich ist; $G(-1, \bar{z}_{k-1})$ in (5) bleibt ohnehin konstant. Aus dem gleichen Grund wie bei $G(-1, n - z_k)$ ist auch

$$A(-1, n - z_k) = A(-1, k_i - z_k) \quad \text{und} \quad B(-1, n - z_k) = B(-1, k_i - z_k).$$

---

[11]) Man beachte, daß die Anzahl i dasjenige Intervall, in dem n liegt, nicht mitzählt (vgl. (3)f.), G jedoch unter Umständen dieses Intervall mitzählt.

[12]) Jedes z_k ist auch ein *GML*-Intervallanfang, also Element von $\mathfrak{D}$.

[13]) Durch die Forderung $C(n) < A(n) + B(n)$ werden nämlich diese n offensichtlich ausgeschlossen. Weitere Werte von n, die noch etwa von der Forderung betroffen werden sollten, brauchen jedoch auch jetzt nicht ausgeschlossen zu werden, wie obige Betrachtungen zeigen werden. Damit ist dann die Bedeutung der einschränkenden Voraussetzung genau umrissen.

Bemerkung. Überhaupt läßt sich der Bereich der zulässigen n noch vergrößern, nämlich auf alle diejenigen n, für die die Umrechnung

$$H_{k+1}(-1, n-z_k) = A(-1, n-z_k) + B(-1, n-z_k)$$

gilt. Eine genaue Präzisierung dieser n kann mit den in [1] und [2] eingeführten Begriffen leicht gegegeben werden: Nämlich alle diejenigen n sind zulässig, für die $n - z_k \notin [\bar{j}_{\lambda\mu}, \bar{j}_{\lambda\mu} - 1]$ ist, wenn $[\bar{j}_{\lambda\mu}, \bar{j}_{\lambda\mu}]$ lediglich ein Hauptunterintervall bedeutet.

Zusammenfassend ergibt sich die folgende Verschärfung gegenüber (3): $i+1$ läßt sich durch die im allgemeinen kleinere Größe $G - \lambda$ ersetzen, e kann aus der Struktur von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ genau fixiert werden durch $e = \bar{z}_{k-1}$; auf die Voraussetzung $C(n) < A(n) + B(n)$ kann für alle $n \geq g_2^*$ bzw. $n \geq z_2$ verzichtet werden und unter Zulassung von $e = -1$ sogar überhaupt; die Forderung $n \in [k_i, g_{i+1}]$ kann durch die in der vorangehenden Bemerkung gemachte Abgrenzung der zulässigen n abgeschwächt werden und, wenn man (5) bzw. (5′) durch die noch allgemeineren Formeln (4) bzw. (4′) ersetzt, überdies ganz unberücksichtigt bleiben, da (4) und (4′) für alle n gelten. Die Beziehung zur Formel von Herrn Scherk ist damit hergestellt. Die oben eingeführte Größe λ diente lediglich dazu, Herrn Scherks Formel in Evidenz zu setzen, ist aber selbst vermittels obiger Betrachtungen nicht greifbar, so daß die Mitberücksichtigung von λ bei Anwendungen der Abschätzungen im allgemeinen nichts Verschärfendes liefern wird. Beachtet man noch, daß in (4) ohne weiteres H_k durch H_{k+1} ersetzt werden kann mit der gleichen Verabredung, daß, falls $\mathfrak{H}_{k+1}$ nicht mehr existieren sollte, $\mathfrak{H}_{k+1}$ die Menge bedeuten möge, die aus $\mathfrak{H}_k$ durch Hinzufügung aller Endelemente von GML-Intervallen aus $\mathfrak{Z}_k$ entsteht, so lassen sich bei Außerachtlassung der Beziehungen zur Scherkschen Formel obige Betrachtungen zusammenfassen zu dem folgenden

Satz. *Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei beliebige Mengen nichtnegativer ganzer Zahlen, $0 \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$*[14]*, so gilt für die Anzahlfunktion ihrer Summe $\mathfrak{C}$ und für jedes $n \geq 0$*

$$C(-1, n) \geq C'(-1, n) \geq H_{k+1}(-1, n-z_k) + H_{k+1}(-1, \bar{z}_{k-1}) - \begin{cases} G(-1, \bar{z}_{k-1}), & n \in \{z_k\} + \mathfrak{Z}_{k-1} \\ G(-1, n-z_k), & n \in \{z_k\} + \mathfrak{Z}_k \end{cases}$$

$$(6_1) \qquad \geq H_{k+1}(-1, n-z_k) + H_{k+1}(-1, \bar{z}_{k-1}) - G(-1, n)$$

bzw.

$$C(n) \geq C'(n) \geq H_{k+1}(n-z_k) + H_{k+1}(\bar{z}_{k-1}) - \begin{cases} G(\bar{z}_{k-1}) \\ G(n-z_k) \end{cases}$$

$$(6_2) \qquad \geq H_{k+1}(n-z_k) + H_{k+1}(\bar{z}_{k-1}) - G(n), \; n - z_k \in \mathfrak{Z}_{k-1} \vee \mathfrak{Z}_k.$$

Es ist natürlich ein leichtes, Beispiele zu konstruieren, in denen (6_1) bzw. (6_2) bessere Werte für viele n liefern als $C(n) \geq \gamma n$. Man braucht dazu ja nur σ irgendwo im endlichen seinen Wert annehmen zu lassen, und hinter dieser Stelle $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ mit genügend vielen Elementen zu versehen oder nur $G(n)$ nicht zu stark anwachsen zu lassen.

§ 3. Konstruktion eines Mengenpaares $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ mit $\gamma_v = \gamma = \sigma_v = \sigma = \alpha + \beta$, wenn nicht beide Dichten α, β rational sind.

Da nicht beide Dichten rational sein sollen, also mindestens eine Dichte mit der asymptotischen Dichte zusammenfällt, mögen von vornherein beide Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ so konstruiert werden, daß $\alpha = \alpha^*$, $\beta = \beta^*$, $\sigma = \sigma^* = \alpha^* + \beta^*$ ausfallen; wegen $\sigma^* \geq \sigma_v \geq \sigma$ ist dann auch $\sigma = \sigma_v = \sigma^*$; analog fallen die variierten Dichten mit den

[14]) Vgl. Fußnote 4).

gewöhnlichen zusammen: $\alpha_v = \alpha$, $\beta_v = \beta$, so daß die Fälle σ und σ_v nicht gesondert betrachtet zu werden brauchen. Gegeben seien also $\alpha > 0$ und $\beta > 0$ mit $\alpha + \beta < 1$. Ist etwa $\alpha = 0$, so erfüllen $\mathfrak{A} = \{0\}$ und jedes $\mathfrak{B}$ mit $\delta(\mathfrak{B}) = \beta$ wegen $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}$ alles Verlangte.

Nunmehr seien ϱ_n und τ_n, $n = 1, 2, \ldots$, zwei Folgen rationaler Zahlen mit

$$(6) \qquad \begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \varrho_n = \alpha, \ \varrho_n \geq \alpha, \\ &\lim_{n\to\infty} \tau_n = \beta, \ \tau_n \geq \beta, \end{aligned} \qquad \varrho_n + \tau_n < 1;$$

man setze ϱ_n und τ_n nach folgender Vorschrift in Quotientenform an:

$$\varrho_1 = \frac{p_{11} - 1}{q_1 - 1}, \quad p_{11} \geq 2,$$

$$\tau_1 = \frac{p_{21} - 1}{q_1 - 1}, \quad p_{21} \geq 2;$$

jetzt bilde man rekursiv weiter, wobei noch abkürzend

$$z_1 = 0, \ z_2 = q_1, \ z_3 = q_1 + q_2, \ \ldots, \ z_n = q_1 + q_2 + \cdots + q_{n-1}$$

gesetzt werden möge: Man wähle

$$(7) \qquad q_n \geq \operatorname{Max}\left(\frac{z_n}{1 - \varrho_n - \tau_n}, \frac{z_n + 1}{\operatorname{Max}(\varrho_n, \tau_n)}, \ 2^n(z_1 + z_2 + \cdots + z_n) - z_n\right)$$

so, daß zugleich

$$\varrho_n = \frac{p_{1n}}{q_n} \text{ und } \tau_n = \frac{p_{2n}}{q_n}, \ p_{in} \geq p_{i,n-1}, \ i = 1 \text{ oder } 2, \ n \geq 2,$$

ist, was sich durch geeignetes Erweitern sofort erreichen läßt. Schließlich werde noch

$$z_{n+1} = z_n + q_n = \sum_{\nu=1}^{n} q_\nu$$

gesetzt. $z_1, z_2, \ldots$ werden dabei natürlich dieselbe Bedeutung wie im § 1 erhalten. Nach [2], § 2, I, Satz 3 und [2], § 3, I, Bemerkung 3 ist damit von vornherein schon $\gamma^* \geq \sigma^*$ sichergestellt. Will man also bei den asymptotischen Dichten im irrationalen Fall $\gamma^* = \frac{j}{j+1}\sigma^*$ erreichen, so genügt es, unter den Mengen mit $\mathfrak{Z}_1 = [0, \infty]$, d. h. $z_1 = 0$, $\bar{z}_1 = \infty$ zu suchen.

$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ mögen nunmehr folgendermaßen konstruiert werden: Es sei

$$\begin{aligned} &\{z_n, z_n + 1, \ldots, z_n + p_{1n} - 1\} \subset \mathfrak{A} \\ &\{z_n, z_n + 1, \ldots, z_n + p_{2n} - 1\} \subset \mathfrak{B} \end{aligned} \quad \text{für alle } n = 1, 2, \ldots.$$

Dann ist offenbar

$$\delta(\mathfrak{A}) = \underset{n=2,3,\ldots}{\underline{\text{fin}}} \frac{A(z_n - 1)}{z_n - 1} = \underset{n=2,3,\ldots}{\underline{\text{fin}}} \frac{\left(\sum_{\nu=1}^{n-1} A(z_\nu - 1, z_{\nu+1} - 1)\right) - 1}{z_n - 1} = \underset{n=2,3,\ldots}{\underline{\text{fin}}} \frac{p_{11} - 1 + \sum_{\nu=2}^{n-1} p_{1\nu}}{q_1 - 1 + \sum_{\nu=2}^{n-1} q_\nu};$$

wie leicht zu sehen, ist nun aber

$$\operatorname{Min}\left(\frac{p_{11} - 1}{q_1 - 1}, \frac{p_{12}}{q_2}, \ldots, \frac{p_{1,n-1}}{q_{n-1}}\right) \leq \frac{p_{11} - 1 + \sum_{\nu=2}^{n-1} p_{1\nu}}{q_1 - 1 + \sum_{\nu=2}^{n-1} q_\nu} \leq \operatorname{Max}\left(\frac{p_{11} - 1}{p_1 - 1}, \frac{p_{12}}{q_2}, \ldots, \frac{p_{1,n-1}}{q_{n-1}}\right),$$

also

$$\delta_v(\mathfrak{A}) \geq \delta(\mathfrak{A}) \geq \underline{\text{fin}}\left(\frac{p_{11} - 1}{q_1 - 1}, \frac{p_{12}}{q_2}, \ldots, \frac{p_{1n}}{q_n}, \ldots\right) \geq \alpha.$$

Weiter bestimme man jetzt zu einem beliebig gegebenen $\varepsilon > 0$ ein $N > 1$ so, daß $\varrho_\nu < \alpha + \varepsilon$ für alle $\nu \geq N$ ausfällt. Dann ist offenbar

$$(8) \qquad \delta^*(\mathfrak{A}) = \lim_{n=\overline{2,3,\ldots}} \frac{p_{11} - 1 + \sum\limits_{\nu=2}^{n-1} p_{1\nu}}{q_1 - 1 + \sum\limits_{\nu=2}^{n-1} q_\nu}$$

$$= \lim_{n=\overline{N,N+1,\ldots}} \frac{\sum\limits_{\nu=N}^{n} p_{1\nu}}{\sum\limits_{\nu=N}^{n} q_\nu} \leq \overline{\lim_{n=N,N+1,\ldots}} \frac{\sum\limits_{\nu=N}^{n} p_{1\nu}}{\sum\limits_{\nu=N}^{n} q_\nu} \leq \alpha + \varepsilon$$

für jedes $\varepsilon > 0$, also

$$\delta(\mathfrak{A}) \leq \delta_v(\mathfrak{A}) \leq \delta^*(\mathfrak{A}) \leq \alpha,$$

wobei sich aus (8) noch

$$(9) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} p_{1\nu}}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} q_\nu} = \alpha$$

mitergibt. Insgesamt hat man somit

$$\delta(\mathfrak{A}) = \delta_v(\mathfrak{A}) = \delta^*(\mathfrak{A}) = \alpha.$$

Analog ergibt sich

$$\delta(\mathfrak{B}) = \delta_v(\mathfrak{B}) = \delta^*(\mathfrak{B}) = \beta,$$

wenn $\mathfrak{B}$ entsprechend gebildet wird wie $\mathfrak{A}$; und schließlich hat man vermittels (9) noch, wie leicht zu sehen,

$$\sigma = \sigma_v = \sigma^* = \alpha + \beta.$$

Nun werde die Summenmenge $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ berechnet. Aus

$$[z_n, z_n + p_{1n} - 1] \subset \mathfrak{A}, \ [z_n, z_n + p_{2n} - 1] \subset \mathfrak{B}, \ n \geq 1,$$

folgt sofort, wenn noch zur Abkürzung $p_{1n} + p_{2n} = p_n$ gesetzt wird,

$$[2z_n, 2z_n + p_n - 2] \subset \mathfrak{C}, \ n \geq 1;$$

da nun aber nach (7)

$$2z_n \leq z_n + \operatorname{Max}(p_{1n}, p_{2n}) - 1, \ n \geq 1,$$

ist, ergibt sich wegen $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C}$ sofort

$$(10) \qquad [z_n, 2z_n + p_n - 2] \subset \mathfrak{C}, \ n = 1, 2, \ldots.$$

Weiter ist nach (7) für $n > 1$

$$\begin{aligned} 2z_n + p_n - 2 &= z_n + q_n + p_n - q_n + z_n - 2 = z_{n+1} - 2 - (q_n - p_n - z_n) \\ &= z_{n+1} - 2 - (q_n - (\varrho_n + \tau_n)\, q_n - z_n) = z_{n+1} - 2 - (q_n(1 - \varrho_n - \tau_n) - z_n) \\ &\leq z_{n+1} - 2 - \left(\frac{z_n}{1 - \varrho_n - \tau_n}(1 - \varrho_n - \tau_n) - z_n\right) = z_{n+1} - 2, \end{aligned}$$

was wegen $p_1 \leq q_1$ auch für $n = 1$ gilt, so daß die einzelnen nach (10) in $\mathfrak{C}$ enthaltenen Intervalle elementefremd sind und überdies noch

$$(11) \qquad z_{n+1} - 1 \notin [z_n, 2z_n + p_n - 2]$$

gilt. Andere Elemente als die in (10) angegebenen enthält aber $\mathfrak{C}$ nicht, da für jedes $n \geq 1$

$$(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \cap [z_n, z_{n+1} - 1] \subset [z_n, 2z_n + p_n - 2]$$

und für jedes $k < n$ ebenfalls

$$[z_k, z_k + p_{\delta_1 k} - 1] + [z_n, z_n + p_{\delta_2 n} - 1] \subset [z_n, 2z_n + p_n - 2],$$

$$\delta_1 = 0 \text{ oder } 1,\ \delta_2 = 0 \text{ oder } 1,\ \delta_1 \neq \delta_2,$$

gilt, letzteres zufolge der vorausgesetzten Monotonität der p_{in}, $i = 1$ oder 2.

Daher ergibt sich aus (11) noch $(z_{n+1} - 1) \notin \mathfrak{C}$, also

$$\delta(\mathfrak{C}) = \underset{n=2,3,\ldots}{\mathrm{fin}} \frac{C(z_n - 1)}{z_n - 1} = \underset{n=2,3,\ldots}{\mathrm{fin}} \frac{p_1 - 2 + \sum\limits_{\nu=2}^{n-1} (z_\nu + p_\nu - 1)}{z_n - 1}$$

$$= \underset{n=2,3,\ldots}{\mathrm{fin}} \frac{p_1 - 2 + \sum\limits_{\nu=2}^{n-1} p_\nu + \sum\limits_{\nu=2}^{n-1} (z_\nu - 1)}{q_1 - 1 + \sum\limits_{\nu=2}^{n-1} q_\nu} \geq \underset{n=2,3,\ldots}{\mathrm{fin}} \frac{p_{11} + p_{12} - 2 + \sum\limits_{\nu=2}^{n-1} p_{1\nu} + \sum\limits_{\nu=2}^{n-1} p_{2\nu}}{q_1 - 1 + \sum\limits_{\nu=2}^{n-1} q_\nu} \geq \alpha + \beta.$$

Andrerseits ist

$$\delta^*(\mathfrak{C}) = \lim_{n=2,3,\ldots} \frac{C(-1, z_n - 1)}{z_n} = \lim_{n=2,3,\ldots} \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n-1} (z_\nu + p_\nu - 1)}{z_n} \leq \lim_{n=2,3,\ldots} \left(\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n-1} z_\nu}{z_n} + \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n-1} p_\nu}{\sum\limits_{\nu=1}^{n-1} q_\nu} \right)$$

$$= \lim_{n=2,3,\ldots} \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n-1} p_\nu}{\sum\limits_{\nu=1}^{n-1} q_\nu},$$

da nach (7)

$$z_n = z_{n-1} + q_{n-1} \geq 2^{n-1} \cdot \sum_{\nu=1}^{n-1} z_\nu,$$

also

$$\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n-1} z_\nu}{z_n} \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \text{ d. h. } \lim_{n \to \infty} \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n-1} z_\nu}{z_n} = 0$$

ist. Vermittels (9) ist daher

$$\delta^*(\mathfrak{C}) \leq \alpha + \beta,$$

also insgesamt

$$\delta(\mathfrak{C}) = \delta_v(\mathfrak{C}) = \delta^*(\mathfrak{C}) = \alpha + \beta = \sigma = \sigma_v = \sigma^*,$$

womit alles bewiesen ist.

Eingegangen 10. Januar 1948.

Zwei Verästelungssätze.

Von *H. Wendelin* in Graz.

Erklärungen. Ein System τ von (nicht notwendig paarweise verschiedenen) mathematischen Objekten $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_{r_0}$, $\mathfrak{M}_{11}, \ldots, \mathfrak{M}_{1r_1}$, $\mathfrak{M}_{21}, \ldots, \mathfrak{M}_{2r_2}, \ldots$, $\mathfrak{M}_{r_0 1}, \ldots, \mathfrak{M}_{r_0 r_{r_0}}, \ldots, \mathfrak{M}_{\lambda_1 \ldots \lambda_\varrho}, \ldots$ mit $\lambda_1 \in \{1, 2, \ldots, r_0\}$ und $\lambda_\varrho \in \{1, 2, \ldots, r_{\lambda_1 \ldots \lambda_{\varrho-1}}\}$ für $\varrho = 2, 3, \text{in inf.}$, wobei $r_0, r_1, \ldots, r_{r_{r_0}} \ldots, r_{\lambda_1 \ldots \lambda_{\varrho-1}}, \ldots$ natürliche Zahlen bedeuten, heiße Objektverästelung. $\mathfrak{M}_{\lambda_1 \ldots \lambda_\varrho}$ heiße Objekt ϱ-ter Stufe; $\mathfrak{M}_{\lambda_1 \ldots \lambda_\varrho}$ werde $= \mathfrak{M}$ gesetzt für $\varrho = 0$. $E(\mathfrak{A})$ bedeute „$\mathfrak{A}$ kommt die Eigenschaft E zu", kurz „$\mathfrak{A}$ ist E-Objekt". Jede abbrechende Folge von E-Objekten $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_{\lambda_1}, \mathfrak{M}_{\lambda_1 \lambda_2}, \ldots, \mathfrak{M}_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_r}$ heiße E-Aststück (der Länge r), jede nicht abbrechende solche Folge — sie werde mit $(\mathfrak{M}_{\lambda_1 \ldots \lambda_r})$ bezeichnet — heiße E-Ast. τ heiße E-rückerblich, wenn gilt: „Für alle $\mathfrak{M}_{\lambda_1 \ldots \lambda_r} \in \tau$ $(r = 1, 2, \ldots)$ mit $E(\mathfrak{M}_{\lambda_1 \ldots \lambda_r})$ trifft stets auch $E(\mathfrak{M}_{\lambda_1 \ldots \lambda_{r-1}})$ zu".

Die beiden Verästelungssätze lauten nun:

Es sei τ eine Objektverästelung. Dann gilt:

I. *Aus der Aussage A: „Es gibt auf unendlich vielen Stufen E-Objekte, und τ ist E-rückerblich" folgt die Aussage B: „In τ gibt es (mindestens) einen E-Ast".*

II. *Die Aussage A*: „Es gibt in τ E-Aststücke aller Längen" ist mit der vorigen Aussage B gleichwertig.*

Beweis. Zu I. Wir erklären vorerst:

(E1) Das System aller $\mathfrak{M}_{\lambda_1 \ldots \lambda_r \sigma_{r+1} \ldots \sigma_t}$ aus τ mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ fest und $t = r, r+1, \ldots$ heiße r-tes von $\mathfrak{M}_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}$ ausgehendes Reststück $\tau_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}$, speziell r-tes E-Reststück, wenn in $\tau_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}$ unendlich viele E-Objekte auftreten.

Es gilt dann:

(1) Zu jedem r gibt es ein r-tes E-Reststück.

Dies, da jede Stufe nur endlich viele Objekte enthält, also auch nur höchstens endlich viele Reststücke davon ausgehen können. Befände sich darunter kein E-Reststück, so könnte, entgegen der ersten Teilaussage von A, τ nicht unendlich viele Objekte enthalten.

(2) Ist $\tau_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}$ ein beliebiges E-Reststück, so gibt es dazu stets ein $(r+1)$-tes (Teil-) E-Reststück $\tau_{\lambda_1 \ldots \lambda_r \lambda_{r+1}}$.

Anders käme man, ähnlich wie unter (1) ausgeführt, zu einem Widerspruch, nun mit der Annahme, daß $\tau_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}$ unendlich viele E-Objekte enthalte.

(3) Für jedes E-Reststück $\tau_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}$ gilt $E\,(\mathfrak{M}_{\lambda_1 \ldots \lambda_r})$.

Ist nämlich beispielsweise $E\,(\mathfrak{M}_{\lambda_1 \ldots \lambda_r \sigma_{r+1} \ldots \sigma_t})$ $(t \geq r+1)$ — nach der Definition des E-Reststückes muß es ein solches E-Objekt geben — so folgt aus der zweiten Teilaussage von A (schrittweise angewandt), daß dann notwendig auch $E\,(\mathfrak{M}_{\lambda_1 \ldots \lambda_r})$ zutrifft.

Aus (1), (2) und (3) ergibt sich jetzt leicht, wie man zu einem E-Ast gelangen kann. Man wähle hierzu vorerst eine E-Reststückfolge $(\tau_{\lambda_1 \ldots \lambda_r})$ nach folgender Vorschrift: τ_0 werde $= \tau$ gesetzt[1]). τ_{λ_1} sei dann ein nach (2) dazu vorhandenes E-Teilreststück, $\tau_{\lambda_1 \lambda_2}$ ein zu diesem wieder vorhandenes E-Teilreststück, usf. Die Folge $(\mathfrak{M}_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_r})$ stellt dann nach (3) einen E-Ast dar.

Zu II. Aus A^* folgt B. Wir erklären vorerst:

(E 2) Jedes Objekt $\mathfrak{M}_{\lambda_1 \ldots \lambda_r \lambda_{r+1} \ldots \lambda_{r+t}}$ aus τ $(r \geq 0,\ t > 0)$ heiße Nachfolger von $\mathfrak{M}_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}$ (dessen Vorgänger).

(E 3) Ist $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_{\lambda_1}, \ldots, \mathfrak{M}_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}$ ein Aststück aus τ, so wollen wir sagen: Das Aststück läuft durch jedes seiner Objekte $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_{\lambda_1}, \ldots, \mathfrak{M}_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}$.

Es gilt dann wegen A^*:

(4) Durch $\mathfrak{M}$ laufen unendlich viele E-Aststücke.

Ferner:

(5) Zu $\mathfrak{M}$ gibt es einen Nachfolger, etwa $\mathfrak{M}_{\lambda_1}$ (der Objekt erster Stufe ist), durch den ebenfalls unendlich viele E-Aststücke laufen.

Anders nämlich könnten, da jede, also auch die erste Stufe nur endlich viele Objekte enthält, auch durch $\mathfrak{M}$ nur endlich viele Aststücke laufen, gegen (4).

Ähnlich schließt man weiter:

(6) Zu $\mathfrak{M}_{\lambda_1}$ gibt es einen Nachfolger $\mathfrak{M}_{\lambda_1 \lambda_2}$, durch den ebenfalls unendlich viele E-Aststücke laufen, usf.

Auf diese Weise gelangt man zu einer Folge $(\mathfrak{M}_{\lambda_1 \ldots \lambda_r})$, deren Glieder sämtlich E-Objekte sind und die somit einen E-Ast darstellt.

Aus B folgt A^*. Das ist unmittelbar klar[2]).

Anmerkung. Stellen die Objekte von τ z. B. Punktmengen eines metrischen n-dimensionalen Raumes $\mathfrak{E}_n$ dar, und gilt, wenn unter d_r das Maximum der Durchmesser der $\mathfrak{M}_{\sigma_1 \ldots \sigma_r}$ (r fest) verstanden wird:

(a) $$\lim_{r \to \infty} d_r = 0$$

und

(b) Jeder Nachfolger ist Teilmenge seiner Vorgänger,

so stellt jeder Ast von τ eine Mengenschachtelung dar[3]). Ein τ, in welchem (a) und (b) gilt, möge ausgezeichnete (Mengen-) Verästelung heißen. Satz I kann dann z. B.

---

[1]) Es ist nach (1) ein E-Reststück.

[2]) Bei den Beweisen zu I und II wurde stillschweigend das Auswahlaxiom mitbenutzt.

[3]) Die z. B. im Falle abgeschlossener, nicht leerer Mengen genau einen Punkt erfaßt.

zum Beweis des folgenden Satzes mit Vorteil verwendet werden:

(S) Die reelle Funktion $f(P)$ sei auf der beschränkten, abgeschlossenen Punktmenge $\mathfrak{M}$ definiert. Sei τ eine ausgezeichnete Mengenverästelung, wobei $\mathfrak{M}_{\sigma_1 \ldots \sigma_r} = \mathfrak{M}$ für $r = 0$ gesetzt werde und alle Mengen $\mathfrak{M}_{\sigma_1 \ldots \sigma_r}$ abgeschlossene Punktmengen sind. Wenn dann zu vorgegebenem $\eta > 0$ für unendlich viele r Mengen $\mathfrak{M}_{\sigma_1 \ldots \sigma_r}$ in τ existieren, auf welchen die Schwankung von $f(P)$:

$$s(f, \mathfrak{M}_{\sigma_1 \ldots \sigma_r}) \geq \eta$$

verbleibt, so gibt es in $\mathfrak{M}$ (mindestens) einen Punkt Q, in welchem die Punktschwankung von f:

$$\sigma(f, Q) \geq \eta$$

ausfällt[4]).

Satz II eignet sich z. B. zum Beweis des bekannten Bolzano-Weierstrass-schen Häufungsstellensatzes. Es wird dabei mit — gegenüber dem üblichen Beweise — etwas geringeren Voraussetzungen operiert.

[4]) Offenbar ist hier $E(\mathfrak{A}) = s(f, \mathfrak{A})$ zu setzen. Die E-Rückerblichkeit von τ ergibt sich unter Beachtung der Eigenschaft (b) einer ausgezeichneten Mengenverästelung.

Eingegangen 1. Dezember 1948.

Komposita transzendenter Körpererweiterungen.

Von *Günter Pickert* in Tübingen.

Für die arithmetische Theorie der Korrespondenzen benötigt M. Deuring[1]) zwei Sätze über die Primdivisoren des Kompositums zweier Funktionenkörper einer Variablen. Im folgenden sollen nun diese Sätze von einer gewissen einschränkenden Voraussetzung befreit werden. Als Vorbereitung darauf dient eine Erläuterung des Kompositumbegriffs sowie damit zusammenhängender Begriffsbildungen in Anlehnung an C. Chevalley[2]) und A. Weil[3]). Dabei werden jedoch auch Ergebnisse hergeleitet, die zum Beweis der erwähnten Sätze nicht erforderlich sind.

Sind K und L Unterkörper des Körpers M, so pflegt man den Durchschnitt aller in M enthaltenen gemeinsamen Oberkörper von K und L das *Kompositum von K und L in M* zu nennen und mit KL zu bezeichnen. Dieser Körper besteht aus allen Quotienten von Elementen $\sum_{i=1}^{m} a_i b_i \in M$ mit $a_i \in K$, $b_i \in L$. Sind K_1 und K_2 Oberkörper des Körpers k, so bezeichne ich einen Erweiterungskörper $\mathfrak{K}$ von k zusammen mit zwei Isomorphismen τ_i $(i = 1, 2)$ von $K_i|k$ in $\mathfrak{K}|k$[4]) als ein *Kompositum* $(\mathfrak{K}|k, \tau_1, \tau_2)$ *von K_1, K_2 über k*, falls $\mathfrak{K} = K_1^{\tau_1} K_2^{\tau_2}$ ist. Dabei ist allgemein a^σ das Bild von $a \in L$ und L^σ das Bild des Körpers L beim Isomorphismus σ. Dementsprechend bezeichnet $\sigma\sigma'$ den Isomorphismus von L, der durch Anwendung des Isomorphismus σ' *nach* dem Isomorphismus σ entsteht: $(L^\sigma)^{\sigma'} = L^{\sigma\sigma'}$. Nach Chevalley nenne ich weiter zwei Komposita $(\mathfrak{K}|k, \tau_1, \tau_2)$ und $(\mathfrak{K}'|k, \tau_1', \tau_2')$ von K_1, K_2 über k *isomorph*, wenn es einen Isomorphismus σ von $\mathfrak{K}|k$ auf $\mathfrak{K}'|k$ mit $\tau_i' = \tau_i \sigma$ $(i = 1, 2)$ gibt.

Zu jedem Kompositum $(\mathfrak{K}|k, \tau_1, \tau_2)$ gibt es ein isomorphes $(\mathfrak{K}'|k, \tau_1', \tau_2')$, in welchem τ_1' der identische Isomorphismus von K_1 ist. Man braucht ja nur einen Isomorphismus σ von $\mathfrak{K}$ als Fortsetzung von τ_1^{-1} zu bilden und $\mathfrak{K}' = \mathfrak{K}^\sigma$, $\tau_2' = \tau_2 \sigma$ zu setzen. Ich beschränke mich daher im folgenden auf die Untersuchung derartiger besonderer Komposita. Ein solches wird dann also, wenn ich noch K, K statt K_1, K_2 schreibe, durch einen Oberkörper $\mathfrak{K}$ von K und einen Isomorphismus τ von $\mathsf{K}|k$ in $\mathfrak{K}|k$ mit $\mathfrak{K} = K\mathsf{K}^\tau$ gegeben. Ich bezeichne es dementsprechend mit $(\mathfrak{K}|k, \tau)$. $(\mathfrak{K}|k, \tau)$ und $(\mathfrak{K}'|k, \tau')$ sind genau dann isomorph, wenn es einen Isomorphismus von $\mathfrak{K}|K$ auf $\mathfrak{K}'|K$ gibt, der den Isomorphismus

---

[1]) M. Deuring, Arithmetische Theorie der Korrespondenzen algebraischer Funktionenkörper. I, J. f. M. **177**, 161—191 (1937), insbes. 167.

[2]) C. Chevalley, On the composition of fields, Bull. Am. Math. Soc. **48**, 482—487 (1942).

[3]) A. Weil, Foundations of algebraic geometry, New York 1946, Ch. I.

[4]) D. h. τ_i läßt die Elemente von k fest, ist ein Isomorphismus bezüglich k.

$\tau^{-1}\tau'$ der Unterkörper K^τ, $\mathsf{K}^{\tau'}$ fortsetzt. Die Klassen isomorpher Komposita entsprechen daher eindeutig den Klassen konjugierter Isomorphismen von K in Oberkörper von K in dem bei Deuring[1]) angegebenen Sinn.

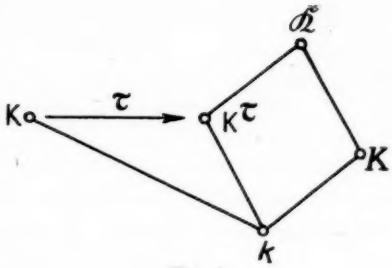


Fig. 1

Ist K über k endlich vom Grad n, also etwa $\mathsf{K} = \sum_{i=1}^{n} k\,\omega_i$, so erhält man bekanntlich die Komposita von K und K über k mittels der durch Grundkörpererweiterung aus K entstehenden Algebra $\mathsf{K}_K = \sum_{i=1}^{n} K\,\omega_i^*$, wobei die Basiselemente ω_i^* dieselbe Multiplikationstafel besitzen wie die ω_i:

$$\omega_i\,\omega_k = \sum_{l=1}^{n} c_{ik}^{(l)}\,\omega_l,\quad \omega_i^*\,\omega_k^* = \sum_{l=1}^{n} c_{ik}^{(l)}\,\omega_l^*,\ c_{ik}^{(l)} \in k.$$

K_K ist nämlich direkte Summe primärer Algebren $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_s$ über K, d. h. solcher Algebren $\mathfrak{A}_\nu$, für die der Restklassenring nach dem Ideal der nilpotenten Elemente ein Körper $\mathfrak{K}_\nu$ ist. Diese als Oberkörper von K aufgefaßten $\mathfrak{K}_\nu$ zusammen mit gewissen Isomorphismen τ_ν sind untereinander nichtisomorphe Komposita, und jedes Kompositum ist isomorph zu einem solchen $(\mathfrak{K}_\nu|K, \tau_\nu)$. Der Beweis hierfür sei noch kurz angedeutet. Jeder Körper $\mathfrak{K}_\nu$ ist als Restklassenkörper ein homomorphes Bild von K_K:

$$\sum a_i \cdot \omega_i^* \to \sum a_i \cdot \omega_i^{(\nu)}\ (a_i \in K).$$

$\sum c_i \cdot \omega_i \to \sum c_i \cdot \omega_i^{(\nu)}$ $(c_i \in k)$ ist dann ein Isomorphismus τ_ν von $\mathsf{K}|k$ in $\mathfrak{K}_\nu|k$, da ja nicht alle $\omega_i^{(\nu)}$ $(i = 1, \ldots, n)$ verschwinden, und es gilt $\mathfrak{K}_\nu = K\,\mathsf{K}^{\tau_\nu}$. Umgekehrt führt jeder Isomorphismus τ von $\mathsf{K}|k$ in $\mathfrak{K}|k$ (mit $\mathfrak{K} = K\,\mathsf{K}^\tau$) zu einem Homomorphismus von $\mathsf{K}_K|K$ auf $\mathfrak{K}|K$. Sind die Komposita $(\mathfrak{K}_\nu|k, \tau_\nu)$, $(\mathfrak{K}_\mu|k, \tau_\mu)$ isomorph, so gibt es einen Isomorphismus von $\mathfrak{K}_\nu|K$ auf $\mathfrak{K}_\mu|K$ mit $\omega_i^{(\nu)} \to \omega_i^{(\mu)}$. Aus $\sum a_i \cdot \omega_i^{(\nu)} = 0$ $(a_i \in K)$ folgt also $\sum a_i\,\omega_i^{(\mu)} = 0$ und umgekehrt, d. h. die Ideale $\mathfrak{p}_\nu$, $\mathfrak{p}_\mu$ mit $\mathsf{K}_K/\mathfrak{p}_\nu \cong \mathfrak{K}_\nu$, $\mathsf{K}_K/\mathfrak{p}_\mu \cong \mathfrak{K}_\mu$ sind identisch: $\nu = \mu$. Selbst wenn beide Körper K, K normal über k sind, kann es also nichtisomorphe Komposita geben.

Nach Weil[3]) nennt man zwei Zwischenkörper K, L einer Erweiterung $\mathfrak{K}|k$ *unabhängig über* k, wenn jede über k algebraisch unabhängige Menge aus L auch über K algebraisch unabhängig ist. Bei Ersetzung von „algebraisch" durch „linear" heißt die entsprechende Eigenschaft *linear fremd* (linearly disjoint). Wie man leicht sieht[5]), sind diese beiden Begriffe in K und L symmetrisch und es folgt „unabhängig" aus „linear fremd". Ich bezeichne nun ein Kompositum $(\mathfrak{K}|k, \tau_1, \tau_2)$ von K_1, K_2 über k als *unabhängig*, wenn $K_1^{\tau_1}$, $K_2^{\tau_2}$ in $\mathfrak{K}$ unabhängig über k sind. Bei Chevalley[2]) werden nur solche unabhängigen Komposita betrachtet und auch nur ein solches als Kompositum bezeichnet.

Bilden die Elemente x_i (abgekürzt durch x) eine Transzendenzbasis von $K|k$ und die ξ_i (abgekürzt durch ξ) eine solche von $\mathsf{K}|k$, so ist offenbar $(\mathfrak{K}|k, \tau)$ genau dann unabhängig, wenn die ξ^τ eine Transzendenzbasis von $\mathfrak{K}|K$ bilden. Weiter sieht man leicht, daß bei unabhängigem $(\mathfrak{K}|k, \tau)$ die Körper K und K^τ dann und nur dann linear fremd sind, wenn eine Basis von $\mathsf{K}^\tau|k(\xi^\tau)$ auch eine Basis von $\mathfrak{K}|K(\xi^\tau)$ ist. Ist $(\mathfrak{K}|k, \tau)$ unabhängig, so ist der in $\mathfrak{K}$ enthaltene Körper $K(\xi^\tau)$ der Körper der rationalen Funktionen in den Unbestimmten ξ^τ über K. Zur Konstruktion aller unabhängigen Komposita verwende ich daher den Körper $K(\xi^*)$ der rationalen Funktionen über K in Unbestimmten ξ^*, die eineindeutig den ξ zugeordnet sind. Offenbar ergibt sich jedes unabhängige Kompositum, für das $\xi^\tau = \xi^*$ gilt, durch einen dieser Bedingung genügenden Isomorphismus τ

[5]) A. Weil a. a. O.[3]), Prop. 1, 3, 4.

von K in eine algebraisch abgeschlossene Erweiterung von $K(\xi^*)$, indem in dieser das Kompositum $\mathfrak{K} = K\mathsf{K}^\tau$ gebildet wird. Sind die ω_i die Elemente[6]) einer Basis von $\mathsf{K}|k(\xi)$ und gilt

$$\omega_i\,\omega_k = \sum_l g_{ik}^{(l)}(\xi)\cdot\omega_l,\quad g_{ik}^{(l)}(\xi)\in k(\xi),$$

so wird — entsprechend der bei endlicher Erweiterung $\mathsf{K}|k$ benutzten Algebra K_K — die Algebra $\mathsf{K}^* = \sum_i K(\xi^*)\,\omega_i^*$ gebildet, wobei die den ω_i eineindeutig zugeordneten ω_i^* eine Basis über $K(\xi^*)$ mit

$$\omega_i^*\,\omega_k^* = \sum_l g_{ik}^{(l)}(\xi^*)\cdot\omega_l$$

darstellen. Bei einer algebraischen Erweiterung $\mathsf{K}|k$ ist K^* demnach die durch Grundkörpererweiterung aus $\mathsf{K}|k$ entstehende Algebra K_K, die — wenn auch noch $K|k$ algebraisch ist — zu dem direkten Produkt $K\times\mathsf{K}$ der Algebren $K|k$, $\mathsf{K}|k$ isomorph ist. Jeder Homomorphismus φ von $\mathsf{K}^*|K(\xi^*)$ auf eine Erweiterung $\mathfrak{K}|K(\xi^*)$ liefert nun ein unabhängiges Kompositum $(\mathfrak{K}|k,\tau)$, wenn τ durch $\xi^\tau=\xi^*$ und $\omega_i^\tau=\omega_i^{*\varphi}$ bestimmt wird. Umgekehrt bestimmt jedes Kompositum $(\mathfrak{K}|k,\tau)$, für das $\xi^\tau=\xi^*$ gilt, durch $\omega_i^*\to\omega_i^\tau$ einen Homomorphismus von $\mathsf{K}^*|K(\xi^*)$ auf $\mathfrak{K}|K(\xi^*)$. Jedes unabhängige Kompositum $(\mathfrak{K}'|k,\tau')$ ist nun isomorph einem solchen $(\mathfrak{K}|k,\tau)$ mit $\xi^\tau=\xi^*$; denn der durch $\xi^{\tau'}\to\xi^*$ gegebene Isomorphismus von $K(\xi^{\tau'})|K$ auf $K(\xi^*)|K$ läßt sich fortsetzen zu einem Isomorphismus σ von $\mathfrak{K}'$ auf eine algebraische Erweiterung $\mathfrak{K}|K(\xi^*)$, so daß mit $\tau=\tau'\sigma$ die Komposita $(\mathfrak{K}|k,\tau)$, $(\mathfrak{K}'|k,\tau')$ isomorph sind. Zwei Komposita $(\mathfrak{K}|k,\tau)$, $(\mathfrak{K}'|k,\tau')$ mit $\xi^\tau=\xi^{\tau'}=\xi^*$ sind dann und nur dann isomorph, wenn es einen Isomorphismus von $\mathfrak{K}|K$ auf $\mathfrak{K}'|K'$ mit $\omega_i^\tau\to\omega_i^{\tau'}$ gibt. Genau dann unterscheiden sich aber die durch $\omega_i^*\to\omega_i^\tau$ bzw. $\omega_i^*\to\omega_i^{\tau'}$ bestimmten Homomorphismen von $\mathsf{K}^*|K(\xi^*)$ auf $\mathfrak{K}|K(\xi^*)$ bzw. $\mathfrak{K}'|K(\xi^*)$ nur um einen Isomorphismus. Dies ist nun gleichbedeutend damit, daß die bei den Homomorphismen in das Nullideal abgebildeten teilerlosen Ideale von K^* übereinstimmen. Es gilt also

Satz 1. *Die Klassen isomorpher unabhängiger Komposita von K, K über k entsprechen eineindeutig den vom Einheitsideal verschiedenen teilerlosen Idealen der Algebra $\mathsf{K}^*|K(\xi^*)$.*

Besitzt k Primzahlcharakteristik p, so heißt $\mathsf{K}|k$ *rein-inseparabel*, falls es zu jedem $\alpha\in\mathsf{K}$ eine natürliche Zahl e mit $\alpha^{p^e}\in k$ gibt. In diesem Falle läßt sich dann auch zu jedem $\alpha\in\mathsf{K}^*$ ein e mit $\alpha^{p^e}\in K$ angeben. Ein Ideal $\mathfrak{i}\subset\mathsf{K}^*$ der Algebra $\mathsf{K}^*|K$ hat nun wegen $K\cdot\mathfrak{i}=\mathfrak{i}$ mit dem Grundkörper K nur das Nullelement gemeinsam. Aus $\alpha\in\mathfrak{i}$ folgt daher $\alpha^{p^e}=0$, d. h. $\mathfrak{i}$ ist im Radikal von K^* enthalten. Das Radikal ist demnach bei rein-inseparabler Erweiterung $\mathsf{K}|k$ das einzige vom Einheitsideal verschiedene teilerlose Ideal von K^*. Damit ergibt sich

Satz 2. *Bei rein-inseparabler Erweiterung $\mathsf{K}|k$ sind alle Komposita von K, K über k isomorph.*

Die Richtigkeit dieses Satzes erkennt man natürlich auch leicht, ohne Satz 1 zu benutzen. Ferner folgt

Satz 3: *Sind für ein Kompositum $(\mathfrak{K}|k,\tau)$ von K, K über k die Körper K und K^τ linear fremd, so sind alle unabhängigen Komposita von K, K über k isomorph zu $(\mathfrak{K}|k,\tau)$.*

Denn da aus „linear fremd" ja „unabhängig" folgt, sind die ξ^τ auch algebraisch unabhängig über K. Man kann also $\xi^\tau=\xi^*$ setzen. Da die ω_i^τ über K linear unabhängig

[6]) Möglicherweise unendlich viele; Summen sind im folgenden als solche mit nur endlich vielen von 0 verschiedenen Gliedern zu verstehen.

sind, ist $\mathsf{K}^*|K(\xi^*)$ isomorph zu $\mathfrak{K}|K(\xi^*)$ und damit ein Körper. Für einen solchen ist aber das Nullideal das einzige Ideal außer dem Einheitsideal.

Eine Erweiterung, die durch Adjunktion eines einzigen Elementes entsteht, nennt man *einfach*. Ein Element, das einer doppelwurzelfreien algebraischen Gleichung mit Koeffizienten aus k genügt, heißt *separabel über* k und eine nur aus separablen Elementen bestehende Erweiterung von k ebenfalls. Die Gesamtheit aller über k separablen Elemente von $K \supset k$ bildet bekanntlich einen Körper, den ich die *separable Hülle von* k *in* K nennen will. Den Körper L der über k algebraischen Elemente von K bezeichne ich als die *algebraische Hülle von* k *in* K. Im Falle $k = L$ heißt k *algebraisch abgeschlossen in* K. Unter Benutzung dieser Begriffsbildungen und mit der bisherigen Bedeutung von x und ξ gilt nun

Satz 4. *Ist k algebraisch abgeschlossen in K und K einfache Erweiterung einer separablen Erweiterung von $k(x)$, so sind für ein unabhängiges Kompositum $(\mathfrak{K}|k, \tau)$ von K, K über k die Körper K, K^τ linear fremd. Falls $K|k(x)$ oder $\mathsf{K}|k(\xi)$ separabel ist, folgt aus der algebraischen Abgeschlossenheit von k in K neben der linearen Fremdheit von K, K^τ noch die algebraische Abgeschlossenheit von K in $\mathfrak{K}$.*

Für eine algebraische Erweiterung $K|k$ ist der Satz bekannt. Ich gebe kurz den üblichen Beweis an. Zu einer endlichen, über k linear unabhängigen Menge $\mathfrak{M}$ aus K kann man immer ein Element $\alpha \in K$ mit $f(\alpha) = 0$, $f(z) \in k[z]$ irreduzibel, $\mathfrak{M} \subseteq k(\alpha)$ finden, falls K einfache Erweiterung einer separablen Erweiterung von k ist. Die Koeffizienten eines Teilers von $f(z)$ in $\mathsf{K}^\tau[z]$ sind nun algebraisch über k, also wegen der algebraischen Abgeschlossenheit von k in K^τ sogar Elemente von k. Daher ist $f(z)$ auch in $\mathsf{K}^\tau[z]$ irreduzibel. Eine Basis von $k(\alpha)|k$ ist demnach linear unabhängig über K^τ, und für $\mathfrak{M}$ muß also dasselbe gelten. Um unter der Voraussetzung, daß $K|k$ oder $\mathsf{K}|k(\xi)$ separabel und k in K algebraisch abgeschlossen ist, K als algebraisch abgeschlossen in $\mathfrak{K}$ und K, K^τ als linear fremd über k nachzuweisen, genügt es offenbar, den Beweis für $K = k(\alpha)$ zu führen. Da eine Basis von $\mathsf{K}^\tau|k(\xi^\tau)$ auch eine solche von $\mathsf{K}^\tau(\alpha)|k(\alpha, \xi^\tau)$ ist und ein irreduzibles Polynom aus $k(\alpha)\,[z]$ auch in $k(\alpha, \xi^\tau)\,[z]$ irreduzibel bleibt, ist ein über $k(\alpha)$ algebraisches Element $\beta \in \mathsf{K}^\tau(\alpha)$ separabel, falls $\mathsf{K}|k(\xi)$ separabel ist. Nach Voraussetzung ist daher α oder β separabel. Es gibt also ein Element γ mit $k(\alpha, \beta) = k(\gamma)$. Aus

$$(\mathsf{K}^\tau(\alpha) : \mathsf{K}^\tau) = (k(\alpha) : k), \quad (\mathsf{K}^\tau(\gamma) : \mathsf{K}^\tau) = (k(\gamma) : k), \quad \mathsf{K}^\tau(\alpha) = \mathsf{K}^\tau(\gamma)$$

folgt dann $k(\alpha) = k(\gamma)$, d. h. $\beta \in k(\alpha)$, was zu beweisen war.

Für eine beliebige Erweiterung $K|k$ gelingt der Beweis von Satz 4 nun folgendermaßen. $\eta_1, \ldots, \eta_n$ seien irgendwelche über k linear unabhängige Elemente von K^τ. Aus $\sum_i f_i(x)\,\eta_i = 0$ mit $f_i(x) \in k[x]$ folgt für die Koeffizienten $a_{ik} \in k$ der Polynome f_i

$$\sum_i a_{ik}\,\eta_i = 0,$$

da ja die x auch über K^τ algebraisch unabhängig sind. Daher verschwinden also sämtliche a_{ik} und damit auch die f_i. Daraus folgt: $k(x)$ und K^τ sind linear fremd über k. Um nun K, K^τ als linear fremd über k nachzuweisen, genügt es daher zu zeigen, daß K und $\mathsf{K}^\tau(x)$ linear fremd über $k(x)$ sind. Dies sowie — unter der entsprechenden Voraussetzung des Satzes 4 — die algebraische Abgeschlossenheit von K in $\mathfrak{K}$ erhalte ich nun sofort durch Anwendung des bereits bewiesenen Sonderfalles auf die Erweiterungen $K|k(x)$, $\mathsf{K}^\tau(x)|k(x)$, von denen die erste ja algebraisch ist. Ich muß dazu nur noch zeigen, daß $k(x)$ in $\mathsf{K}^\tau(x)$ algebraisch abgeschlossen ist. Dazu betrachte ich ein über $k(x)$ algebraisches Element $\chi^{-1} \cdot \psi$ mit $\psi, \chi \in \mathsf{K}^\tau[x]$. Die bezüglich $k(x, \chi)|k(x)$ gebildete Norm $N(\chi)$ von χ ist als Polynom in den x durch χ teilbar, $\chi^{-1} \cdot \psi \cdot N(\chi) = \varphi(x)$ also ein Polynom

in den x mit Koeffizienten aus K^τ. Es gibt nun Elemente $\eta_1, \ldots, \eta_n$ aus K^τ mit

$$\varphi(x) = g_0(x) + \sum_{i=1}^{n} g_i(x)\, \eta_i,\ g_i(x) \in k[x],$$

so daß $1, \eta_1, \ldots, \eta_n$ über k linear unabhängig sind. Ferner gibt es Polynome $f_i(x) \in k[x]$ $(i = 0, \ldots, m)$, die nicht sämtlich verschwinden und für die die Relation $\sum_{i=0}^{m} f_i(x)\, \varphi(x)^i = 0$ gilt. k^* sei nun irgendeine separable Erweiterung von k, die unendlich viele Elemente besitzt. Ich ersetze die x durch irgendwelche Elemente α von k^*, die nur der Bedingung genügen sollen, daß nicht sämtliche $f_i(\alpha)$ verschwinden. Aus dem Kompositum $(\mathsf{K}^\tau(x)|k, \tau)$ wird dadurch ein Kompositum von $k(\alpha)$, K über k, und $\varphi(\alpha) \in \mathsf{K}^\tau(\alpha)$ ist algebraisch über $k(\alpha)$. Nach dem bereits erledigten Sonderfall ist aber $k(\alpha)$ algebraisch abgeschlossen in $\mathsf{K}^\tau(\alpha)$, und die Körper $k(\alpha)$, K^τ sind linear fremd über k. Daraus folgt $\varphi(\alpha) \in k(\alpha)$ sowie die lineare Unabhängigkeit von $1, \eta_1, \ldots, \eta_n$ auch über $k(\alpha)$ und somit $g_i(\alpha) = 0$ für $i > 0$. Mit Rücksicht auf die Willkür in der Wahl der α ergibt sich also $g_i(x) = 0$ für $i > 0$, d. h. $\varphi(x) \in k(x)$, w. z. b. w.

Ich bilde nun verschiedene Beispiele, bei denen die Voraussetzungen und auch die Behauptungen von Satz 4 nicht sämtlich erfüllt sind. Für k wähle ich zu diesem Zweck den Körper der rationalen Funktionen in den Unbestimmten u, v bzw. u, v, w über dem Primkörper der Charakteristik $p > 0$. Die Transzendenzgrade von $K|k$ und $\mathsf{K}|k$ setze ich $= 1$. Die Elemente x und ξ von K bzw. K seien algebraisch unabhängig und τ in allen Beispielen der identische Isomorphismus.

1. *k nicht algebraisch abgeschlossen in K.*

$K = k(x, (ux + v)^{1/p})$, $\mathsf{K} = k(\xi, u^{1/p}, v^{1/p})$, also

$\mathfrak{K} = K(\xi, u^{1/p})$ und

$$(\mathfrak{K} : K(\xi)) = p < p^2 = (\mathsf{K} : k(\xi)),$$

d. h. K und K sind nicht linear fremd über k.

2. *K nicht einfache Erweiterung einer separablen Erweiterung von $k(x)$.*

$p = 2$, $K = k(x, y, z)$ mit $y^2 = ux^2 + v$, $z^2 = vx^2 + w$ und $\mathsf{K} = k(\xi, \eta, \zeta)$ mit $\eta^2 = u\xi^2 + v$, $\zeta^2 = v\xi^2 + w$. Wegen $\zeta = z - x\eta + \xi y$ ist $\mathfrak{K} = K(\xi, \eta)$. Daraus folgt $(\mathfrak{K} : K(\xi)) = 2 < 4 = (\mathsf{K} : k(\xi))$, d. h. K und K sind nicht linear fremd über k. Dabei ist jedoch k in K (und übrigens auch in K) algebraisch abgeschlossen. Denn ist $\alpha \in \mathsf{K}$ algebraisch über k, so auch α^2, das aber in $k(\xi)$ und daher in k liegt:

$$\alpha^2 = a^2 + b^2 u + c^2 v + d^2 w + e^2 vw + f^2 wu + g^2 uv + h^2 uvw,$$
$$a, b, c, d, e, f, g, h \in k.$$

Mittels $v = \eta^2 + u\xi^2$, $w = (\zeta^2 + \eta^2 \xi^2) + u\xi^4$ ergibt sich daraus $\alpha^2 = u\beta^2 + \gamma^2$ mit $\beta = b + c\xi + d\xi^2 + e\eta\xi^2 + (e + h)\,\xi\zeta + e\xi\eta\zeta + f\xi + f\xi\eta + g\eta + h\eta\zeta + h\eta^2\xi + hu\xi^3$ und $\gamma \in \mathsf{K}$. Nun kann nicht $u = \delta^2$, $\delta \in \mathsf{K}$ sein, da sonst wegen $(\eta + \delta\xi)^2 = v$, $(\zeta + \eta\xi + \delta\xi^2)^2 = w$ im Widerspruch zu $(\mathsf{K} : k(\xi)) = 4$ der Körper K einen Unterkörper vom Grade 6 über $k(\xi)$ enthielte. Also ist $\beta = 0$, und daraus folgt

$$b = c = d = e = f = g = h = 0,$$

d. h. $\alpha = a \in k$, w. z. b. w.

3. *Weder $K|k(x)$ noch $\mathsf{K}|k(\xi)$ ist separabel.*

$K = k(x, (ux^p + v)^{1/p})$, $\mathsf{K} = k(\xi, (u\xi^p + v)^{1/p})$. Wegen $\mathfrak{K} = K(\xi, u^{1/p})$ ist also K nicht algebraisch abgeschlossen in $\mathfrak{K}$. Dabei ist jedoch k in K (und übrigens auch in K) algebraisch abgeschlossen: Wäre ein nicht in k liegendes Element $\alpha \in \mathsf{K}$ algebraisch über k, so folgt $\alpha^p \in k$ und $k(\xi, \alpha) = \mathsf{K}$; $u\xi^p + v \in k^p(\alpha^p, \xi^p)$ ergäbe dann $u, v \in k^p(\alpha^p)$, was wegen $(k(u^{1/p}, v^{1/p}) : k) = p^2$ aber unmöglich ist.

Die bisher gewonnenen Sätze ermöglichen nun einen verhältnismäßig einfachen Beweis von

Satz 5[7]. *Die unabhängigen Komposita* $(\mathfrak{K}|k, \tau)$, $(\mathfrak{K}'|k, \tau')$ *von* K, K *über* k *sind genau dann isomorph, wenn dies für die Komposita* $(K_0\,\mathsf{K}_0^{\tau}|k, \tau)$, $(K_0\,\mathsf{K}_0^{\tau'}|k, \tau')$ *gilt, wobei* K_0, K_0 *die separablen Hüllen von* k *in* K *bzw.* K *sind.*

Die Notwendigkeit der Bedingung ist klar. Für den weiteren Beweis führe ich noch die algebraischen Hüllen L, Λ von k in K bzw. K sowie die separable Hülle M von $L(x)$ in K ein. $\mathfrak{K}$ (und ebenso $\mathfrak{K}'$) wird nun in der durch nebenstehende Figur angegebenen Weise aufgebaut. Dabei sind also $K_0\Lambda^{\tau}|\Lambda^{\tau}$ und $M|L(x)$ separabel, $\Lambda^{\tau}|K_0^{\tau}$, $L|K_0$ und $K|M$ rein-inseparabel, Λ^{τ} in K^{τ} und L in M algebraisch abgeschlossen. Durch mehrfache Anwendung des folgenden Hilfssatzes ergibt sich daher die Behauptung von Satz 5 sofort, wenn man noch die Sätze 2 und 4 beachtet.

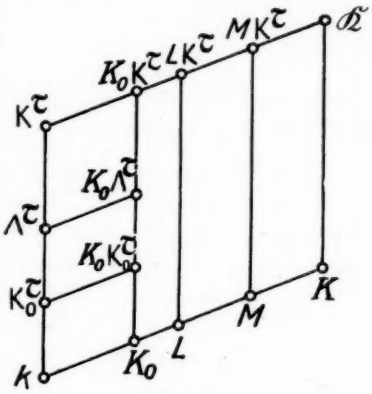


Fig. 2.

Hilfssatz. *Die Komposita* $(\mathfrak{K}|k, \tau_1, \tau_2)$, $(\mathfrak{K}'|k, \tau_1', \tau_2')$ *von* K_1, K_2 *über* k *sind isomorph, wenn es einen Körper* L *mit* $k \subseteqq L \subseteqq K_1$ *gibt, so daß einmal die Komposita* $(L^{\tau_1}K_2^{\tau_2}|k, \tau_1, \tau_2)$, $(L^{\tau_1'}K_2^{\tau_2'}|k, \tau_1', \tau_2')$ *isomorph sind und zum andern die Körper* $K_1^{\tau_1}$, $L^{\tau_1}K_2^{\tau_2}$ *über* L^{τ_1} *sowie* $K_1^{\tau_1'}$, $L^{\tau_1'}K_2^{\tau_2'}$ *über* $L^{\tau_1'}$ *linear fremd oder aber alle Komposita von* $K_1^{\tau_1'}$ *und* $L^{\tau_1'}K_2^{\tau_2'}$ *über* $L^{\tau_1'}$ *isomorph sind.*

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es einen Isomorphismus σ_0 von $L^{\tau_1}K_2^{\tau_2}$ auf $L^{\tau_1'}K_2^{\tau_2'}$ mit $\tau_i\sigma_0 = \tau_i'$ $(i = 1, 2)$. Dieser wird nun zu einem Isomorphismus σ von $\mathfrak{K}$ fortgesetzt. Mit ε_1, ε_2 als den identischen Isomorphismen von $K_1^{\tau_1'}$ bzw. $L^{\tau_1'}K_2^{\tau_2'}$ sind dann $(\mathfrak{K}'|L^{\tau_1'}, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ und $(\mathfrak{K}^{\sigma}|L^{\tau_1'}, \tau_1'^{-1}\tau_1\sigma, \varepsilon_2)$ Komposita von $K_1^{\tau_1'}$ und $L^{\tau_1'}K_2^{\tau_2'}$ über $L^{\tau_1'}$. Nimmt man noch Satz 3 zu Hilfe, so ergibt die Voraussetzung, daß diese Komposita isomorph sind. Es gibt also einen Isomorphismus σ' von $\mathfrak{K}^{\sigma}|L^{\tau_1'}K_2^{\tau_2'}$ auf $\mathfrak{K}'|L^{\tau_1'}K_2^{\tau_2'}$ mit $\tau_1'^{-1}\tau_1\sigma\sigma' = \varepsilon_1$. Wegen $\tau_2\sigma = \tau_2'$ erfüllt daher der Isomorphismus $\sigma\sigma'$ von $\mathfrak{K}$ auf $\mathfrak{K}'$ die Bedingungen $\tau_i\sigma\sigma' = \tau_i'$ $(i = 1, 2)$, d. h. $(\mathfrak{K}|k, \tau_1, \tau_2)$, $(\mathfrak{K}'|k, \tau_1', \tau_2')$ sind isomorph, w. z. b. w.

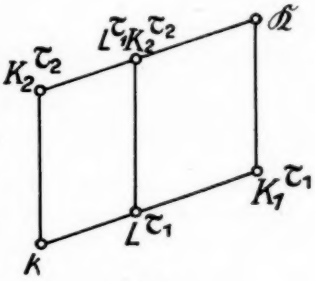


Fig. 3.

Durch Satz 5 wird die Bestimmung der Klassen isomorpher unabhängiger Komposita von K, K über k auf dieselbe Aufgabe für die separablen Hüllen K_0, K_0 zurückgeführt. Hinzuziehen von Satz 1 ergibt insbesondere

Satz 6. *Dann und nur dann sind alle unabhängigen Komposita von* K, K *über* k *isomorph, wenn das direkte Produkt der als Algebren über* k *aufgefaßten separablen Hüllen von* k *in* K *bzw.* K *ein Körper ist.*

Daß die Bedingung hinreicht, ergibt sich sofort aus Satz 1 und 5. Sind andererseits alle unabhängigen Komposita von K, K über k isomorph, so gilt dasselbe erst recht für K_0 und jeden über k endlichen Unterkörper Λ von K_0. Nach Satz 1 besitzt daher $K_0 \times \Lambda$ genau ein vom Einheitsideal verschiedenes teilerloses Ideal, ist aber zufolge der Separabilität von $\Lambda|k$ direkte Summe von Körpern. Also muß $K_0 \times \Lambda$ selber und damit auch $K_0 \times \mathsf{K}_0$ ein Körper sein, was zu beweisen war.

[7]) C. Chevalley, a. a. O.[2]), Theorem 2.

Im folgenden beschränke ich mich auf den Fall, daß $\mathsf{K}|k$ den Transzendenzgrad 1 besitzt und $\mathsf{K}|k(\xi)$ endlich ist. Für ein *abhängiges* Kompositum $(\mathfrak{K}|k, \tau)$ von K, K über k ist $\mathfrak{K}|K$ also algebraisch. Die weiteren Untersuchungen handeln nur von *einem* unabhängigen Kompositum $(\mathfrak{K}|k,\tau)$. O. B. d. A. kann daher zur Vereinfachung der Schreibweise τ als der identische Isomorphismus genommen werden. In diesem Sinne spreche ich im folgenden kurz von dem Kompositum $\mathfrak{K} = K\mathsf{K}$. Hierbei sind K und $\mathfrak{K}$ Funktionenkörper in einer Variablen über den Konstantenkörpern k bzw. K. Man nennt $\mathfrak{K}|K$ auch *Konstantenerweiterung* von $\mathsf{K}|k$.

Ich betrachte nun die *Primdivisoren* $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{K}|K$. Das sind Homomorphismen $\alpha \to w(\alpha)$ der multiplikativen Gruppe von $\mathfrak{K}$ auf die additive Gruppe der ganz-rationalen Zahlen mit folgenden Eigenschaften:

I. $w(\alpha + \beta) \geqq \operatorname{Min}(w(\alpha), w(\beta))$

II. $w(\alpha) = 0$ für $\alpha \in K$.

Man nennt die Funktion $w(\alpha)$ auch *die zu* $\mathfrak{p}$ *gehörige Bewertung* und bezeichnet den Konstantenkörper K als *trivial bewertet*. Ein Primdivisor $\mathfrak{p}'$ einer algebraischen Erweiterung $\mathfrak{K}'$ von $\mathfrak{K}$ mit $w'(\alpha)$ als zugehöriger Bewertung heißt *Fortsetzung von* $\mathfrak{p}$, wenn es eine Zahl e mit $w(\alpha) \cdot e = w'(\alpha)$ für alle $\alpha \in \mathfrak{K}$ gibt. e ist eine natürliche Zahl und wird der *Verzweigungsexponent von* $\mathfrak{p}'$ *bezüglich* $\mathfrak{K}$ genannt. Bei $e = 1$ heißt $\mathfrak{p}'$ über $\mathfrak{K}$ *unverzweigt*. Der Ring $\mathfrak{K}_\mathfrak{p}$ der Elemente $\alpha \in \mathfrak{K}$ mit $\alpha = 0$ $w(\alpha) \geqq 0$ heißt der *Bewertungsring* und das teilerlose Ideal $\bar{\mathfrak{p}}$ der α mit $\alpha = 0$ $w(\alpha) > 0$ das *Bewertungsideal*. Der Restklassenkörper $\mathfrak{K}_\mathfrak{p}/\bar{\mathfrak{p}}$ — im folgenden kurz als Restklassenkörper von $\mathfrak{p}$ bezeichnet — kann in der üblichen Weise als Oberkörper von K aufgefaßt werden, da die Elemente von K eineindeutig ihren Restklassen mod. $\bar{\mathfrak{p}}$ zugeordnet sind. Er ist dann algebraisch über K. Als *Restklassenhomomorphismus* ϱ werde im folgenden der Homomorphismus bezeichnet, der die Elemente von K festläßt und jedem nicht in K liegenden Element von $\mathfrak{K}_\mathfrak{p}$ seine Restklasse mod. $\bar{\mathfrak{p}}$ zuordnet.

Nach Deuring[1]) spreche ich von einem *nichtkonstanten* oder einem *konstanten Primdivisor* $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{K}|K$, je nachdem K im Bewertungsring $\mathfrak{K}_\mathfrak{p}$ enthalten ist oder nicht. Mit den eingeführten Bezeichnungen gilt nun

Satz 7. *Wenn das direkte Produkt der separablen Hüllen von k in K bzw. K ein Körper ist, so erzeugt jeder nichtkonstante Primdivisor $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{K}|K$ ein abhängiges Kompositum $(K\mathsf{K}^\varrho|k, \varrho)$ von K, K über k, und jedes abhängige Kompositum von K, K über k ist isomorph zu genau einem der $(K\mathsf{K}^\varrho|k, \varrho)$.*

Beweis. Wegen $\mathsf{K} \subseteq \mathfrak{K}_\mathfrak{p}$ ist $\bar{\mathfrak{p}} \cap \mathsf{K} = (0)$, und ϱ bildet K isomorph auf den in $\mathfrak{K}_\mathfrak{p}^\varrho$ liegenden Oberkörper K^ϱ von k ab. Daraus, daß $\mathfrak{K}|K(\xi)$ und $\mathsf{K}|k(\xi)$ algebraisch sind, folgt nun dasselbe auch für $\mathfrak{K}_\mathfrak{p}^\varrho|K(\xi^\varrho)$ und $\mathsf{K}^\varrho|k(\xi^\varrho)$. Weil $\mathfrak{K}_\mathfrak{p}^\varrho|K$ den Transzendenzgrad Null hat, besitzt daher $K(\xi^\varrho)|K$ und damit auch $K\mathsf{K}^\varrho|K$ ebenfalls diesen Transzendenzgrad. $(K\mathsf{K}^\varrho|k, \varrho)$ ist also ein abhängiges Kompositum von K, K über k.

Um den zweiten Teil der Behauptung zu beweisen, verschaffe ich mir einen Überblick über die nichtkonstanten Primdivisoren von $\mathfrak{K}$[8]). Jeder solche Primdivisor $\mathfrak{p}$ ist Fortsetzung eines Primdivisors $\mathfrak{p}_0$ von $K(\xi)$. Da ξ im Bewertungsring $K(\xi)_{\mathfrak{p}_0}$ liegt, gibt es zu $\mathfrak{p}_0$ bekanntlich ein irreduzibles Polynom $\varphi(\xi) \in K[\xi]$, so daß die zu $\mathfrak{p}_0$ gehörige Bewertung $w_0(\alpha)$ durch

$$\alpha = \varphi^{w_0(\alpha)} \cdot \frac{f}{g}, \quad \varphi \nmid f, \ \varphi \nmid g \tag{1}$$

[8]) Die Angabe des Konstantenkörpers wird meist weggelassen, falls kein Mißverständnis zu befürchten ist.

bestimmt ist. φ ist dabei bis auf einen Faktor aus K eindeutig durch $\mathfrak{p}_0$ festgelegt. Umgekehrt erzeugt jedes irreduzible Polynom $\varphi \in K[\xi]$ mittels Gl. (1) einen Primdivisor $\mathfrak{p}_0$. η sei nun ein solches Element von K, daß $k(\xi, \eta)$ die separable Hülle von $k(\xi)$ in K ist. Weiter sei $F(\xi; z)$ das irreduzible separable Polynom aus $k(\xi)[z]$ mit höchstem Koeffizienten 1 und $F(\xi; \eta) = 0$. Da die Restklasse ξ^ϱ von ξ transzendent ist über k, ist $F(\xi^\varrho; z)$ auch irreduzibel und separabel in $k(\xi^\varrho)[z]$. Über dem im Restklassenkörper $\mathfrak{K}_\mathfrak{p}^\varrho$ liegenden Körper $K(\xi^\varrho)$ zerfällt es also in *verschiedene* irreduzible Faktoren:

$$F(\xi^\varrho; z) = \prod_{i=1}^{s} F_i(\xi^\varrho; z) \tag{2}$$

Nun ist aber $F(\xi; z)$ auch irreduzibel über $K(\xi)$; denn sonst zerfiele es als separables Polynom in verschiedene Faktoren und es gäbe mehrere nichtisomorphe Komposita von K, K über k. Das ist aber nach Satz 6 und wegen der vorausgesetzten Körpereigenschaft des direkten Produkts der separablen Hüllen von k in K bzw. K unmöglich. Nach dem Henselschen Lemma und dem allgemeinen Verfahren zur Bestimmung der Fortsetzungsbewertungen entsprechen daher die Faktoren F_i eineindeutig den verschiedenen Fortsetzungen von $\mathfrak{p}_0$ auf die endliche Erweiterung $K(\xi; \eta)$ von $K(\xi)$. Da bei der rein-inseparablen Erweiterung $\mathfrak{K}|K(\xi, \eta)$ ein Primdivisor von $K(\xi, \eta)$ bekanntlich nur eine einzige Fortsetzung besitzt, entsprechen die Faktoren F_i also auch eineindeutig den Fortsetzungen $\mathfrak{p}_i$ $(i = 1, \ldots, s)$ von $\mathfrak{p}_0$ auf $\mathfrak{K}$, unter denen $\mathfrak{p}$ vorkommen muß. Mit $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_h$ erhält man offenbar wegen Gl. (2)

$$F_i(\xi^\varrho; \eta^\varrho) \begin{cases} = 0 \text{ für } i = h \\ \neq 0 \text{ für } i \neq h. \end{cases} \tag{3}$$

Wann sind nun die auf die angegebene Art aus einem irreduziblen Polynom $\varphi \in K[\xi]$ entspringenden Primdivisoren von $\mathfrak{K}$ nichtkonstant? Offenbar genau dann, wenn ξ^ϱ transzendent ist über k. Da (φ) das Ideal der $f(\xi) \in K[\xi]$ mit $f(\xi^\varrho) = 0$ ist, lautet also die gesuchte Bedingung

$$(\varphi) \cap k[\xi] = (0). \tag{4}$$

Sei jetzt $(\mathfrak{K}^*|k, \tau)$ ein abhängiges Kompositum von K, K über k. Ich frage nach denjenigen Primdivisoren, für die $(K\mathsf{K}^\varrho|k, \varrho)$ und $(\mathfrak{K}^*|k, \tau)$ isomorph sind. Dazu muß das Ideal $\mathfrak{n}$ der $f(\xi) \in K[\xi]$ mit $f(\xi^\tau) = 0$ übereinstimmen mit (φ). Das ergibt sich durch Anwendung des Isomorphismus σ von $K\mathsf{K}^\varrho|K$ auf $\mathfrak{K}^*|K$, für den $\varrho\sigma = \tau$ gilt. $\mathfrak{n}$ ist nun tatsächlich Hauptideal und bestimmt also φ bis auf einen Faktor aus K eindeutig. Da ξ^τ über k transzendent ist, erfüllt das so bestimmte φ auch die Bedingung (4). $\mathfrak{p}_0$ ist damit schon eindeutig bestimmt. Aus Gl. (2) folgt mittels σ die Gleichung $F(\xi^\tau; z) = \prod_{i=1}^{s} F_i(\xi^\tau; z)$. Die $F_i(\xi^\tau; z)$ sind dabei irreduzibel über $K(\xi^\tau)$ und untereinander verschieden. Daher bestimmt sich eindeutig ein Index h mit $F_h(\xi^\tau; \eta^\tau) = 0$. Anwendung von σ^{-1} und Vergleich mit Gl. (3) zeigt die eindeutige Bestimmtheit von $\mathfrak{p}$. Es ist nun noch zu beweisen, daß der so bestimmte Primdivisor auch wirklich das Verlangte leistet. $k(\xi, \eta)$ bezeichne ich zur Abkürzung mit Λ. Dann wird durch $\xi^\varrho \to \xi^\tau$, $\eta^\varrho \to \eta^\tau$ offenbar ein Isomorphismus σ von $K\Lambda^\varrho|K$ auf $K\Lambda^\tau|K$ erzeugt, für den $\varrho\sigma = \tau$ gilt. Also sind die Komposita $(K\Lambda^\varrho|k, \varrho)$, $(K\Lambda^\tau|k, \tau)$ isomorph. Der Hilfssatz von Seite 239 zusammen mit Satz 2 und der Tatsache, daß $\mathsf{K}^\tau|\Lambda^\tau$ rein-inseparabel ist, läßt die Isomorphie von $(K\mathsf{K}^\varrho|k, \varrho)$ und $(\mathfrak{K}^*|k, \tau)$ erkennen.

Einen entsprechenden Überblick über die konstanten Primdivisoren von $\mathfrak{K}$ liefert

Satz 8. *Ist k in K algebraisch abgeschlossen, so wird zwischen den konstanten Primdivisoren $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{K}|K$ und den Primdivisoren $\wp$ von $\mathsf{K}|k$ durch die Bedingung*

$$\mathsf{K}_\wp \subseteqq \mathfrak{K}_\mathfrak{p} \tag{5}$$

eine eineindeutige Zuordnung hergestellt.

Zusatz. *Falls außerdem $K|k(x)$ separabel oder $\mathsf{K}_\wp/\bar{\wp}$ einfache Erweiterung einer rein-transzendenten Erweiterung von k ist, gilt mit ϱ als dem Restklassenhomomorphismus von $\mathfrak{p}$ die Beziehung $\mathfrak{K}_\mathfrak{p}^\varrho = K\,\mathsf{K}_\wp^\varrho$.*

Beweis. Ist $w(\alpha)$ die zu $\mathfrak{p}$ gehörige Bewertung, so bilden die $w(\alpha)$ mit $\alpha \in \mathsf{K}$ einen Untermodul des Moduls der ganz-rationalen Zahlen. Da $\mathfrak{p}$ konstant ist, liegt K nicht in $\mathfrak{K}_\mathfrak{p}$. Der Untermodul enthält daher eine von 0 verschiedene Zahl. Es gibt also eine natürliche Zahl e so, daß

$$\omega(\alpha) = \frac{1}{e} \cdot w(\alpha) \tag{6}$$

die zu einem Primdivisor $\wp$ von K gehörige Bewertung ist. Man erkennt sofort die Richtigkeit von $\mathsf{K}_\wp = \mathfrak{K}_\mathfrak{p} \cap \mathsf{K}$. Für jeden Primdivisor $\wp'$ von K mit $\mathsf{K}_{\wp'} \subseteqq \mathfrak{K}_\mathfrak{p}$ gilt demnach $\mathsf{K}_{\wp'} \subseteqq \mathsf{K}_\wp$, also $\wp' = \wp$. Zu jedem konstanten Primdivisor $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{K}$ wird also durch Gl. (5) eindeutig ein Primdivisor $\wp$ von K bestimmt. Da jede Restklasse mod. $\bar{\wp}$ in genau einer Restklasse mod. $\mathfrak{p}$ enthalten ist, kann der Unterkörper $\mathsf{K}_\wp^\varrho$ von $\mathfrak{K}_\mathfrak{p}^\varrho$ als Restklassenkörper $\mathsf{K}_\wp/\bar{\wp}$ angesehen werden. Beachtet man noch, daß $\mathsf{K}_\wp^\varrho|k$ algebraisch ist, so folgt die algebraische Unabhängigkeit der x über $\mathsf{K}_\wp^\varrho$. Sind also $X_1, \ldots, X_r$ irgendwelche voneinander verschiedenen Potenzprodukte der x und die η_i Elemente aus $\mathsf{K}_\wp$, die nicht sämtlich in $\bar{\wp}$ liegen, so liegt auch $\sum_{i=1}^{r} \eta_i X_i \in \mathsf{K}_\wp[x]$ nicht in $\bar{\mathfrak{p}}$. Ist also für irgendein Element $\alpha = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i X_i$ $(\alpha_i \in \mathsf{K})$ aus $\mathsf{K}[x]$ gerade $\omega(\alpha_h) = \operatorname{Min}_i (\omega(\alpha_i))$, so folgt in Verbindung mit Gl. (6)

$$w(\alpha) = w\left(\frac{\alpha}{\alpha_h}\right) + w(\alpha_h) = w(\alpha_h) = e \cdot \operatorname{Min}_i (\omega(\alpha_i)).$$

Definiert man daher noch die Funktion $w_0(\alpha)$ für $\alpha \in \mathsf{K}(x)$ durch

$$w_0\left(\frac{\sum \alpha_i X_i}{\sum \beta_i X_i}\right) = \operatorname{Min}_i (\omega(\alpha_i)) - \operatorname{Min}_i (\omega(\beta_i)), \tag{7}$$

so gilt

$$w(\alpha) = e \cdot w_0(\alpha) \quad (\alpha \in \quad (x)). \tag{8}$$

Weil unter den $w_0(\alpha)$ jede ganz-rationale Zahl vorkommt, gehört $w_0(\alpha)$ nach Gl. (8) als Bewertung zu dem Primdivisor $\mathfrak{p}_0$ von $\mathsf{K}(x)$, dessen Fortsetzung $\mathfrak{p}$ ist. Zufolge Gl. (7) ist nun $\mathfrak{p}_0$ durch $\wp$ festgelegt. Dabei ist $\mathsf{K}_\wp^\varrho(x)$ offenbar der Restklassenkörper von $\mathfrak{p}_0$. Um nun noch zu zeigen, daß es zu $\mathfrak{p}_0$ nur einen Primdivisor $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{K}$ als Fortsetzung gibt, genügt es, die Eindeutigkeit der Fortsetzung von $\mathfrak{p}_0$ auf die separable Hülle $\mathfrak{L}$ von $\mathsf{K}(x)$ in $\mathfrak{K}$ zu beweisen; denn bei rein-inseparablen Erweiterungen ist die Fortsetzung eindeutig. Mit L als separabler Hülle von $k(x)$ in K ist natürlich $\mathfrak{L} = L\,\mathsf{K}$. Bekanntlich gibt es nur endlich viele verschiedene Primdivisoren $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ von $\mathfrak{L}|L$, die Fortsetzungen von $\mathfrak{p}_0$ sind, und der Durchschnitt $\mathfrak{L}_0$ der Bewertungsringe $\mathfrak{L}_{\mathfrak{p}_i}$ besteht aus allen über dem Bewertungsring $\mathsf{K}(x)_{\mathfrak{p}_0}$ ganz-algebraischen Elementen aus $\mathfrak{L}$. Ich behaupte nun, daß eine Basis von $L|k(x)$, die nach Satz 4 auch Basis von $\mathfrak{L}|\mathsf{K}(x)$ ist, sogar Basis von $\mathfrak{L}_0|\mathsf{K}(x)_{\mathfrak{p}_0}$ ist. Es genügt offenbar, den Beweis für den Fall einer endlichen separablen Erweiterung $L|k(x)$ zu führen. Es sei also $1, y, \ldots, y^{r-1}$ eine Basis von $L|k(x)$ und $\eta = \sum_{i=0}^{r-1} \eta_i y^i$

$(\eta_i \in \mathsf{K}(x))$ ein Element von $\mathfrak{L}_0$. In einer passenden separablen Erweiterung von $\mathfrak{L}$ seien ferner $y', \ldots, y^{(r-1)}$ die Konjugierten von y bez. $k(x)$. Dann sind mit η auch die

$$\eta^{(\nu)} = \sum_{i=0}^{r-1} \eta_i \, y^{(\nu) i}$$

ganz-algebraisch über $\mathsf{K}(x)_{\mathfrak{p}_0}$. Diese Gleichungen zusammen mit der Definitionsgleichung für η lassen sich wegen des Nichtverschwindens der Determinante $|y^{(\nu) i}|_{\nu, i = 0, \ldots, r-1}$ nach den η_i auflösen. Damit sind diese ebenfalls ganz-algebraisch über $\mathsf{K}(x)_{\mathfrak{p}_0}$. Als Bewertungsring ist $\mathsf{K}(x)_{\mathfrak{p}_0}$ jedoch algebraisch abgeschlossen in $\mathsf{K}(x)$, so daß $\eta_i \in \mathsf{K}(x)_{\mathfrak{p}_0}$ folgt, was zu beweisen war. Aus dem Bewiesenen ergibt sich nun, daß der Restklassenring von $\mathfrak{L}_0$ nach dem Erweiterungsideal $\bar{\mathfrak{p}}\,\mathfrak{L}_0$ von $\bar{\mathfrak{p}}$ isomorph zur Algebra $L_{\mathsf{K}_{\mathfrak{p}}^{e}(x)}$ ist, die durch die Grundkörpererweiterung $\mathsf{K}_{\mathfrak{p}}^{e}(x)|k(x)$ aus $L|k(x)$ entsteht. Da k in L algebraisch abgeschlossen und $L|k(x)$ separabel ist, sind nach Satz 4 in einem unabhängigen Kompositum $(\mathfrak{K}^*|k, \tau)$ von $\mathsf{K}_{\mathfrak{p}}^{e}$, L über k die Körper $\mathsf{K}_{\mathfrak{p}}^{e}$ und L^{τ} linear fremd. $L_{\mathsf{K}_{\mathfrak{p}}^{e}(x)}$ ist daher isomorph zu $\mathfrak{K}^*$ und $\mathfrak{L}_0/\bar{\mathfrak{p}}\mathfrak{L}_0$ somit ein Körper. $\mathfrak{L}_0$ kann also nicht Durchschnitt von mehreren verschiedenen Bewertungsringen sein: $\mathfrak{p}$ ist durch $\mathfrak{p}$ eindeutig bestimmt.

Um nun an dieser Stelle gleich den Zusatz zu beweisen, kann man sich offenbar auf den Fall einer endlichen Erweiterung $K|k(x)$ beschränken. Da $\mathsf{K}_{\mathfrak{p}}^{e}|k$ sowohl wie $K\,\mathsf{K}_{\mathfrak{p}}^{e}|K$ algebraisch sind, stellt $K\,\mathsf{K}_{\mathfrak{p}}^{e}$ ein unabhängiges Kompositum von K, $\mathsf{K}_{\mathfrak{p}}^{e}$ über k dar. Aus den Voraussetzungen des Zusatzes folgt daher nach Satz 4, daß K und $\mathsf{K}_{e}^{\mathfrak{p}}$ linear fremd sind. Daher ist

$$(\mathfrak{K}_{\mathfrak{p}}^{e} : \mathsf{K}_{\mathfrak{p}}^{e}(x)) \geq (K\,\mathsf{K}_{\mathfrak{p}}^{e} : \mathsf{K}_{\mathfrak{p}}^{e}(x)) = (K : k(x)) \geq (\mathfrak{K} : \mathsf{K}(x)).$$

Andererseits gilt aber nach der Verzweigungstheorie mit e als dem Verzweigungsexponenten von $\mathfrak{p}$ bez. $\mathsf{K}(x)$

$$(\mathfrak{K} : \mathsf{K}(x)) = e \cdot (\mathfrak{K}_{\mathfrak{p}}^{e} : \mathsf{K}_{\mathfrak{p}}^{e}(x)).$$

Aus beiden Beziehungen zusammen folgt nun $e = 1$ und $\mathfrak{K}_{\mathfrak{p}}^{e} = K\,\mathsf{K}_{\mathfrak{p}}^{e}$, was zu beweisen war.

Um den Beweis von Satz 8 zu vollenden, ist unter Berücksichtigung des bisher Gezeigten nur noch nachzuweisen, daß für einen Primdivisor $\mathfrak{p}$ von K durch Gl. (7) ein Primdivisor $\mathfrak{p}_0$ von $\mathsf{K}(x)|k(x)$ erzeugt wird[9]). Man braucht dazu offenbar nur die Homomorphieeigenschaft und Bedingung I (S. 240) für $w_0(\alpha)$ nachzuweisen. Bekanntlich darf man sich dabei auf Elemente $\alpha \in \mathsf{K}[x]$ beschränken. Mit $X_1, \ldots, X_r$ als verschiedenen Potenzprodukten der x sei $\alpha = \sum \alpha_i X_i$ und $\beta = \sum \beta_i X_i$. Dann gilt

$$w_0(\alpha + \beta) = \operatorname*{Min}_i \, \omega(\alpha_i + \beta_i) \geq \operatorname*{Min}_i \operatorname{Min}(\omega(\alpha_i), \ \omega(\beta_i)) = \operatorname{Min}(w_0(\alpha), w_0(\beta)),$$

also Bedingung I. Zum Nachweis der Homomorphieeigenschaft nehme ich die Potenzprodukte $X_1, \ldots, X_r$ als lexikographisch geordnet an. Aus

$$X_h X_k = X_i X_j, \quad h \neq i \tag{9}$$

folgt dann entweder $i < h$, $j > k$ oder $i > h$, $j < k$. Ist daher h der kleinste Index mit $\omega(\alpha_h) = w_0(\alpha)$ und k der kleinste Index mit $\omega(\beta_k) = w_0(\beta)$, so gilt $\omega(\alpha_i \beta_j) > w_0(\alpha) + w_0(\beta)$ für alle Paare i, j, welche Gl. (9) erfüllen. Für den Koeffizienten $\gamma = \alpha_h \beta_k + \sum \alpha_i \beta_j$ (Summierung über alle Paare i, j mit Gl. (9)) in der Entwicklung von $\alpha\beta$ als Polynom

[9]) Die Bewertung w_0 wird für den Fall, daß $K|k$ den Transzendenzgrad 1 hat, verwandt bei M. Deuring, Reduktion algebraischer Funktionenkörper nach Primdivisoren des Konstantenkörpers, Math. Z. 47, 643—654 (1942), insbes. 644.

in den x erhalte ich also $\omega(\gamma) = w_0(\alpha) + w_0(\beta)$. Da alle anderen Koeffizienten aber mindestens diesen ω-Wert besitzen, ist $w_0(\alpha\beta) = w_0(\alpha) + w_0(\beta)$.

Die Sätze 7 und 8 sind im wesentlichen die Sätze 2 und 1 bei Deuring[1]). Dort werden sie aber unter Verwendung einer Basis von $\mathsf{K}_\xi | k[\xi]$ bewiesen, die zugleich Basis von $\mathfrak{K}_\xi | K[\xi]$ ist, wobei K_ξ und $\mathfrak{K}_\xi$ die Ringe der über $k[\xi]$ bzw. $K[\xi]$ ganz-algebraischen Elemente von K bzw. $\mathfrak{K}$ sind. Eine Basis von $\mathsf{K}_\xi | k[\xi]$ gibt es nach F. K. Schmidt[10]) immer. Damit sie zugleich Basis von $\mathfrak{K}_\xi | K[\xi]$ ist, müssen notwendigerweise K und K in $\mathfrak{K}$ linear fremd sein. Aber selbst unter dieser Bedingung, die wesentlich schärfer ist als die Voraussetzung von Satz 7, kann es vorkommen, daß die betreffende Basis nicht Basis von $\mathfrak{K}_\xi | K[\xi]$ ist. In einem solchen Falle gilt dann offenbar dasselbe für *jede* Basis von $\mathsf{K}^\xi | k[\xi]$. Als Beispiel bilde ich

4. k und K wie in Beispiel 3 auf Seite 238, $p > 2$,

$$\mathsf{K} = k(\xi, \eta, \zeta) \quad \text{mit} \quad \eta^p = u\xi^p + v, \; \zeta^2 = \xi^p - u.$$

Da k in K algebraisch abgeschlossen und $\mathsf{K} | k(\xi)$ einfach ist, sind nach Satz 4 K und K linear fremd in $\mathfrak{K} = K(\xi, \eta, \zeta)$. $1, \zeta$ bilden offenbar eine Basis von $k(\xi, \zeta)_\xi | k[\xi]$. Die $\omega_1, \ldots, \omega_p$ seien die Elemente einer Basis von $k(\xi, \eta)_\xi | k[\xi]$. Aus $\alpha + \beta\zeta \in K_\xi$ mit $\alpha, \beta \in k(\xi, \eta)$ folgt durch Spur- und Normbildung, daß α sowohl wie $\beta^2(\xi^p - u)$ in $k(\xi, \eta)_\xi$ liegen. Für einen Primdivisor $\mathfrak{p}$ von $k(\xi, \eta)$, dessen Bewertung w den Bedingungen $w(\xi) \geqq 0$ und $w(\beta) < 0$ genügt, ist also $w(\xi^p - u) > 0$. Da der Restklassenkörper von $\mathfrak{p}$ die p-te Wurzel aus u sowohl wie aus v enthält, ist $\mathfrak{p}$ unverzweigt über $k(\xi)$, also $w(\xi^p - u) = 1$. $w(\beta) \leqq -1$ liefert dann den Widerspruch $w(\beta^2(\xi^p - u)) < 0$. Daher gibt es keinen derartigen Primdivisor $\mathfrak{p}$, β liegt ebenfalls in $k(\xi, \eta)_\xi$ und die Elemente $\zeta^i \omega_k$ $(i = 0, 1; k = 1, \ldots, p)$ bilden eine Basis von $\mathsf{K}_\xi | k[\xi]$. Mit der Abkürzung $y = (ux^p + v)^{1/p}$ liegt nun

$$\zeta' = \frac{\zeta}{\xi^p - u}\left(\xi - \frac{y - \eta}{x - \xi}\right)^{\frac{p+1}{2}}$$

in $\mathfrak{K}_\xi$, denn $\zeta'^{2p} = \xi^p - u$. In der Entwicklung von ζ' nach den $\zeta^i \omega_k$ ergibt sich nun mit $\eta^i = \sum_k f_{ik}(\xi)\,\omega_k$ der Koeffizient von $\zeta\,\omega_k$ zu

$$(\xi^p - u)^{-1} \cdot (x - \xi)^{-\frac{p+1}{2}} \cdot \sum_{i=0}^{\frac{p+1}{2}} \binom{\frac{p+1}{2}}{i} f_{ik}(\xi)\,[\xi(x - \xi) - y]^{\frac{p+1}{2} - i}.$$

Läge dieser in $K[\xi]$, so müßte $\sum_{i=0}^{\frac{p+1}{2}} \binom{\frac{p+1}{2}}{i} f_{ik}(x)\,(-y)^{\frac{p+1}{2} - i} = 0$ sein. Da die auftretenden Binomialkoeffizienten sämtlich nicht verschwinden, y über $k(x)$ den Grad p hat und zu jedem i ein k mit $f_{ik}(x) \neq 0$ vorhanden ist, läßt sich daher das Element $\zeta' \in \mathfrak{K}_\xi$ durch die $\zeta^i \omega_k$ nicht mit Koeffizienten aus $K[\xi]$ darstellen. Die $\zeta^i \omega_k$ bilden also keine Basis von $\mathfrak{K}_\xi | K[\xi]$, was zu beweisen war. Übrigens ist k auch in K algebraisch abgeschlossen. Wegen der algebraischen Abgeschlossenheit von k in $k(\xi, \eta)$ und in $k(\xi, \zeta)$ sind nämlich für ein über k algebraisches Element $\alpha \in \mathsf{K}$ nach Satz 4 die Körper $k(\alpha)$, $k(\xi, \eta)$ sowohl wie die Körper $k(\alpha)$, $k(\xi, \zeta)$ linear fremd. Eine Basis von $k(\alpha)|k$ ist also auch Basis von $k(\xi, \eta, \alpha)|k(\xi, \eta)$ und $k(\xi, \zeta, \alpha)|k(\xi, \zeta)$. Da α nun über $k(\xi, \eta)$ separabel und über $k(\xi, \zeta)$ rein-inseparabel sein muß, liegt es in k, was zu beweisen war.

Bei Deuring wird in Satz 2 noch bewiesen, daß $\mathfrak{K}_\mathfrak{p}^\varrho = K\,\mathsf{K}^\varrho$ ist. Allein aus der in Satz 7 gemachten Voraussetzung läßt sich diese Beziehung nun nicht herleiten, ja

[10]) F. K. Schmidt, Über die Erhaltung der Kettensätze der Idealtheorie bei beliebigen endlichen Körpererweiterungen, Math. Z. **41**, 443—450 (1936), insbes. 445.

noch nicht einmal dann, wenn man die schärfere Voraussetzung macht, daß K, K in $\mathfrak{K}$ linear fremd sind. Ich zeige das an folgendem Beispiel, in welchem k der Körper der rationalen Funktionen über dem Primkörper der Primzahlcharakteristik p in den Variablen u, v, w ist:

5. $K = k(x, y)$ mit $y^p = ux^p + v$,
$\mathsf{K} = k(\xi, \eta, \zeta)$ mit $\eta^p = u\xi^p + v$, $\zeta^p = (w + \xi)\,\xi^p + u$.

Mit $u' = \frac{y-\eta}{x-\xi}$, $v' = \eta - u'\,\xi$, $\zeta' = \frac{\zeta - u'}{\xi}$ wird demnach

$$\mathfrak{K} = K(\xi, u', \zeta'),\ u'^p = u,\ v'^p = v,\ \zeta'^p = w + \xi.$$

Da $k(u', v')$ in $\mathsf{K}(u') = k(u', v', \zeta')$ algebraisch abgeschlossen ist, liegt auch jedes über k algebraische Element $\alpha \in \mathsf{K}$ in $k(u', v')$, und ich erhalte $\alpha = \sum_{i=0}^{p-1} f_i(\xi, \eta)\, u'^i$, $f_i \in k[\xi, \eta]$. Wegen $(k(u', v', \zeta') : k(\xi)) = p^3 > (\mathsf{K} : k(\xi))$ liegt u' nicht in K. Es folgt also $f_i = 0$ für $i > 0$ und, da k in $k(\xi, \eta)$ algebraisch abgeschlossen ist, $\alpha \in k$. k ist demnach in K algebraisch abgeschlossen, weshalb nach Satz 4 K und K linear fremd sind. Für den Primdivisor $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{K}$ mit $x - \xi \in \overline{\mathfrak{p}}$ gilt offenbar $\mathfrak{K}_{\mathfrak{p}}^{e} = K(u^{1/p}, (w + x)^{1/p})$. Andererseits ist aber $\mathsf{K}^e = K(((w + x)\, x^p + u)^{1/p})$, also $K\,\mathsf{K}^e \subset \mathfrak{K}_{\mathfrak{p}}^{e}$.

In Satz 8 kann i. a. die Voraussetzung der algebraischen Abgeschlossenheit von k in K nicht fortgelassen werden. Man erkennt das bereits aus dem folgenden einfachen Beispiel:

6. $k =$ Körper der rationalen Zahlen,
$K = k(\sqrt{2})$, $\mathsf{K} = k(\xi, \eta)$ mit $\eta^2 = \xi + 2$.

In K gibt es dann genau einen Primdivisor $\wp$ mit $\xi \in \overline{\wp}$, in $\mathfrak{K} = K(\xi, \eta)$ aber zwei konstante Primdivisoren $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ mit $\xi \in \overline{\mathfrak{p}}_i$, und für beide gilt offenbar $\mathsf{K}_{\wp} \subseteqq \mathfrak{K}_{\mathfrak{p}_i}$; d. h. durch Gl. (5) wird keine eineindeutige Zuordnung hergestellt.

Die Behauptung des Zusatzes von Satz 8 ist natürlich — wie aus dem Beweis hervorgeht — bereits erfüllt, wenn k algebraisch abgeschlossen ist und die Körper K, $\mathsf{K}_{\wp}^{e}$ linear fremd sind. Daß selbst bei in K *und* K algebraisch abgeschlossenem Körper k ohne weitere Voraussetzung die Behauptung nicht zu stimmen braucht, zeigt das Beispiel 5: Für den Primdivisor $\wp$ von K mit $\xi \in \overline{\wp}$ gilt offenbar $\mathsf{K}_{\wp}^{e} = k(u^{1/p}, v^{1/p})$, während der zugehörige Primdivisor $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{K}$ die Beziehung $\mathfrak{K}_{\mathfrak{p}}^{e} = K(u^{1/p}, w^{1/p}) \supset K\,\mathsf{K}_{\wp}^{e}$ ergibt. Andererseits ist auch $\mathfrak{K}_{\mathfrak{p}}^{e} = K\,\mathsf{K}_{\wp}^{e}$ möglich, ohne daß K, $\mathsf{K}_{\wp}^{e}$ linear fremd sind: In Beispiel 4 gibt es genau einen Primdivisor $\wp$ von K mit $\omega(\zeta) = w_0(\zeta) = 1$[11]. Wegen $\zeta = \zeta'^p$ und $(\mathfrak{K} : \mathsf{K}(x)) = p$ hat nun $\mathfrak{p}$ den Verzweigungsexponenten $e = p$ bez. $\mathsf{K}(x)$, und es ist $\mathfrak{K}_{\mathfrak{p}}^{e} = \mathsf{K}_{\wp}^{e}(x) = K\,\mathsf{K}_{\wp}^{e}$. K und $\mathsf{K}_{\wp}^{e}$ sind aber nicht linear fremd, weil sonst ja nach dem Beweis des Zusatzes von Satz 8 $e = 1$ folgen würde.

[11]) ω und w_0 haben hier dieselben Bedeutungen wie im Beweis von Satz 8.

Eingegangen 31. Januar 1949.

Über Gitterpunkte in Parallelepipeden.

Von *Edmund Hlawka* in Wien.

§ 1.

Einleitung. Es soll folgender Satz bewiesen werden:

Es seien im R_n n linear unabhängige Vektoren $a_1, \ldots, a_n$ und eine positive Zahl V vorgegeben. Dann gibt es stets ein Parallelepiped P mit dem Volumen V, mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung 0, dessen Seitenflächen die Normalenrichtungen $a_1, \ldots, a_n$ haben, so daß die Anzahl der verschiedenen Gitterpunktpaare $\pm g \neq 0$, welche in P liegen, höchstens $A_n V$ ist, wo $A_n = \frac{1}{n}(n!)^2 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ ist.

Es ist also A_n von V und den $a_1, \ldots, a_n$ unabhängig. Es ist klar, daß nicht jedes Parallelepiped mit vorgegebenen Volumen und Normalenrichtungen diese Eigenschaft hat. Dies zeigt schon das Rechteck mit den Seitenflächen $NF, \frac{1}{N}$ (N, F natürliche Zahlen), welches mindestens N Gitterpunkte enthält und den Inhalt F hat, wo also die Anzahl der Gitterpunkte mit N wächst. Ist $V < A_n^{-1}$, so enthält das obige Parallelepiped P keine Gitterpunkte $\neq 0$. Dies ist ein Satz, der zuerst von Mordell[1]) formuliert wurde. Es wäre wichtig, das kleinste A_n zu kennen, für welches der Satz noch gilt.

Der Beweis verwendet die Methode, die C. L. Siegel[2]) für den inhomogenen Linearformensatz angewendet hat.

Die Hilfssätze, welche weiter unten entwickelt werden, sind in weiterer Fassung ausgesprochen, als es für den Beweis des Satzes notwendig wäre, da sie auch eine selbständige Bedeutung haben.

Am Schlusse der Arbeit wird noch eine Verallgemeinerung des Satzes für beliebige konvexe Körper mit Mittelpunkt besprochen.

§ 2.

Hilfssatz 1. *Es sei K ein konvexer Körper vom Volumen V, der den Ursprung 0 im Innern enthält. Weiter enthalte K eine Menge $\mathfrak{M}$ von k Punkten $\neq 0$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. *$\mathfrak{M}$ liege nicht in einem R_{n-1} durch 0,*
2. *Sind x' und x Punkte von $\mathfrak{M}$ und ist $x' = \lambda x$ $(\lambda > 1)$, so gehört auch $x' - x$ der Menge an.*

---

[1]) *L. J. Mordell*, Note on an arithmetical problem on linear forms, Journal London Math. Soc. **12** (1937).

[2]) *H. Davenport*, Note on a result of Siegel, Acta Arithmetica **2** (1937).

Es sei $D = \mathrm{Min}\,|\mathrm{Det.}(x_1, \ldots, x_n)|$ *erstreckt über alle n-tupel linear unabhängiger Punkte von* $\mathfrak{M}$. *Dann ist*

$$V \geq \frac{k-n+1}{n!} D. \tag{1}$$

Bemerkung. Sind die x Gitterpunkte, so ist (2) von selbst erfüllt und $V > \frac{k-n+1}{n!}$. Für diesen Spezialfall wurde der Satz von Blichfeldt[3]) ohne Beweis aufgestellt.

Ist $k=n$ und K symmetrisch, so gilt schärfer, wie allgemein bekannt,

$$V \geq \frac{2^n}{n!}. \tag{2}$$

Eine entsprechende Verschärfung des Satzes wäre wünschenswert.

Beweis. Die k Punkte seien auf s Halbstrahlen $g_1, \ldots, g_s$ durch 0 verteilt. Es muß $s \geq n$ sein. Auf g_i mögen k_i Punkte liegen. Dann ist $\sum_{i=1}^{s} k_i = k$. Ist $\bar{x}_i$ der Punkt auf g_i, der 0 am nächsten liegt, so gehören, wegen Eigenschaft 2, genau die k_i Punkte $j\bar{x}_i$ $(1 \leq j \leq k_i)$ von g_i zu $\mathfrak{M}$. Wir schlagen nun um 0 eine so kleine Kugel $\bar{K}$, daß sie ganz in K liegt und betrachten die Schnittpunkte $\bar{p}_i$ der g_i mit $\bar{K}$. Es werde nun die konvexe Hülle P der $\bar{p}_i$ und 0 gebildet. $\bar{P}$ ist ein Polyeder und alle $\bar{p}_i$ sind Eckpunkte, denn sie sind extreme Punkte von P. Außer den $\bar{p}_i$ kann höchstens noch 0 Eckpunkt sein. Die Seitenflächen von $\bar{P}$, die 0 nicht enthalten, bezeichnen wir allgemein mit $\bar{S}$. Jedes $\bar{S}$ kann nun so in Simplizes S' zerlegt werden, daß die Eckpunkte der Simplizes Eckpunkte von $\bar{S}$ sind und alle Eckpunkte von $\bar{S}$ dabei auftreten, wie man durch Induktion nach den Dimensionen zeigt. Wir bilden nun die Simplizes $0S' = S''$, welche eine Zerlegung Z von P bilden. Aus diesen Simplizes S'' können wir nun $l = s-n+1$ Simplizes $S_1'', \ldots, S_l'$ so herausgreifen, daß $S_1'', \ldots, S_j''$ für jedes $j \leq l$ genau $j+n-1$ verschiedene Eckpunkte $\bar{p}$ besitzen. Dies zeigt man durch vollständige Induktion. Für $j=1$ erfüllt dies jedes Simplex S''. Sind schon $S_1'', \ldots, S_j''$ $(j<l)$ gefunden, so überlegen wir so: Es muß in $\bar{P}$ sicher mindestens ein weiteres Simplex auftreten, sogar eines, welches einen Eckpunkt besitzt, der nicht schon Eckpunkt der S_i'' $(i \leq j)$ war, denn die Anzahl der verschiedenen Eckpunkte der S_i'' ist $j+n-1 < s$. Es muß daher Simplizes S'' geben, die eine Seitenfläche mit einem der S_i'' $(i \leq j)$ gemeinsam haben, da $\bar{P}$ konvex ist. Hat eines davon einen Eckpunkt, der noch nicht vorkommt, so nehmen wir dieses S'' als S_{j+1}''. Wenn nicht, so betrachten wir die Simplizes (welche sicher vorhanden sind), die mit diesen S'' eine Seitenfläche gemeinsam haben. Nach endlich vielen Schritten muß dann ein Simplex auftreten, so beschaffen, daß $n-1$ seiner Eckpunkte $\bar{P}$ unter denen von S_i'' $(i \leq j)$ vorkommen und ein weiterer von diesen verschieden ist. Dieses nehmen wir als S_{j+1}''.

Wir betrachten nun die Simplizes S_j $(1 \leq j \leq l)$, die aus den S_j'' dadurch hervorgehen, daß wir die Eckpunkte $\bar{p}_i$ von S_j'' durch $p_i = k_i \bar{x}_i$ ersetzen, welche alle in K liegen.

Nun gilt für das Volumen $V(S)$ eines solchen Simplex mit den Eckpunkten p_i $(1 \leq i \leq n)$:

$$V(S) \geq \frac{1}{n!} k_1 \cdots k_n D,$$

und es ist

$$k_1 \cdots k_n \geq k_1 + \cdots + k_n - n + 1 \geq \mathrm{Max}\,(k_1, \ldots, k_n),$$

wie man leicht durch Induktion nach n zeigt, da $k_i \geq 1$ ist. Folglich ist

$$n!\,V(S_1 + \cdots + S_l) = n!\,(V(S_1) + \sum_{i=2}^{l} V(S_i)) \geq k_1 + \cdots + (k_n - n + 1 + \sum_{i=2}^{l} k_{n+i-1}) D,$$

also $V(K) \geq \frac{k-n+1}{n!} D$, w. z. b. w.

---

[3]) Vgl. *Koksma*, Diophantische Approximationen, Ergebnisse der Math. 4 (1936), 22.

§ 3.

Es sei nun K ein konvexer Körper mit Mittelpunkt in 0 . Es sei $f(x)$ seine Distanzfunktion und J das Volumen des Eichkörpers $f \leq 1$. Weiter sei $l \geq 1$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir definieren nun n Zahlen M_{li} so: Ist q eine Zahl mit $0 \leq q < M_{li}$, so besitze der durch $f \leq q$ bestimmte Körper K_q mindestens eine der beiden Eigenschaften:

a) die Anzahl der Gitterpunktpaare $\neq 0$ in K_q ist $< l$,

b) die Anzahl der linear unabhängigen Gittervektoren in K_q ist $< i$.

Ist q eine Zahl mit $q \geq M_{li}$, so enthalte K_q mindestens l Gitterpunktpaare $\neq 0$ und die Anzahl der linear unabhängigen ist $\geq i$. Dadurch sind die M_{li} eindeutig bestimmt und es muß $M_{li} \leq M_{l,i+1}$ sein. Für M_{l1} ist Eigenschaft b) in a) enthalten, also enthält $f \leq M_{l1}$ im Innern höchstens $l-1$ Gitterpunktpaare $\neq 0$, aber mit Einschluß des Randes mindestens l Paare. Die Anzahl der linear unabhängigen, die in $f \leq M_{l1}$ liegen, sei s. Es seien dies die Punkte $m_1, \ldots, m_s$. Dann ist $M_{l1} = \cdots = M_{ls}$. Für alle Körper $f \leq q < M_{lj}$ $(j > s)$ gilt dann stets die Eigenschaft b), wenn $q \geq M_{l1}$. Wir definieren nun weitere Gitterpunkte $m_{s+1}, \ldots, m_n$ so, daß alle Gitterpunkte im Innern von $f \leq M_{lj}$ $(j > s)$ von $m_1, \ldots, m_{j-1}$ abhängig sind, während m_j ein Gitterpunkt am Rande ist, welcher linear unabhängig von $m_1, \ldots, m_{j-1}$ ist. Ein solcher muß nach Definition existieren. Diese n Vektoren $m_1, \ldots, m_n$ sind linear unabhängig. (Genauer müßte m_{li} $(i=1, 2, \ldots, n)$ geschrieben werden.) Diese m_i sind aber nicht eindeutig bestimmt. Wir beweisen nun den folgenden

Hilfssatz 2. *Es ist*

$$\frac{l}{n!} < J M_{l1} \cdots M_{ln} \leq 2^n l. \tag{3}$$

Bemerkung. Ist $l=1$, so ist dies der Minkowskische Satz über die sukzessiven Minima. Hier kann $\frac{1}{n!}$ durch $\frac{2^n}{n!}$ ersetzt werden. Auch für $l > 1$ könnte die untere Abschätzung leicht verbessert werden, doch verzichten wir darauf. Die obere Abschätzung wird der Vollständigkeit halber hergeleitet.

Beweis. Zuerst soll die untere Abschätzung bewiesen werden. Wir betrachten den Eichkörper $\bar{K}$ mit $f \leq 1$. Sind $\pm g$ die Gitterpunktpaare, die in $f \leq M_{l1}$ liegen, so liegen die Punkte $\pm \frac{1}{M_{l1}} g$ in $\bar{K}$. Ebenso liegen $\pm \frac{1}{M_{li}} m_i$ $(i > s)$ in $\bar{K}$. Die Gesamtzahl dieser beiden Punktgattungen sei $k = 2r$. Es ist $r \geq l + n - s$. Weiter enthält die Menge dieser Punkte n linear unabhängige Punkte, nämlich $\frac{1}{M_{li}} m_i$ $(i=1, \ldots, n)$. Die Punkte der ersten Art sind nur linear abhängig von $\frac{1}{M_{l1}} m_i$ $(i=1, \ldots, s)$, die Punkte zweiter Art voneinander linear unabhängig. Ist $x' = \lambda x$ $(\lambda > 1)$, so müssen also beide von erster Art sein und es ist

$$f(x'-x) = (\lambda - 1) f(x) < f(x') \leq 1,$$

also, da diese x, x' von der Gestalt $\frac{1}{M_{l1}} g$ sind, so ist $x'-x$ ebenfalls von dieser Gestalt, also $\pm g$ in $f(x) \leq M_{l1}$. Die Menge erfüllt also beide Voraussetzungen des Hilfssatzes 1. Daraus folgt

$$J \geq \frac{2r-n+1}{n!} D.$$

Nun ist $D^{-1} \leq M_{l1} \cdots M_{ln}$. Weiters ist $r \geq l$ und $\geq n$, also

$$J M_{l1} \cdots M_{ln} > \frac{l}{n!},$$ w. z. b. w.

Jetzt soll die rechte Seite von (3) bewiesen werden. Wir gehen so vor, wie dies Davenport[4]) für den Fall $l=1$ getan hat. Wir führen neue Gittervektoren $l_1, \ldots, l_n$ ein, durch Adaption aus den m_i gebildet. Es ist Det. $(l_1, \ldots, l_n)=1$. Durch eine unimodulare Transformation gehen die l_i in die i-ten Einheitsvektoren e_i über. Nach Definition enthält K_i, d. h. $f \leq M_{li}$, für $i > s$ mindestens einen Gitterpunkt am Rande, der von $m_1, \ldots, m_{i-1}$ linear unabhängig ist, aber keinen solchen im Innern. Also gilt für die Koordinaten $(x^1, \ldots, x^n)$ aller Gitterpunkte mit $f < M_{li}$ $(i > s)$:

$$x^i = \ldots = x^n = 0.$$

Dies kann auch so ausgesprochen werden: Sind x und y zwei beliebige Punkte im Innern von K_i und ist $x \equiv y\,(2)$, d. h. $x^j \equiv y^j\,(2)$ $(j=1, \ldots, n)$, so ist $x^j = y^j$ $(j \geq i)$, denn dann ist $\frac{1}{2}(x-y)$ Gitterpunkt. Wir definieren nun weitere (nicht notwendig konvexe) Körper L_i rekursiv $(i=s, \ldots, n)$ so: Es sei $L_s = K_s$. Ist L_{i-1} $(i > s)$ bereits definiert, so bestimmen wir uns $i-1$ stetige Funktionen $f_j(x^i, \ldots, x^n)$, $1 \leq j \leq i-1$ so, daß $(f_1, \ldots, f_{i-1}, x^i, \ldots, x^n)$ in K_{i-1} liegt. Dann sei L_i die Menge aller Punkte $\bar{x}$ von der Gestalt

$$(4) \qquad \bar{x}^j = \begin{cases} x^j + \left(\dfrac{M_{li}}{M_{l,i-1}} - 1\right) f_j(x^i, \ldots, x^n), & \text{wenn } 1 \leq j \leq i-1 \\ \dfrac{M_{li}}{M_{l,i-1}}\, x^j, & \text{wenn } i \leq j \leq n, \end{cases}$$

wo die $(x^1, \ldots, x^n)$ alle Punkte von L_{i-1} durchlaufen. Von diesen Körpern L_i stellt man sofort folgendes durch vollständige Induktion fest: $L_i \subset K_i$ $(i \geq s)$. Denn mit $(x^1, \ldots, x^n)$ und $(f_1, \ldots, f_{i-1}, x^i, \ldots, x^n)$, welche in L_{i-1}, also im konvexen Körper K_{i-1} liegen, liegt $(\bar{x}^1, \ldots, x^n)$ in K_i. Außerdem ist das Volumen

$$V(L_i) = \left(\frac{M_{li}}{M_{l,i-1}}\right)^{n-i+1} V(L_{i-1}) \quad (i > s)$$

also $V(L_n) = J\, M_{l1} \cdots M_{ln}$, da $V(L_s) = V(K_s) = J\, M_{l1}^n$.

Weiter gilt folgende Eigenschaft E: Sind $\bar{x}$, $\bar{y}$ zwei Punkte von L_i und x, y die Punkte aus L_{i-1}, die nach (4) zu $\bar{x}$, $\bar{y}$ gehören, und ist $\bar{x}^j = \bar{y}^j$ $(j=i, i+1, \ldots, n)$, so ist

$$\bar{x} - \bar{y} = x - y.$$

Jetzt kann die obere Abschätzung von (3) leicht gezeigt werden. Wir führen den Beweis indirekt. Es werde also angenommen, es sei

$$(5) \qquad J\, M_{l1} \cdots M_{ln} > 2^n l.$$

Nun ist die linke Seite von (5) gerade das Volumen von K_n. Dann enthält nach einem bekannten Satz von Blichfeldt[5]) L_n im Innern $l+1$ Punkte x_j, y $(j=1, \ldots, l)$, so daß

$$(6) \qquad x_j \equiv y\,(2) \quad (j=1, \ldots, l).$$

Daraus folgt $x_j^n = y^n$ nach Definition von K_n. Dann gibt es, nach der Eigenschaft E, $l+1$ Punkte im Innern von L_{n-1}, für die ebenfalls (6) gilt. Für diese muß dann aber $x_j^{n-1} = y^{n-1}$, $x_j^n = y^n$ sein. Setzt man dies bis zu $L_s = K_s$ fort, so folgt, daß K_s im Innern $l+1$ solche Punkte mit (6) enthalten sollte, also l verschiedene Gitterpunktpaare $\neq 0$ im Widerspruch zur Definition von K_s, w. z. b. w.

---

[4]) *H. Davenport,* Minkowski's inequality for the minima associated with a convex body. Quarterly Journal **10** (1939), 119—121. Für beliebige Körper läßt sich ein ähnlicher Satz aufstellen, wie dies für $l=1$ *Jarnik, Rogers* und *Chabauty* getan haben; vgl. z. B. C. R. Acad. Sci. Paris **227** (1948).

[5]) Vgl. *Koksma,* a. a. O., S. 20ff.

§ 4.

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns zum Beweis des Satzes (§ 1). Sind $a_1, \ldots, a_n$ die vorgegebenen Vektoren (o. B. d. A. Det. $(a_1, \ldots, a_n) = 1$), so bilden wir die Linearformen $L_i(x) = a_i^* x$ (a^* transponierter Vektor zu a) und die Distanzfunktion $f = \operatorname{Max}_i |L_i|$. Weiter sei $l = [A_n V] + 1$. Die zugehörigen M_{li}, m_i, s $(i = 1, \ldots, n)$ seien wie in § 3 definiert. Es seien nun $\pm g_j$ $(j = 1, \ldots, l)$ beliebige l Gitterpunktpaare $\neq 0$. Dann muß es unter ihnen mindestens ein g mit $f(g) \geq M_s$ geben. Es sei g jenes g_i unter diesen l Gitterpunkten, für welches $f(g)$ maximal ist. Dann gibt es ein t so, daß $M_{l,t+l} > f(g) \geq M_{l,t}$ (ist $t = n$, so fällt die linke Ungleichung fort).

Dann bestehen zwischen den $L_i(g)$, wenn $t < n$ ist, $n - t$ Relationen

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ik} L_k = 0 \quad (i = 1, \ldots, n-t).$$

Man kann durch elementare Umformungen und Umnumerierung erreichen, daß diese Relationen die Gestalt

$$\sum_{k=1}^{n-i+1} A_{ik} L_k = 0 \quad (i = 1, \ldots, n-t)$$

annehmen, wo $|A_{i,n-i+1}| = \operatorname{Max} |A_{ik}|$. Daraus folgt sofort

$$|L_j| \leq \sum_{k=1}^{j-1} |L_k| \quad (j = n-i+1;\ i = 1, \ldots, n-t)$$

und hieraus $|L_j| \leq 2^{j-t-1} \sum_{k=1}^{t} |L_k|$ durch vollständige Induktion. Denn für $j = t+1$ ist die Behauptung richtig. Gilt sie auch bis $j-1$, so folgt aus

$$|L_j| \leq \sum_{k=1}^{j-1} \leq \left(1 + \sum_{k=t+1}^{j-1} 2^{k-t-1}\right) \sum_{k=1}^{t} \leq 2^{j-t-1} \sum_{k=1}^{t}$$

die Behauptung.

Dabei ist $j \geq t+1$. Es ist also auch, da $j \leq n$ ist,

$$|L_j| \leq 2^{n-t+1}\, t \operatorname{Max}(|L_1|, \ldots, |L_t|) \quad (j = 1, \ldots, n),$$

also auch

$$M_{l,t} \leq f(g) \leq 2^{n-t+1}\, t \operatorname{Max}(|L_1|, \ldots, |L_t|).$$

Daraus folgt, wenn wir $r_i = \frac{2^{i+1-n}}{i} M_{li}$ $(i \leq n-1)$, $r_n = M_{ln}$ setzen, folgendes:

Betrachten wir die Distanzfunktion

$$\bar{f} = \operatorname{Max}_i \left(\frac{|L_i|}{r_i}\right)$$

und sind l beliebige Gitterpunktpaare $\pm g_i \neq 0$ $(i = 1, \ldots, l)$ vorgelegt, so muß für mindestens eines davon $\bar{f}(g) \geq 1$ sein. Denn ist t jene Zahl, für die $f(g) \geq M_{l,t}$, so ist

$$\bar{f}(g) \geq \frac{1}{r_t} \operatorname{Max}(|L_1|, \ldots, |L_t|) \geq 1,$$

da die r_i monoton zunehmen. Folglich gilt, daß im Innern des Parallelepipeds

$$|L_i| \leq r_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

höchstens $l-1$ Gitterpunktpaare $\neq 0$ liegen. Wir setzen nun $(r_1 \cdots r_n)^{\frac{1}{n}} = r$ und $\frac{r}{r_i} = \varepsilon_i$. Dann ist $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n = 1$. Weiter ist nach Hilfssatz 2, da $J = 2^n$ ist,

$$r_1 \cdots r_n = \frac{1}{(n-1)!} 2^{-\frac{(n-1)(n-2)}{2}} M_{l1} \cdots M_{ln} > \frac{nl}{(n!)^2} 2^{-\frac{n^2-n+2}{2}} = Cl.$$

Daraus folgt, daß die Anzahl der Gitterpunktpaare $\neq 0$ im Parallelepiped P_1:

$$\varepsilon_i |L_i| \leq \sqrt[n]{Cl} \quad (i=1, \ldots, n)$$

höchstens gleich $l-1=[A_n V] \leq A_n V$ ist.

Das Volumen von P_1 ist aber $2^n Cl > \frac{1}{A_n}([A_n V]+1) > V$. Also enthält auch das Parallelepiped P:

$$\varepsilon_i |L_i| \leq \frac{1}{2} V^{\frac{1}{n}} \quad (i=1, \ldots, n)$$

vom Volumen V höchstens $A_n V$ Gitterpunktpaare $\neq 0$, w. z. b. w.

§ 5.

Wir können den eben bewiesenen Satz auch so aussprechen:

Liegt ein Würfel W vom Volumen V vor, mit 0 als Mittelpunkt, und ist A eine beliebige Matrix mit Det. $A=1$, so gibt es eine Diagonalmatrix D mit Det. $D=1$, so daß die Anzahl der Punktepaare $\pm DAg$ (g Gitterpunkt), die in W liegen, $\leq A_n V$ ist.

Dieser Satz läßt sich auf beliebige konvexe Körper K mit Mittelpunkt in 0 und Volumen V verallgemeinern.

Satz. *Es sei K ein konvexer Körper mit Volumen V und Mittelpunkt in* 0. *Dann gibt es stets einen konvexen Körper $\bar{K}$ mit denselben Eigenschaften, der aus K durch eine volumentreue Affinität hervorgeht, so daß folgendes gilt: Ist A eine beliebige Matrix mit* Det. $A=1$, *so gibt es stets eine Diagonalmatrix D mit* Det. $D=1$, *so daß die Anzahl der Punktepaare $\pm DAg$ (g Gitterpunkt), die in $\bar{K}$ liegen, kleiner als $\bar{A}_n V$ ist, wo*

$$\bar{A}_n = A_n (n!)^{4n+1} = \frac{1}{n} (n!)^{4n+3} 2^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Zieht man einen Satz von Davenport und Rogers heran[6]), dann kann die Schranke um $\frac{4{,}921}{n!}$ herabgedrückt werden.

Beweis. Es sei $f(x)$ die Distanzfunktion von K. Es seien die $M_i = f(m_i)$ gewöhnliche Minima (also $l=1$). Durch Adaption des Zahlengitters erhält man neue Gittervektoren[7]) $u_1, \ldots, u_n$ aus $m_1, \ldots, m_n$, so daß Det. $U=1$ für die Matrix $U=(u_1, \ldots, u_n)$ gilt und

$$\frac{2^n}{n!} \leq f(u_1) \cdots f(u_n) J \leq 2^n n!$$

ist (es ist wieder J das Volumen des Eichkörpers). Dann sei $\bar{K}$ der Körper $f(Ux) \leq t$, wenn K der Körper $f \leq t$ ist. Sind die e_i wieder die Einheitsvektoren des R_n, so ist also $F(e_i) = f(u_i)$, wenn $F(x) = f(Ux)$ gesetzt wird, und es ist daher

$$\frac{2^n}{n!} \leq F(e_1) \cdots F(e_n) J \leq 2^n n! \tag{7}$$

Man betrachte nun die polare Distanzfunktion $G(y)$ zu $F(x)$, für die also

$$|x^* y| \leq F(x) G(y) \tag{8}$$

ist. Eine leichte Rechnung zeigt[8]), daß

$$F(e_i) G(e_i) \leq (n!)^4,$$

---

[6]) *Davenport* und *Rogers*, Hlawka's theorem in the geometry of numbers, Duke Journal **14** (1947).

[7]) *Mahler*, A theorem on inhomogenous diophantine inequalities, Proc. Acad. Amsterdam **41** (1938).

[8]) *Mahler*, Ein Übertragungsprinzip für konvexe Körper, Casopis **68** (1939), 93ff.; *Hlawka*, Über eine Verallgemeinerung des Satzes von Mordell, Annals of Math. **50** (1949).

also, wenn man (7) beachtet,

$$JG(e_1)\cdots G(e_n) \leq 2^{-n}(n!)^{4n+1} = B$$

ist. Es wurde nun in § 4 gezeigt, daß das Parallelepiped

$$\operatorname{Max} |\varepsilon_i L_i| \leq (Cl)^{\frac{1}{n}}$$

mit $C = \frac{n}{(n!)^2} 2^{-\frac{n^2-n+2}{2}}$ höchstens $l-1$ Gitterpunktpaare $\neq 0$ enthält. (Dabei ist l eine beliebige natürliche Zahl.) Die spezielle Wahl von l in § 4 wurde an dieser Stelle noch nicht verwendet. Setzen wir nun

$$G(e_i) = G_i, \quad G_i(G_1\cdots G_n)^{\frac{1}{n}} = b_i, \quad \lambda_i = b_i \varepsilon_i \quad (i=1,\ldots,n),$$

so ist

$$F(\lambda_1|L_1|,\ldots,\lambda_n|L_n|) \geq \operatorname{Max}(\varepsilon_1|L_1|,\ldots,\varepsilon_n|L_n|)(G_1\cdots G_n)^{-\frac{1}{n}},$$

denn es ist doch $G_i F(\lambda_1|L_1|,\ldots,\lambda_n|L_n|) \geq \lambda_i |L_i|$.

Nun ist $JG_1\cdots G_n \leq B$, also enthält

$$F(\lambda_1|L_1|,\ldots,\lambda_n|L_n|) \leq \left(\frac{Cl}{BJ}\right)^{\frac{1}{n}}$$

höchstens $l-1$ Gitterpunktpaare $\neq 0$, und es ist $\lambda_1\cdots\lambda_n = 1$, also das Volumen dieses Körpers $C B^{-1} l$. Wählen wir daher $l = [\bar{A}_n V] + 1$, so erhalten wir die gewünschte Behauptung.

Eingegangen 20. Juni 1949.

l eine

noch

dieses

nschte